Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 432, 2015 г.

**А. М. Вершик**

# ОСНАЩЕННЫЕ ГРАДУИРОВАННЫЕ ГРАФЫ, ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ СИМПЛЕКСОВ И ИХ ГРАНИЦЫ

## §1. Введение

В функциональном анализе, теории вероятностей, геометрии рассматриваются различные понятия границ. В теории потенциала, теории гармонических функций, теории марковских процессов популярно понятие границы Мартина. Возникнув в 1940-х гг., это понятие породило огромную литературу. Известно, что именно оно было одним из стимулов для развития теории Шоке (другим была знаменитая теорема Крейна–Мильмана о выпуклых компактах в локально выпуклом пространстве). Здесь мы хотим установить прямую связь двух теорий – теории границ марковских процессов, которая фактически есть теория инвариантных мер на пространстве путей градуированного графа (или, что то же самое, на пространстве траекторий марковского компакта), и геометрии проективных пределов симплексов. Эта простая связь помогает самой задаче отыскания границ, а та, в свою очередь, включает и общую теорию инвариантных мер для гиперконечных действий групп и гиперконечных отношений эквивалентности. С алгебраической точки зрения, это задачи о списках следов на алгебрах или характеров на группах. По существу, уже в первых работах автора и С. В. Керова, Д. Войкулеску и других была выяснена связь теории центральных мер на пространстве путей градуированных графов и теории следов на локально полупростых алгебрах. Основным нетривиальным примером был, конечно, граф Юнга, а также граф Кингмана и др. Потом были рассмотрены и другие примеры. Граница Мартина была рассмотрена в работах [11, 10] применительно к нескольким конкретным графам. Здесь мы хотим дать общую трактовку и более прямую связь различных границ с выпуклой геометрией проективных пределов симплексов. Границу-выход, введенную в рамках марковской

---

*Ключевые слова*: оснащенные диаграммы Браттели, проективные пределы симплесов, эргодические меры, граница Мартина.

Работа поддержана грантом РНФ 14-11-00581.

теории в замечательных работах Е. Б. Дынкина 1960-х гг., мы связываем непосредственно с границей Шоке. В рамках геометрии симплексов находят естественную трактовку и другие границы. Но главные результаты этой статьи, в продолжение недавней работы [3], содержатся в §4; в нем формулируются новые общие понятия – внутренней метрики (топологии), стандартности и т.д. Мы используем и применяем идеи и результаты теории метрических фильтраций ([2]). Конечная цель состоит в вычислении границ в тех (многочисленных) случаях, когда это возможно (стандартные графы), и в распознавании тех случаев, в которых задача неразрешима (вполне нестандартные графы). Одно из очевидных приложений относится к по существу новой задаче из теории случайных блужданий на группах – описанию всех условных блужданий с равномерными копереходами. В готовящейся совместной работе с А. В. Малютиным будет рассмотрен один из примеров.

## §2. Данные задачи

**2.1. Градуированный граф, пространство путей, топология.** Рассмотрим локально конечный, бесконечный $\mathbb{N}$-градуированный граф $\Gamma$ (диаграмму Браттели). Множество вершин, соответствующих градуировке $n$, $n = 0, 1, \dots$, обозначим через $\Gamma_n$ и назовем $n$-м *этажом* графа:

$$\Gamma = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n;$$

этаж $\Gamma_0$ состоит из единственной начальной вершины $\{\emptyset\}$. Мы считаем, что каждая вершина имеет хотя бы одну последующую, и все, кроме начальной, – хотя бы одну предыдущую вершину. В дальнейшем предполагается также, что ребра графа $\Gamma$ простые.[1] Никаких других предположений не делается. Градуированному графу $\Gamma$ канонически сопоставляется локально полупростая алгебра $A(\Gamma)$ над $\mathbb{C}$, однако здесь мы не рассматриваем ни её, ни связи вводимых понятий с ней и ее представлениями – этот вопрос заслуживает отдельного рассмотрения.

Путем называется последовательность (конечная или бесконечная) вершин графа, в которой соседние вершины соединены ребрами (для

[1]Включение в рассмотрение диаграмм Браттели с кратными ребрами для наших целей не дает ничего нового, поскольку вводимые далее копереходные вероятности заменяют и обобщают кратности ребер.

графов без кратных ребер это то же самое, что бесконечная последовательность ребер). Пространство всех бесконечных путей в графе $\Gamma$ обозначается $T(\Gamma)$; оно в естественном смысле есть обратный предел пространств конечных путей (от начальной вершины до вершин некоторого этажа) и, таким образом, является канторовским компактом. Цилиндрические множества в пространстве $T(\Gamma)$ – это множества, определяемые в терминах условий на начальные отрезки путей до этажа $n$; они открыто-замкнуты и задают базу топологии. На $T(\Gamma)$ естественно определяется понятие *хвостового отношения эквивалентности* $\tau_\Gamma$: два бесконечных пути эквивалентны, если они совпадают начиная с некоторого этажа; говорят также, что эти два пути принадлежат одному блоку *разбиения. Хвостовая фильтрация* $\Xi(\Gamma) = \{\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \dots\}$ – это убывающая последовательность $\sigma$-алгебр борелевских множеств, где $\sigma$-алгебра $\mathfrak{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, состоит из всех борелевских подмножеств пространства $T(\Gamma)$, которые вместе с некоторым путем $\gamma$ содержат все пути, совпадающие с $\gamma$ до этажа с номером $n$. В понятном смысле $\sigma$-алгебра $\mathfrak{A}_n$ дополнительна к конечной $\sigma$-алгебре цилиндрических множеств порядка $n$. Ключевой идеей работ [3, 4] является привлечение теории убывающих фильтраций (см., например, [2]) к анализу структуры пространства путей и мер на них. Ниже мы затронем этот вопрос.

**2.2. Система копереходных матриц, оснащеннный граф.** Мы вводим на графе дополнительную структуру, *систему копереходных вероятностей*

$$\Lambda = \{\lambda = \lambda_v^u;\ u \in \Gamma_n, v \in \Gamma_{n+1}, (u,v) \in \mathrm{edge}(\Gamma_n, \Gamma_{n+1}),\ n = 0, 1, \dots\},$$

сопоставляя каждой вершине графа $v \in \Gamma_n$ вероятностный вектор, координата $\lambda_v^u$ которого есть вероятность ребра $u \prec v$, входящего в вершину $v$ из предыдущего этажа; $\sum\limits_{u: u \prec v} \lambda_v^u = 1$ и $\lambda_v^u \geq 0$.

