

Н. Н. Васильев, А. Б. Терентьев

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕР, БЛИЗКИХ К ЦЕНТРАЛЬНЫМ, НА ТРЕХМЕРНОМ ГРАФЕ ЮНГА

§1. ВВЕДЕНИЕ

В асимптотической комбинаторике обычных двумерных диаграмм Юнга особую роль играет марковский процесс, который называется процессом планшерелевского роста. Он обладает так называемым свойством центральности, которое заключается в том, что вероятность пути между двумя диаграммами Юнга зависит только от начальной и конечной диаграмм, но не от самого пути. При этом в двумерном случае при помощи формулы крюков легко получить как точное количество путей, ведущих в заданную диаграмму, так и вероятности самих диаграмм. Вероятность диаграммы в этом случае оказывается прямо пропорциональной квадрату количества таблиц Юнга, задаваемых этой диаграммой. Это распределение на диаграммах Юнга называется планшерелевским распределением и обладает многими другими замечательными свойствами, изученными в работах А. М. Вершика и С. В. Керова. В частности, известна предельная форма для таких диаграмм, а также асимптотика количества таблиц Юнга в планшерелевском процессе. Тем не менее в случае трехмерного графа Юнга пока не удается построить в явном виде марковский процесс, порождающий центральную меру и являющийся обобщением планшерелевского процесса на случай трехмерных диаграмм.

В данной статье мы определяем специальный марковский процесс на трехмерных диаграммах Юнга: хотя он и не является центральным, но вычислительные эксперименты показывают, что для него отношения переходных вероятностей для пар путей фиксированной длины, соединяющих две большие трехмерные диаграммы Юнга, довольно быстро приближаются к 1 с ростом количества клеток начальной диаграммы. Это условие мы называем асимптотической центральностью.

Ключевые слова: диаграммы Юнга, трехмерный граф Юнга, центральная мера, предельная форма диаграмм.

Работа первого автора поддержана грантом РФФ 14-11-00581.

Кроме того, можно показать, что предельные кривые, ограничивающие фронт диаграммы на двумерных координатных плоскостях, имеют точную планшерелевскую форму. В описанных экспериментах использовались начальные диаграммы с десятками и сотнями тысяч клеток, а переходные вероятности вычислялись на путях длины порядка корня кубического из количества клеток начальной диаграммы.

§2. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МЕРЫ

2.1. Центральные меры.

Определение. *Центральной мерой на графе Юнга $G = (V, A)$ называется вероятностная мера на пространстве путей графа G , удовлетворяющая следующему условию. Для любой цепочки*

$$\lambda^{(0)} \nearrow \lambda^{(1)} \nearrow \dots \nearrow \lambda^{(n)} = \lambda$$

мера всех путей, первые $n + 1$ вершин которых суть $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(n)}$, зависит только от λ и не зависит от $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(n-1)}$ [2].

Определение. *Переходными вероятностями для центральной меры на G называется набор чисел*

$$p(\lambda, \Lambda) = P\{\lambda^{(n+1)} = \Lambda | \lambda^{(n)} = \lambda\} = \frac{\mu\{\lambda^{(n+1)} = \Lambda | \lambda^{(n)} = \lambda\}}{\mu\{\lambda^{(n)} = \lambda\}}.$$

Таким образом определенные переходные вероятности определяют марковский процесс на графе Юнга, удовлетворяющий следующему свойству: вероятность попадания в некоторую диаграмму через n шагов по различным путям одинакова. Заметим, что таблица Юнга для диаграммы λ соответствует пути из начальной вершины в графе Юнга (рис. 1), то есть задает историю роста диаграммы. Все центральные меры на двумерном графе Юнга полностью описаны в статье [1]. Замечательный марковский процесс, соответствующий так называемому случаю нулевых частот, – это построенный и изученный А. М. Вершиком и С. В. Керовым процесс Планшереля.

2.2. Мера Планшереля. Будем обозначать таблицы Юнга с помощью ориентированных путей в графе Юнга (λ_0 – пустая диаграмма):

$$t = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Обозначим через $T(\lambda)$ множество таблиц Юнга с последней диаграммой λ ; в таком случае говорят, что таблица *имеет форму* λ .

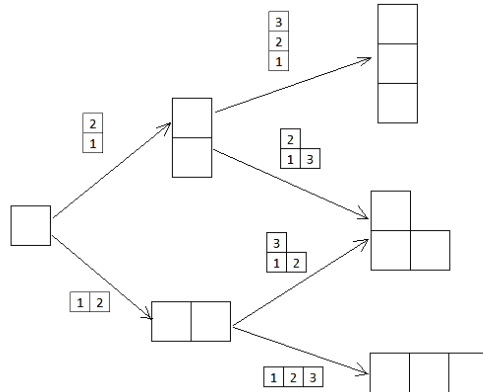


Рис. 1. Соответствие таблиц Юнга путям в графе Юнга.