**Определение 1.** *Оснащенным графом будем называть пару* $(\Gamma, \Lambda)$, *состоящую из графа и системы* $\Lambda$ *копереходных вероятностей на его ребрах.*

Термин “копереходные вероятности” заимствован из теории марковских цепей ([7]): если рассматривать граф как множество состояний марковской цепи, начинающейся с состояния $\varnothing$ в момент $t = 0$, а номера этажей как моменты времени, то систему $\Lambda = \{\lambda_v^u\}$ следует считать системой копереходных вероятностей для марковской цепи:

$$\mathrm{Prob}\{x_t = u | x_{t+1} = v\} = \lambda_v^u.$$

Удобно рассматривать систему копереходных вероятностей как систему марковских матриц порядков $d_n \times d_{n+1}$:

$$\{\lambda_v^u\}, \quad u \in \Gamma_n, v \in \Gamma_{n+1}; \quad |\Gamma_n| = d_n,\ |\Gamma_{n+1}| = d_{n+1},\ n \in \mathbb{N};$$

эти матрицы обобщают $(0\vee 1)$-матрицы инцидентности графа $\Gamma$. Асимптотические свойства этой последовательности матриц и представляют главный интерес. В этом смысле вся рассматриваемая здесь теория есть часть важной самой по себе асимптотической теории бесконечных произведений марковских матриц.

Каждая борелевская мера на путях графа определяет систему копереходных вероятностей – как систему условных мер естественных измеримых разбиений. Мера называется согласованной с данной системой $\Lambda$ копереходных вероятностей, если совокупность ее копереходных вероятностей (для всех вершин) совпадает с этой системой. Напомним, что система копереходных вероятностей, вообще говоря, не позволяет однозначно задать систему переходных вероятностей

$$\mathrm{Prob}\{x_{t+1} = v | x_t = u\};$$

иначе говоря, эта система не задает однозначно марковскую цепь.

Мера на пространстве путей графа называется *эргодической*, если хвостовая $\sigma$-алгебра (т.е. пересечение $\sigma$-алгебр хвостовой фильтрации) тривиальна mod0, т.е. состоит из двух элементов.

*Нашей целью является перечисление всех марковских мер, т.е. всевозможных переходных вероятностей для эргодических марковских цепей, имеющих заданную систему копереходных вероятностей. Соответствующий список естественно назвать границей по Дынкину системы копереходных вероятностей, или границей Дынкина оснащённого графа.* Это топологическая граница, и, как мы увидим, она есть граница Шоке некоторого симплекса (проективного предела конечномерных симплексов).

В вероятностной литературе (например, по теории случайных блужданий) копереходные вероятности обычно задаются не явно, а как копереходные вероятности некоторого данного марковского процесса. Мы предпочитаем задавать их непосредственно, т.е. включать их в данные задачи. Если же такая марковская цепь, т.е. марковская мера

$\mu$ с этими копереходами, на пространстве путей уже задана, то возникает *метрическая граница Пуассона–Фюрстенберга этой меры* – как пространство с мерой, определенной на хвостовой $\sigma$-алгебре и индуцированной мерой $\mu$. Эта граница как пространство с мерой есть часть границы Дынкина. Система копереходных вероятностей определяет коцикл на хвостовом отношении эквивалентности, т.е. функцию от пары эквивалентных путей $(\gamma_1, \gamma_2) \to c(\gamma_1, \gamma_2)$, равную в нашем случае отношению произведений копереходных вероятностей вдоль обоих путей (это произведение конечно, так как пути эквивалентны). В нашем случае коцикл имет специальный вид (произведение вероятностей по ребрам) и называется марковским коциклом. В статистической физике и теории конфигураций рассматриваются и более общие коциклы. Этот коцикл называют коциклом Радона–Никодима. *Мера с данными копереходными вероятностями есть мера с заданным коциклом Радона–Никодима для группы преобразований, разбиение на траектории которой есть хвостовое разбиение.*[2]

Наиболее важный частный случай системы $\Lambda$ копереходных вероятностей, изучаемый в комбинаторике, теории представлений и в алгебраических ситуациях, таков:

$$\lambda_v^u = \frac{\dim(u)}{\sum\limits_{u:u\prec v} \dim(u)},$$

где $\dim(u)$ – число путей, ведущих из начальной вершины $\emptyset$ в вершину $u$ (т.е. размерность представления алгебры $A(\Gamma)$, отвечающего вершине $u$). Иначе говоря, вероятность попасть из вершины $v$ в вершину $u$ равна доле тех путей, которые ведут из начала $\emptyset$ в вершину $u$, среди всех путей, ведущих из $\emptyset$ в $v$. Каноничность данной системы копереходных вероятностей в том, что она определяется только

[2]На пространстве путей градуированного графа имеется еще одна дополнительная структура – линейный порядок на ребрах, входящих в каждую вершину; он позволяет ввести лексикографический порядок на каждом классе путей относительно хвостового отношения эквивалентности и затем определить так называемое адическое преобразование на пространстве путей графа – переход к следующему пути в смысле этого порядка. В данной работе мы не используем эту структуру, ограничимся лишь замечанием, что центральность меры равносильна ее инвариантности относительно этого преобразования, а свойство меры иметь данную систему копереходных вероятностей равносильно, как указывалось выше, тому, что это адическое преобразование имеет заданный коцикл Радона–Никодима.

самим графом. Соответствующие ей марковские меры на пространстве путей $T(\Gamma)$ называются *центральными мерами*; до сих пор их рассмотрениями ограничивались в литературе по диаграммам Браттели. В терминологии теории $C^*$-алгебр центральные меры суть следы на алгебре $A(\Gamma)$, а эргодические центральные меры – неразложимые следы. Подробнее о случае центральных мер см. [3] и многочисленную библиографию 1980–2000-х гг. Однако рассмотрение произвольной системы копереходных вероятностей становится необходимым для дальнейшего развития всей теории. Обратим внимание на то, что уже для центральных мер разнообразие асимптотического поведения очень велико; пример графа неупорядоченных пар из работы [3] показывает, как сильно может отличаться ответ в задаче о центральных мерах от случая привычных графов типа графа Юнга.

Аналог системы копереходных вероятностей, т.е. понятие оснащенного графа, естественно определять и в большей общности по сравнению со случаем градуировнных графов: достаточно иметь ориентированный граф или мультиграф, у каждой вершины которого (кроме, может быть, одной) непусто множество входящих в нее ребер; можно определять произвольную систему вероятностей на множестве входящих ребер каждой вершины; проблема по-прежнему состоит в описании границы Дынкина, т.е. совокупности всех мер на множестве ориентированных путей графа с данными условными вероятностями входа.

**2.3. Операторы, граница Мартина, терминология.** Оснащенный граф, или пара $(\Gamma, \Lambda)$, естественно определяет два линейных оператора. Первый оператор $L = L(\Gamma, \Lambda)$ действует на пространстве $F(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \mathbb{R}\}$ всех вещественных функций на множестве всех вершин графа $\Gamma$:

$$(Lf)(v) = \sum_{u: u \prec v} \lambda_v^u f(u);$$

это оператор усреднения функции по копереходным вероятностям. Другой оператор $L^*$ действует на симплексе $\Sigma(\Gamma)$ всех вероятностных мер на множестве вершин графа:

$$L^*(\mu)(u) = \sum_{v: v \succ u} \lambda_v^u \mu(v).$$

Первый оператор переводит функции на $(n+1)$-м этаже графа (т.е. функции, отличные от нуля на всех этажах кроме $n+1$) в функции на $n$-м этаже, а второй – вероятностные меры на $n$-м этаже в вероятностные меры на $(n+1)$-м этаже. Эти ограничения операторов и определяются матрицами перехода и коперехода, упомянутыми выше.

Очевидно также, что каждая вершина $v$ этажа $n+1$ (точнее, соответствующая $\delta$-мера $\delta_v$) корректно определяет единственную вероятностную меру $L^*(\delta_v) = \lambda_v^{\cdot}$ на этаже $n$ и (по индукции, многократным применением оператора $L^*$) меры на всех предыдущих этажах $\Gamma_k$, $k < n+1$. Будем обозначать эти меры $\mu_v^k$, $v \in \Gamma_{n+1}$, $k < n+1$.

Следуя традиции, ядром Мартина назовем функцию $K(u,v)$ от пар вершин $u, v$ разных этажей, соединимых хотя бы одним путем (в противном случае $K(u,v) = 0$):

$$K(u,v) = \sum_{\{w_i\}} \prod_i p(w_i, w_{i+1}); \quad u = w_0 \prec w_1 \prec \dots \prec w_k = v,$$

где суммирование происходит по всем путям из $u \in \Gamma_n$ в $v \in \Gamma_{n+1}$.

Как обычно, ядро Мартина позволяет определить компактификацию Мартина $\widetilde{M}(\Gamma, \Lambda)$ множества функций $\Gamma' = \{v \mapsto K(u,v); u \in \Gamma\} \subset F(\Gamma)$ относительно поточечной сходимости. Нарост, т.е. разность $\widetilde{M}(\Gamma, \Lambda) \setminus \Gamma'$ называется *границей Мартина* пары $(\Gamma, \Lambda)$. Говоря более подробно, это означает следующее: последовательность вершин $v_k \in \Gamma$, $k = 1, 2, \dots$, сходится в себе, если для любой вершины $u \in \Gamma$ числовая последовательность вероятностей $\mathrm{Prob}\{u|v_k\}$ сходится в себе при $k \to \infty$. Проще сказать, что последовательность мер $\mu_{v_k}^n$, индуцируемых вершинами $v_k$ на этаже с произвольным номером $n$ графа $\Gamma$, слабо сходится к некоторой мере $\mu^n$, определяемой последовательностью $\{v_k\}$. Отождествим между собой последовательности, определяющие одну и ту же меру. Таким образом, точка границы Мартина есть вероятностная мера на пространстве бесконечных путей графа, имеющая заданные копереходные вероятности и являющаяся слабым пределом некоторой бесконечной последовательности мер $\mu_n$, $n = 1, 2, \dots$. Это общепринятое определение границы Мартина для марковской цепи, но данное в терминах, связанных с градуированным графом. Ниже мы дадим эквивалентное абстрактное определение границы Мартина в терминах проективного предела симплексов и вернемся к поставленному вопросу.

**Замечание 1.** В работах Дынкина (см. одну из первых работ [7]) применительно к марковским цепям и процессам используется терминология “граница-выход” и “граница вход”. То, что названо выше границей Дынкина, можно трактовать как границу-выход для системы копереходных вероятностей, поскольку речь идет о финальном поведении траекторий марковских цепей и точка границы есть класс траекторий, объединенных одинаковым финальным поведением и, тем самым, задающим одну (условную) эргодическую марковскую цепь.

Здесь, к сожалению, возможна путаница в терминологии: оператор, сопряженный к оператору усреднения функций по копереходным вероятностям (“оператор Лапласа”), задает границу, которую не без оснований принято называть границей-вход. В работах [10, 11] используется именно такая терминология. Все дело в том, что считать первичным – генератор (оператор Лапласа) и функцию Грина, действующие в функциях, как в теории потенциала, или оператор проектирования в мерах, задающий геометрию марковской цепи в более широком контексте. С другой стороны, конечно, обращение времени превращает задачу описания всех эргодических мер с данными копереходными вероятностями в задачу об описании всех мер с заданными переходными вероятностями, которую в соответствии с нашим определением следует назвать границей-вход. Мы постарались избежать этого смешения и не использовали этих терминов. Наши новые определения – стандартность, компактность, лакунарность, внутренняя метрика и топология – одинаково применимы к системам переходных и копереходных вероятностей и к теории прямых и обратных мартингалов.

Еще одно замечание относится к понятию энтропии (нестационарной) марковской цепи. Здесь должны быть общие теоремы, которые бы связывали нормированную энтропию марковской цепи на путях графа (ср., например, с определением энтропии диаграммы Юнга в [6]) и энтропию блужданий (см., например, [9]).

Наконец, отметим еще одно очень важное обстоятельство. Рассматриваемая теория границ марковских процессов должна отдельно строиться и для $\sigma$-конечных мер. В известном смысле это даже более естественно, поскольку инвариантных конечных мер для интересных марковских цепей, как правило, не существует.[3] Для теории AF-алгебр этот вопрос очень важен и связан с преставлениями типа $\mathrm{II}_\infty$ и с $\sigma$-конечными следами. Однако пока теория $\sigma$-конечных марковских цепей развита недостаточно.

## §3. Геометрия проективного предела симплексов

**3.1. Проективный предел симплексов и эквивалентность языков.** Эквивалентным и весьма геометричным вариантом рассматриваемой теории оснащенных графов (диаграмма Браттели + система копереходов) является теория проективных пределов конечномерных симплексов.

Сначала мы покажем, как по паре $(\Gamma, \Lambda)$, т.е. по оснащенному графу, канонически определить проективный предел конечномерных симплексов. Затем мы увидим, что есть и обратный переход от проективных пределов к оснащенным графам.