Определим также множество всех бесконечных таблиц Юнга:

$$T = \{t = (\lambda_0, \dots, \lambda_n, \dots)\}.$$

Определим марковскую цепь на графе Юнга, которую будем называть *процессом планшерелевского роста*.

Возможными состояниями цепи будут диаграммы Юнга, а возможные переходы задаются дугами графа Юнга. Тогда вероятность добавления в диаграмму λ клетки $v(x, y) \in V(\lambda)$ в этом случае будет равна

$$p(\lambda, v) = p(\lambda, x, y) = \prod_{i=0}^{x-1} \frac{h(\lambda, i, y)}{h(\lambda, i, y) + 1} \prod_{j=0}^{y-1} \frac{h(\lambda, x, j)}{h(\lambda, x, j) + 1}.$$

Клетки, в которых вычисляются длины крюков, показаны на рисунке 2.

Для всех диаграмм Юнга λ и всех клеток $v(x, y) \in V(\lambda)$ имеем ([3]):

$$\begin{cases} p(\lambda, v) > 0, \\ \sum_{i=1}^{|V(\lambda)|} p(\lambda, v) = 1. \end{cases}$$

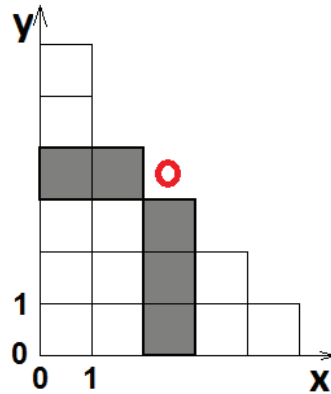


Рис. 2. Клетки, в которых вычисляются значения длин крюков для определения вероятности добавляемой клетки (обозначена кружочком).

Так определенная марковская цепь задает в пространстве T бесконечных таблиц Юнга вероятностную меру M , называемую мерой Планшереля. Вероятность диаграммы λ из n клеток по этой мере равна ([3])

$$p(\lambda) = \frac{\dim^2(\lambda)}{n!}.$$

Здесь $\dim(\lambda)$ – количество таблиц Юнга для диаграммы λ . Известно, что мера Планшереля является центральной [3].

2.3. Асимптотически центральные меры. Полное описание всех центральных мер на двумерном графе Юнга и свойства меры Планшереля глубоко связаны с асимптотической теорией представлений для симметрических групп $S(N)$ [1]. Подобные связи не известны в случае трехмерного графа Юнга. Также в трехмерном случае не известен аналог классической формулы крюков, позволяющей вычислять точное количество путей к заданной диаграмме, то есть количество таблиц Юнга заданной формы. До сих пор также не найдено естественного обобщения меры Планшереля на случай трехмерных диаграмм, однако предположительно должен существовать единственный

марковский процесс, соответствующий уже трехмерному случаю нулевых частот (А. М. Вершик). С этой точки зрения представляется интересным изучать марковские процессы, порождающие меры, в определенном смысле близкие к центральным.

Определение. *Асимптотически центральной мерой называется вероятностная мера на путях в графе Юнга, такая, что*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > N, \forall \lambda_1 \in Y_n, \forall \lambda_2 \in Y_{n+k}$$

выполняется неравенство (здесь $p_1(\lambda_1, \lambda_2), p_2(\lambda_1, \lambda_2)$ – вероятности двух любых различных путей из λ_1 в λ_2)

$$\left| \frac{p_1(\lambda_1, \lambda_2)}{p_2(\lambda_1, \lambda_2)} \right| < 1 + \epsilon.$$

В этом определении, в принципе, можно было бы ограничиться двучленными путями, то есть вместо произвольного k взять $k = 2$, однако такая формулировка дает возможность усилить это свойство асимптотической центральности, сделав k зависящим от N .

2.4. Специальный марковский процесс на трехмерных диаграммах. Исследуемая мера на путях в трехмерном графе Юнга порождается марковским процессом, переходные вероятности в котором были получены обобщением переходных вероятностей меры Планшереля (функция длин крюков h в данном случае – это длина трехмерного крюка клетки в диаграмме):

$$f(\lambda, x, y, z) = \prod_{i=0}^{x-1} \frac{h(\lambda, i, y, z)}{h(\lambda, i, y, z) + 1} \prod_{j=0}^{y-1} \frac{h(\lambda, x, j, z)}{h(\lambda, x, j, z) + 1} \prod_{k=0}^{z-1} \frac{h(\lambda, x, y, k)}{h(\lambda, x, y, k) + 1}.$$

Функция $f(\lambda, x, y, z)$ в таком виде уже не задает вероятности добавления той или иной клетки напрямую, так как сумма её значений по всем возможным для добавления клеткам не равна тождественно единице. Тем не менее она может использоваться в качестве весовой функции для определения вероятностей. Сама функция $f(\lambda, x, y, z)$ удовлетворяет следующему свойству мультипликативности для двучленных путей:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda', \lambda'' : \begin{cases} \lambda_1 \nearrow \lambda' \\ \lambda_1 \nearrow \lambda'' \\ \lambda' \nearrow \lambda_2 \\ \lambda'' \nearrow \lambda_2 \end{cases} f(\lambda_1, \lambda') * f(\lambda', \lambda_2) = f(\lambda_1, \lambda'') * f(\lambda'', \lambda_2).$$

После нормировки это свойство нарушается, что приводит к тому, что данный процесс уже не определяет центральную меру.