Обозначим через $\Sigma_n$ конечномерный симплекс (формальных выпуклых комбинаций вершин $n$-го этажа $v \in \Gamma_n$). Симплекс естественно понимать как множество всех вероятностных мер на множестве его вершин $\Gamma_n$. Зададим аффинные проекции $\pi_{n,n-1} : \Sigma_n \to \Sigma_{n-1}$, которые достаточно определить для каждой вершины $v \in \Gamma_n$. Очевидно, что эти проекции можно рассматривать как систему копереходных мер $\Lambda$, а образы вершин $v$ суть точки предыдущего симплекса, то есть вероятностные векторы:

$$\pi_{n,n-1}(\delta_v) = \sum_{u: u \prec v} \lambda_v^u \delta_u;$$

отображение по линейности продолжается на весь симплекс $\Gamma_n$. Вершине $\emptyset$ соответствует нульмерный симплекс, состоящий из одной точки. Вырождения допускаются (т.е. вершины при проекции могут склеиваться). Определим проекции $\pi_{n,m} : \Sigma_n \to \Sigma_m$ симплексов с произвольными номерами $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$, следующим образом: $\pi_{n,m} = \prod_{i=m}^{n+1} \pi_{i,i-1}$. Система данных $\{\Sigma_n, \pi_{n,m}\}$ позволяет, с одной стороны, определить проективный предел, а с другой, восстановить граф (а затем и пути в графе): вершины симплекса $\Sigma_n$ суть вершины графа

[3] Необходимость такого рассмотрения была отмечена в ранней работе [9].

$\Gamma_n$, а ребра определяются по ненулевым координатам векторов $\pi_{n,n-1}$, $n \in N$.

Обозначим через $\mathcal{M} = \prod_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$ прямое произведение симплексов $\Sigma_n$, $n \in \mathbb{N}$, снабженное продакт-топологией.

**Определение 2.** *Пространством проективного предела семейства* $\{\Sigma_n\}_n$ *симплексов относительно системы проекций* $\{\pi_{n,m}\}$ *называется следующее подмножество прямого произведения* $\mathcal{M}$*:*

$$\lim_{n\to\infty}(\Sigma_n, \pi_{n,m}) \equiv \bigl\{\{x_n\}_n;\ \pi_{n,n-1}(x_n) = x_{n-1};\ n = 1, 2, \dots\bigr\}$$
$$\equiv (\Sigma_\infty, \Lambda) \subset \prod_{n=0}^{\infty} \Sigma_n = \mathcal{M}.$$

**Предложение 1.** *Пространство проективного предела* $\Sigma_\infty$ *всегда есть непустое, выпуклое, замкнутое и потому компактное подмножество в прямом произведении* $\mathcal{M}$*, являющееся симплексом Шоке (возможно, бесконечномерным).*

Аффинная структура прямого произведения $\mathcal{M}$ определяет аффинную структуру предельного пространства; непустота и замкнутость очевидны. Остается проверить лишь, что имеет место единственность разложения произвольной точки предела по его границе Шоке. Это сделано в следующем пункте.

Мы различаем пространство проективного предела и "структуру проективного предела", имея в виду, что для нас существенно не только само предельное пространство, т.е. некоторый бесконечномерный симплекс, но и структура допредельных симплексов и их проекции.

Покажем, что по системе данных проективного предела симплексов можно восстановить граф, пространство путей и систему копереходных вероятностей; причем отвечающий этой системе проективный предел, построенный по только что изложенному правилу, совпадает с исходным. Этим будет установлена тавтологическая связь между двумя языками: языком пар {диаграмма Браттели, система копереходов} с одной стороны и языком проективных пределов конечномерных симплексов с другой стороны.

Действительно, пусть задан проективный предел конечномерных симплексов $\{\Sigma_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, и согласованная система аффинных проекций $\{\pi_{n,m}\}$:

$$\pi_{n,m} : \Sigma_n \to \Sigma_m, \quad n \geq m,\ n, m \in \mathbb{N}.$$

Примем вершины симплекса $\Sigma_n$ за вершины $n$-го этажа графа $\Gamma$; при этом вершина $u$ этажа $n$ предшествует вершине $v$ этажа $n+1$, если проекция $\pi_{n+1,n}$ переводит вершину $v$ в точку симплекса $\Sigma_n$, у которой положительна барицентрическая координата относительно вершины $u$. В качестве системы переходных вероятностей возьмем систему векторов $\{\lambda_v^u\}$, связанных с проекциями $\pi_{n+1,n}$, как указано выше.

В дальнейшем, имея проективный предел симплексов, мы будем использовать канонически связанный с ним граф (вершин всех симплексов), пространство путей в нем и т.д. и точно так же будем говорить о проекциях симплексов, канонически связанных с оснащенным графом.

**3.2. Свойства предельного компакта, экстремальность и почти экстремальность.** Расмотрим произвольный проективный предел конечномерных симплексов

$$\Sigma_1 \leftarrow \Sigma_2 \leftarrow \cdots \leftarrow \Sigma_n \leftarrow \Sigma_{n+1} \leftarrow \cdots \leftarrow \Sigma_\infty \equiv \Sigma(\Gamma, \Lambda).$$

Прежде всего определим предельные проекции $\pi_{\infty,m} : \Sigma_\infty \to \Sigma_m$ как пределы $\lim_n \pi_{n,m}$ при каждом $m$: очевидно, что образы $\pi_{n,m}\Sigma_n$, как подмножества в симплексах $\Sigma_m$, монотонно убывают при растущем $n$ и их пересечения суть некоторые множества, обозначаемые $\Omega_m = \bigcap_{n:n>m} \pi_{n,m}\Sigma_n$; это выпуклые замкнутые подмножества конечномерных симплексов $\Sigma_m$, $m = 1, 2, \ldots$, и предельные проекции эпиморфно отображают предельный компакт $\Sigma_\infty$ на эти множества:

$$\pi_{\infty,m} : \Sigma_\infty \to \Omega_m.$$

Более экономно было бы рассматривать и сам проективный предел

$$\Omega_1 \leftarrow \Omega_2 \leftarrow \cdots \leftarrow \Omega_n \leftarrow \cdots \leftarrow \Omega_\infty = \Sigma(\Gamma, \Lambda)$$

с эпиморфными проекциями $\pi_{n,m}$, ограниченными на подмножества $\Omega_n$, и – по определению – с тем же предельным пространством. Однако явное нахождение множеств $\Omega_n$ – интересная задача, равносильная основной задаче нахождения всех инвариантных мер.[4]

Любая точка предельного компакта, т.е. последовательность $\{x_m\}$, где $x_m \in \Sigma_m$, $\pi_{m,m-1}x_m = x_{m-1}$, определяет для всякого $m$ последовательность мер $\{\nu_n^m\}_n$ на симплексе $\Sigma_m$, а именно $\nu_n^m = \pi_{n,m}(\mu_n)$, где мера $\mu_n$ есть (единственное) разложение точки $x_n$ по крайним точкам

[4]В частности, явный вид компактов $\Omega_n$ найден в очень немногих случаях, даже среди тех, где центральные меры известны. Уже для графа Паскаля получаются любопытные и довольно сложные выпуклые компакты, а, например, для графа Юнга их вид с той же степенью четкости, как для графа Паскаля, автору неизвестен.

в симплексе $\Sigma_n$. Разумеется, барицентр каждой из мер $\nu_n^m$ в $\Sigma_m$ есть $x_m$, а сама эта последовательность мер в понятном смысле укрупняется и слабо сходится в $\Sigma_m$ при $n \to \infty$ к некоторой мере $\nu_{x_m}$, сосредоточенной на подмножестве $\Omega_m \subset \Sigma_m$. Очевидно, так получаются все точки предельного компакта, т.е. все меры с данными копереходными вероятностями.

Точка произвольного выпуклого компакта $K$ называется *экстремальной*, если не существует нетривиальной выпуклой комбинации, представляющей эту точку; совокупность экстремальных точек называется границей Шоке компакта и обозначается $\operatorname{ex} K$. Точка называется *почти экстремальной*, если она лежит в замыкании $\overline{\operatorname{ex}}(K)$ границы Шоке. Напомним, что аффинный компакт, в котором всякая точка имеет единственное разложение по экстремальным точкам (по границе Шоке), называют симплексом Шоке.

Приведем общий критерий экстремальности и почти экстремальности точек проективного предела симплексов.

**Предложение 2.** 1. *Точка $\{x_n\}$ проективного предела симплексов является экстремальной тогда и только тогда, когда для любого $m$ слабый предел мер $\nu_{x_m}$ в симплексе $\Sigma_m$ есть $\delta$-мера в точке $x_m$: $\lim_n \nu_n^m \equiv \nu_{x_m} = \delta_{x_m}$.*

2. *Точка $\{x_n\}$ почти экстремальна, если для любого $m$ и любой окрестности $V(x_m)$ точки $x_m \in \Sigma_m$ существует экстремальная точка $\{y_n\}$ предельного компакта, для которой $y_m \in V(x_m)$.*

3. *Для каждой точки $\{x_n\}$ предельного компакта симплексов существует единственное разложение по экстремальным точкам (разложение Шоке), определяемое с помощью мер $\nu_{x_m}$.*

**Следствие 1.** *Предельный компакт проективного предела конечномерных симплексов есть (вообще говоря, бесконечномерный) симплекс Шоке.*

Легко доказать, что верно и обратное: всякий сепарабельный симплекс Шоке может быть представлен как проективный предел конечномерных симплексов, но, разумеется, такое представление далеко не единственно. Однако полезно отметить, что симплекс инвариантных мер относительно действия некоторой неаменабельной группы на компакте сепарабелен, хотя его возможная аппроксимация не порождена конечными аппроксимациями действия; поэтому возникает нетраекторная конечномерная аппроксимация действия, которая, видимо, никем не рассматривалась.

**Замечание 2.** Скорее всего, первые два пункта предложения распространяются на проективные пределы произвольных выпуклых компактов.

Напомним, что среди сепарабельных симплексов Шоке можно выделить *симплексы Полсена*, для которых множество экстремальных точек всюду плотно; такой симплекс единствен с точностью до аффинного изоморфизма и универсален в классе всех сепарабельных симплексов. Нетрудно дать пример симплекса Полсена в наших терминах.

**Предложение 3.** *Рассмотрим проективный предел симплексов со следующим свойством: для любого $m$ объединение проекций*

$$\bigcup_{n;t}\{\pi_{n,m}(t);\ t\in \operatorname{ex}(\Sigma_n),\ n=m,m+1,\dots\}$$

*по всем вершинам симплексов $\Sigma_n$ и всем $n>m$ всюду плотно в симплексе $\Sigma_m$. Тогда предельный симплекс есть симплекс Полсена.*

Ясно, что такое построение можно провести по индукции, и из критерия с очевидностью следует, что в этом случае экстремальные точки всюду плотны.

Симплексы с замкнутой границей Шоке называются *симплексами Бауэра*. Имеется много промежуточных типов симплексов между симплексами Бауэра и Полсена. В литературе по выпуклой геометрии и по теории инвариантных мер эта тема многократно обсуждалась. Однако рассмотрения этих и аналогичных свойств бесконечномерных симплексов применительно к проективным пределам и к теории градуированных графов и соответствующих алгебр, по-видимому, в литературе не было. Каждое из этих свойств имеет свою интересную интерпретацию в рамках этих теорий. Автор считает полезным в приложениях следующий класс симплексов (или даже выпуклых компактов): *почти бауэровским симплексом назывется симплекс, у которого граница Шоке открыта в своём замыкании.*

**3.3. Все границы в геометрических терминах.** Следующее определение является пересказом определения границы Мартина в терминах проективного предела.

**Определение 3.** *Точка* $\{x_n\} \in \Sigma_n$ *проективного предела симплексов принадлежит границе Мартина, если найдется такая последовательность вершин симплексов* $\alpha_n \in \mathrm{ex}(\Sigma_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *что для любого* $m$ *и произвольной окрестности* $V_\epsilon(x_m) \subset \Sigma_m$ *данной точки существует такое* $N$, *что при всех* $n > N$ *выполнено включение*

$$\pi_{n,m}(\alpha_n) \in V_\epsilon(x_m).$$

*Менее формально: точка предельного симплекса принадлежит границе Мартина, если существует последовательность вершин, слабо сходящаяся к ней ("извне").*

Этой последовательности самой по себе, вообще говоря, не соответствует точка проективного предела $\Sigma_\infty$, но эта последовательность является точкой пространства $\mathcal{M}$ (прямого произведения симплексов), и можно говорить о сближении ее координат с координатами некоторой точки из проективного предела, которая по определению принадлежит границе Мартина. Условие принадлежности точки границе Мартина ослабляет критерий почти экстремальности, поэтому следующее утверждение очевидно.

**Предложение 4.** *Граница Мартина содержит замыкание границы Шоке.*

Однако имеются примеры, в которых граница Мартина включает замыкание границы Шоке собственным образом. Такой пример, связанный со случайными блужданиями, будет приведен в готовящейся работе А. В. Малютина и автора. Возникает вопрос: можно ли описать границу Мартина в терминах самого предельного симплекса? Иначе говоря, можно ли сказать, какие еще точки (кроме тех, которые лежат в замыкании границы Шоке) принадлежат границе Мартина? Автор склонен считать, что это невозможно, поскольку ответ на этот вопрос зависит не только от геометрии самого предельного симплекса, но и от того, как он представлен в виде проективного предела.

**3.4. Вероятностное истолкование свойств проективного предела.** Параллелизм в рассмотрениях пар {градуированный граф, система копереходных вероятностей} с одной стороны и проективных пределов симплексов с другой означает, что последний имеет свою вероятностную интерпретацию. Полезно описать эту интерпретацию, не обращаясь к языку пар. Напомним, что путь в контексте проективных пределов есть последовательность $\{t_n\}_n$ вершин симплексов

$t_n \in \mathrm{ex}\,\Sigma_n$, согласованная с проекциями при всех $n \in \mathbb{N}$ следующим образом: $\pi_{n,n-1}t_n$ имеет ненулевую барицентрическую координату относительно вершины $t_{n-1}$. Прежде всего, всякая точка предельного симплекса $x_\infty \in \Sigma_\infty$ есть согласованная относительно проекций последовательность точек симплексов $\{x_n\}$: $\pi_{n,n-1}x_n = x_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Как элемент симплекса, $x_n$ определяет меру на вершинах симплекса, и, поскольку все эти меры согласованы относительно проекций, $x_\infty$ определяет некоторую меру $\mu_x$ на пространстве путей с фиксированными копереходными вероятностями. Наоборот, всякая такая мера определяет последовательность проекций. Таким образом, предельный симплекс есть симплекс всех мер на пространстве путей с заданными копереходами. Экстремальность точки $\mu \in \mathrm{ex}(\Sigma_\infty)$ означает эргодичность меры $\mu$, т.е. тривиальность относительно меры $\mu$ хвостовой $\sigma$-алгебры на пространстве путей. Критерий экстремальности, приведенный выше, имеет простое геометрическое истолкование, на котором мы не останавливаемся.

Итак, мы рассмотрели следующие границы проективного предела симплексов (или оснащенного графа):

*граница Пуассона–Фюрстенберга* $\subset$ *граница Дынкина* $=$ *граница Шоке* $\subset$ *замыкание границы Шоке* $\subset$ *граница Мартина* $\subset$ *предельный симплекс.*

Первая граница понимается как пространство с мерой; все включения являются, вообще говоря, строгими; вопрос, является ли граница Мартина геометрическим объектом (т.е. определяется ли она в чисто геометрических, а не аппроксимационных терминах), скорее всего, решается отрицательно.

Заключим этот пункт следующим выводом: *теория оснащенных градуированных графов (пар* $\{$*граф* $+$ *система копереходов*$\}$) *идентична теории симплексов Шоке, рассматриваемых как проективные пределы конечномерных симплексов.*

## §4. Внутренняя топология на проективном пределе симплексов

**4.1. Определение внутренней топологии индуктивного предела.** Мы приступаем к главной цели – построению аппроксимации проективного предела симплексов, т.е. симплекса мер с заданным коциклом на последовательности вершин графа, и определению “внутренней метрики (топологии)” на этом пределе. Эта метрика была определена в [3] на пространствах путей графа, притом только для центральных мер и при некоторых дополнительных предположениях на граф (отсутствие вершин с одинаковыми предшественниками). Здесь мы даем определение в естественной общности: градуированный граф и система копереходных вероятностей произвольны (см. § 2), а главное, рассматривается весь предельный симплекс, а не только его граница Шоке. Это дает возможность изучать границу для графов с нестандартными (некомпактными) внутренними метриками. Мы приводим формулировки как в терминах оснащенных градуированных графов, так и в терминвх проективных пределов симлексов, натянутых на вершины этажей графов.

Начнем с определения важной топологичечкой операции, которой будем неоднократно пользоваться, – операции "переноса метрики".

Пусть задано метрическое пространство $(X, \rho_X)$ и его измеримое (в борелевском смысле) отображение $\phi : X \to Y$ в некоторое борелевское пространство $Y$; предположим, что на прообразах точек $\phi^{-1}(y)$, $y \in \phi(X) \subset Y$, заданы вероятностные борелевские меры $\nu_y$, борелевски зависящие от $y$; назовем такое отображение $\phi$ *оснащенным*.

**Определение 4.** *Переносом метрики $\rho$, заданной на пространстве $X$, на пространство $Y$ вдоль оснащенного отображения*

$$\phi : X \to Y$$

*называется метрика $\rho_Y$ на борелевском пространстве $Y$, определяемая формулой*

$$\rho_Y(y_1, y_2) = k_{\rho_X}(\nu_{y_1}, \nu_{y_2}),$$

*где $k_\rho$ означает классическую метрику Канторовича на борелевских вероятностных мерах на пространстве $(X, \rho)$.*

1. Рассмотрим оснащенный граф $(\Gamma, \Lambda)$ и соответствующий проективный предел симплексов $\Sigma_\infty(\Gamma)$. Зададим произвольную метрику $\rho = \rho_1$ на пространстве $T(\Gamma)$ путей графа, согласованную с канторовской топологией на $T(\Gamma)$; обозначим через $k_{\rho_1}$ метрику Канторовича на симплексе $\Delta(\Gamma)$ всех вероятностных борелевских мер на $T(\Gamma)$, соответствующую метрике $\rho_1$ (см. определение ниже).

2. Рассмотрим произвольный путь $v \equiv \{v_n\}$, сопоставим ему конечное множество путей $v(u) = \{u, v_2, \dots\}$, координаты которых, начиная со второй, совпадают с соответствующими координатами пути $v$, и припишем каждому из таких путей меру $\lambda^u_{v_2}$. Мы определили оснащенное отображение $\phi_1 : T(\Gamma) \to \Delta(\Gamma) = \Delta_1$, сопоставляющее пути

меру $\sum_{u:u\prec v_2} \lambda_{v_2}^u \delta v(u)$. Удобнее считать, что это отображение симплекса $\Delta(\Gamma)$ в себя, сопоставив пути $\delta$-меру на нём.

Применим к оснащенному отображению $\phi_1$ операцию переноса метрики и получим некоторую метрику $\rho_2$ на подмножестве $\Delta_2 = \phi(\Delta_1)$ симплекса $\Delta(\equiv \Delta_1(\Gamma))$.

3. Аналогично определим отображение $\phi_2$, сопоставляя каждой мере из $\Delta_2$, сосредоточенной на путях вида $\{u_1, v_2, \dots\}$, $u_1 \prec v_2$, меру на конечной совокупности путей вида $\{u_1, u_2, v_3, \dots\}$, координаты которых, начиная с третьей, совпадают с координатами $v_i$, а вторая координата $u_2$ пробегает все вершины $u_2 \prec v_3$, с вероятностями $\lambda_{v_3}^{u_2}$. Снова применим операцию переноса метрики $\rho_2$ с пространства $\Delta_2$ и получим метрику $\rho_3$ на образе $\Delta_3 \equiv \phi_2(\Delta_2) = \phi_2\phi_1(\Delta)$.

Обратим внимание на то, что образы отображений $\phi_n$, т.е. множества $\Delta_n$, – симплексы, но их вершины – уже не $\delta$-меры на пространстве путей, а меры с конечными носителями вида $\sum_{u_1,u_2,\dots,u_k} \lambda_{u_2}^{u_1} \cdots \lambda_{v_{k+1}}^{u_k} \cdot \delta_{u_1,\dots,u_k,v_{k+1},\dots}$. Само определение симплексов $\Delta_n$ не зависит от метрик $\rho_n$.

4. Продолжая этот процесс бесконечно, мы получим бесконечную последовательность метрик на убывающей последовательности симплексов

$$\Delta_n = \phi_{n-1}(\Delta_{n-1}) = \phi_n\phi_{n-1}\dots\phi_1(\Delta_1),$$
$$\Delta = \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \dots, \quad \bigcap_n \Delta_n = \Delta_\infty.$$

Таким образом, мы получаем последовательность оснащенных отображений убывающей последовательности симплексов:

$$\Delta_1 \to \Delta_2 \to \dots \to \Delta_n \to \dots \to \Delta_\infty.$$

Отметим сначала утверждение, не использующее метрику.

**Предложение 5.** *Пересечение $\Delta_\infty$ всех симплексов $\Delta_n$ состоит в точности из тех мер на множестве путей $T(\Gamma)$ (т.е. тех точек симплекса всех мер $\Delta(\Gamma)$), которые имеют данные копереходные вероятности (данный коцикл), и, следовательно, это пересечение совпадает с проективным пределом симплексов:*

$$\Delta_\infty = \Sigma_\infty(\Gamma).$$

Более существен следующий факт.

**Теорема 1.** *Существует предел* $\lim_{n\to\infty}\rho_n = \rho_\infty$ *метрик на пространстве* $\Delta_\infty(=\Sigma_\infty(\Gamma))$. *Предельный симплекс* $\Sigma_\infty(\Gamma)$, *снабженный этой метрикой, вообще говоря, уже не является компактом, и поэтому метрика* $\rho_\infty$ *не порождает топологию проективного предела.*

**Доказательство.** Мы дадим явное описание предельной "внутренней" метрики, используя более подробную информацию о метриках $\rho_n$. Для этого надо напомнить определение метрики Канторовича между мерами и понятие каплинга (стыковки), которое фактически используется в определении переноса метрик.

**Определение 5.** *Каплингом двух вероятностных борелевских мер* $\mu_1,\mu_2$, *заданных на двух (вообще говоря, различных) борелевских пространствах* $X_1, X_2$, *называется произвольная борелевская мера* $\psi$ *на произведении этих пространств* $X_1\times X_2$, *проекции которой на сомножители* $X_1, X_2$ *совпадают с заданными мерами. Множество всех каплингов для данных мер обозначим через* $\Psi(\mu_1,\mu_2)$. *(Другие названия: "бистохастическая мера", "полиморфизм", "мера Юнга", "соответствие", и т.д.)*

*Метрика Канторовича на симплексе мер в метрическом пространстве* $(X,\mu)$ *определяется следующим образом:*

$$k_\rho(\mu_1,\mu_2)=\inf\left\{\int\limits_{X\times X}\rho(x_1,x_2)\,d\psi(x_1,x_2) : \psi\in\Psi(\mu_1,\mu_2)\right\}.$$

Выше мы определяли метрики (т.е. расстояния между мерами) рекурсивно по $n$, применяя каждый раз каплинг. Но можно сделать то же самое единообразно, соединив все условия на последовательные каплинги. Для бесконечного случая это сразу даст формулу для предельной метрики.

Предположим, что в предыдущем определении метрическое пространство $X$ снабжено последовательностью оснащенных отображений

$$X=X_1\to X_2(\subset X_1)\to X_3(\subset X_2)\to\cdots\to X_n(\subset X_{n-1})$$

(здесь $n$ конечно или бесконечно; во втором случае вместо последнего пространства стоит пересечение $\bigcap_n X_n \equiv X_\infty$) и мы хотим определить расстояние между мерами на последнем пространстве последовательности ($X_n$ или $X_\infty$). Это в точности наша ситуация, где пространства $X_n = \Delta_n$ – это симплексы, определенные с помощью отображений, заменяющих начальный отрезок пути на меру, распределенную на начальных отрезках. Формула остается той же, что и в классическом случае, – различие в том, что понимается под каплингом:

$$K_n(\mu_1, \mu_2) = \inf \left\{ \int\limits_{X \times X} \rho(x_1, x_2)\, d\psi(x_1, x_2) : \psi_n \in \Psi_n (\text{или } \in \Psi_\infty) \right\}.$$

Здесь каплинг $\psi_n$ пробегает множество $\Psi_n$, состоящее из мер на произведении $X \times X$ не просто с заданными проекциями, но таких, что их проекции на каждую компоненту согласованы со структурой последовательности проекций самого пространства $X = X_1 \to X_2 \to \dots$. Иначе говоря, при всех $n$ каплинг $\psi_n$ есть смесь каплингов $\psi_{n-1}$ – в этом жестком ограничении отличие от обычной процедуры. Тем самым, формула выше корректно определяет все метрики, включая предельную на симплексе $\Delta_\infty = \Sigma_\infty(\Gamma)$.

Хотя предельная внутренняя метрика зависит от начальной метрики, тем не менее формула показывает также, что топология, задаваемая предельной метрикой, одна и та же для всех начальных метрик, согласованных с топологией симплекса. □

### 4.2. Стандартность.

**Определение 6.** *Оснащенный граф* $(\Gamma, \Lambda)$*, равно как и проективный предел симплексов* $\lim_n(\Sigma, \pi_{n,m})$*, называются стандартными, если предельный симплекс мер* $\Sigma_\infty$*, снабженный внутренней метрикой, есть компакт. В этом и только в этом случае топология проективного предела совпадает с внутренней топологией.*

*Граф (неоснащенный) назовем стандартным, если предельный симплекс центральных мер компактен во внутренней метрике. Стандартность или нестандартность оснащенного графа зависит, вообще говоря, от оснащения (т.е. от системы* $\Lambda$*).*

Это определение обобщает определение стандартности графа, данное в [3]: стандартный граф в прежнем смысле стандартен в смысле определения, данного выше. Точнее, если мы ограничим приведенное выше определение на пространства путей длины $n$, рассматриваемых как последовательности вершин, то мы получим определение из [3]. Можно сказать, что новое определение есть линеаризация (перенос на линейные комбинации) прежнего определения. Это можно сформулировать и так: мы рассматриваем (вместо вершин данного этажа графа) меры на множествах путей, идущих в эти вершины, с данными копереходными вероятностями. Поэтому все метрики и их предел определяются на множествах мер (а не на множестве вершин), что дает естественную общность определению, снимая предположенные ранее ограничения на граф. В практическом плане, конечно, удобнее проверять стандартность, рассматривая вершины (диаграммы), когда это возможно.

Пример графа с некомпактной внутренней метрикой приведен в [3]; повторим лишь, что это, например, граф неупорядоченных пар, связанный с понятием башни мер.

Отметим без доказательства основные факты, часть из которых при дополнительных предположениях была приведена в [3].

1. Для стандартного графа (проективного предела симплексов) любая эргодическая мера на путях обладает свойством концентрации, т.е. для любого $\epsilon > 0$ при всех достаточно больших $n$ вершины $n$-го этажа, лежащие на множестве путей меры $> 1 - \epsilon$, содержатся в некотором шаре радиуса не больше $\epsilon > 0$ в смысле внутренней метрики (это свойство называется свойством “limit shape”). Это дает возможность искать все эргодические меры для стандартных оснащенных графов как пределы по путям во внутренней метрике (а не как слабые пределы, согласно эргодическому методу). Для нестандартной ситуации такое усиление эргодического метода невозможно – в этом случае слабых пределов мер на путях фактически больше, чем пределов во внутренней метрике.

2. Хвостовая фильтрация на множестве путей стандартного графа относительно любой эргодической меры стандартна в метрическом смысле. (Определения стандартной фильтрации и критерий стандартности в метрической категории см. в [2].)

3. Наиболее важный факт, повторяющий в топологической ситуации теорему о лакунарном изоморфизме [1], таков.

**Теорема 2** (Теорема о лакунаризации). *Для любого оснащенного графа* $(\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n, \Lambda)$ *(соответственно для любого проективного предела симплексов* $\lim_n\{\Sigma_n, \{\pi_{n,m}\}_{n,m}\}$*) можно выбрать такую подпоследовательность натуральных чисел* $n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *что оснащенный мультиграф* $\Gamma' = \bigcup_k \Gamma_{n_k}$, *полученный вычеркиванием всех этажей между* $n_k$ *и* $n_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, *и сохранением всех путей между ними (соответственно проективный предел* $\lim_k\{\Sigma_{n_k}, \{\pi'_{k,s}\}_{k,s}\}$ *с укрупненной системой проекций* $\pi'_{k,s}$, *где*

$$\pi'_{k,k+1} = \prod_{i=n_k}^{i=n_{k+1}-1} \pi_{i,i+1})$$

*является стандартным.*

Это означает, что стандартность есть свойство проективного предела, а не предельного симплекса: изменение (укрупнение) аппроксимации меняет внутреннюю топологию и может сделать ее эквивалентной топологии проективного предела, хотя до укрупнения они были различны.

Взаимоотношения стандартности и брауэровости предельного симплекса нуждаются в дальнейшем исследовании.

## Литература

1. А. М. Вершик, *Теорема о лакунарном изоморфизме монотонных последовательностей разбиений.* — Функц. анал. и его прил. **2**, вып. 3, 17–21 (1968).
2. А. М. Вершик, *Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений.* — Алгебра и анализ **6**, вып. 4, 1–68 (1994).
3. А. М. Вершик, *Задача описания центральных мер на пространствах путей градуированных графов.* — Функц. анал. и его прил. **48**, вып. 4, 26–46 (2014).
4. А. М. Вершик, *Внутренняя метрика на градуированных графах, стандартность и инвариантные меры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **421**, 58–67 (2014).
5. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и* $K_0$*-функтор.* — В сб.: Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., т. 26, ВИНИТИ, М., 1985, сс. 3–56.
6. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы.* — Функц. анал. и его прил. **19**, вып. 1, 25–36 (1985).
7. Е. Б. Дынкин, *Пространство выходов марковского процесса.* — Успехи мат. наук **24**, вып. 4 (148), 89–152 (1969).
8. F. M. Goodman, S. V. Kerov, *The Martin boundary of the Young–Fibonacci lattice.* — J. Algebraic Combin. **11**, No. 1, 17–48 (2000).

9. V. Kaimanovich, A. Vershik, *Random walks on discrete groups: Boundary and entropy.* — Ann. Prob. **11**, No. 3, 457–490 (1983).
10. S. V. Kerov, *Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Applications in Analysis.* Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2003.
11. S. Kerov, A. Okounkov, G. Olshanski, *The boundary of the Young graph with Jack edge multiplicities.* — Int. Math. Res. Not. **1998**, No. 4, 173–199 (1998).
12. A. Vershik, *Smooth and non-smooth AF-algebras and a problem on invariant measures.* — To appear in Proceedings of the St. Petersburg School in Probability and Statistical Physics (June 2012).

Vershik A. M. Equipped graded graphs, projective limits of simplices, and their boundaries.

In this paper, we develop a theory of equipped graded graphs (or Bratteli diagrams) and an alternative theory of projective limits of finite-dimensional simplices. An equipment is an additional structure on the graph, namely, a system of "cotransition" probabilities on the set of its paths. The main problem is to describe all probability measures on the path space of the graph with given cotransition probabilities; it goes back to the problem, posed by E. B. Dynkin in the 1960s, of describing exit and entrance boundaries for Markov chains. The most important example is the problem of describing all central measures; those of describing states on AF-algebras or characters on locally finite groups can be reduced to it. We suggest an unification of the whole theory, an interpretation of the notions of Martin, Choquet, and Dynkin boundaries in terms of equipped graded graphs and in terms of the theory of projective limits of simplices. In the last section, we study the new notion of "standardness" of projective limits of simplices and of equipped Bratteli diagrams, as well as the notion of "lacunarization."

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023 С.-Петербург;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича,
Москва, Россия
*E-mail*: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило 17 января 2015 г.