Мы исследовали марковский процесс с таким образом определенными нормированными значениями переходных вероятностей. Основной вопрос, который изучался в серии вычислительных экспериментов, – насколько отличаются вероятности путей фиксированной длины, соединяющих две достаточно большие трехмерные диаграммы. Таким образом мы пытаемся получить экспериментальное подтверждение асимптотической центральности этого процесса. Типичные количества клеток начальных диаграмм в этой серии вычислительных экспериментов выбирались в диапазоне от 1 до 100000 (в отдельных экспериментах – до 1000000). Длина исследуемых путей обычно была порядка 100, то есть значение k мы здесь брали порядка $O(N^{1/3})$.

§3. ОПИСАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Основной целью проводимых вычислений являлась экспериментальная проверка условия асимптотической центральности построенной меры. Эксперименты заключались в моделировании блуждания, соответствующего исследуемому марковскому процессу, и сравнения вероятностей различных путей. Каждый путь представляет собой последовательность клеток, соответственно, вероятность его является произведением соответствующих вероятностей:

$$P_{p_1, p_n} = \prod_{i=1}^n p_i.$$

Однако для улучшения точности отношения вероятностей путей считались следующим образом: находились поэлементные отношения переходных вероятностей соответствующих путей, после этого полученные отношения перемножались. Такой способ позволял уменьшить значительные потери точности, связанные с перемножением малых величин:

$$\frac{P_k}{P_j} = \prod_{i=1}^n \frac{P_{k_i}}{P_{j_i}}.$$

В программе для моделирования марковских процессов диаграммы хранились в виде списка вершин дополнения – точек-кандидатов на добавление.

Для исследования асимптотической центральности меры проводились следующие виды экспериментов.

Исследование типичных путей. В данной серии экспериментов генерируются две случайные диаграммы $\lambda_1, \lambda_2 : \lambda_1 \nearrow^n \lambda_2$; здесь n – длина исследуемых путей, диаграмму λ_1 будем называть *начальной*, а диаграмму λ_2 *конечной*. Далее моделируется множество марковских процессов роста из начальной диаграммы в конечную и запоминаются соответствующие пути. После чего один из путей выбирается в качестве эталонного, и находятся отношения вероятностей остальных путей к его вероятности. В процессе генерации путей вероятности клеток, которые не принадлежат конечной диаграмме, помечаются как нулевые. Сформированные таким образом пути являются путями между начальной и конечной диаграммами.

Algorithm 1 GenPathsProbs Псевдокод функции генерации относительных вероятностей путей

```

1: Вход:  $n_1, n_2, count \in \mathbb{N}, n_1 < n_2$ 
2:  $n_1$  - количество клеток в начальной диаграмме  $\lambda_1$ 
3:  $n_2$  - количество клеток в начальной диаграмме  $\lambda_2$ 
4:  $count$  - количество путей, которые необходимо генерировать
5:  $weights$  - весовая функция
6: Алгоритм:
7:  $\lambda_1 \leftarrow GenRndDiagram(n_1)$            ▷ генерируем произвольную
   диаграмму из  $n_1$  клеток
8:  $\lambda_2 \leftarrow GenRndDiagram(n_2)$            ▷ генерируем произвольную
   диаграмму из  $n_2$  клеток
9:  $paths[1..count]$                                ▷ пути из  $\lambda_1$  в  $\lambda_2$ 
10:  $paths[1] \leftarrow GenRndPath(\lambda_1, \lambda_2, weights)$    ▷ генерируем путь -
   образец
11: for all  $i \in 2 \dots count$  do
12:    $paths[i] \leftarrow GenRndPath(\lambda_1, \lambda_2, weights)$ 
13:   print  $Prob(paths[1], paths[i])$            ▷ выводим отношение
   вероятностей путей
14: end for

```

Исследование лексикографически упорядоченных путей.

Для изучения отношения вероятностей не только на типичных путях мы исследуем более широкий класс путей, чем только те, которые

Algorithm 2 GenRndDiagram Псевдокод функции генерации случайной диаграммы

```

1: Вход:  $n \in \mathbb{N}$  - количество клеток
2: Выход: случайная диаграмма из  $n$  клеток
3: Алгоритм:
4:  $\lambda \leftarrow Cell()$   $\triangleright$  начальная диаграмма состоит из одной клетки
5: for  $i = 2$  to  $n$  do
6:    $size \leftarrow Size(Complement(\lambda))$   $\triangleright$  Мы храним диаграмму в виде
     списка точек дополнения
7:    $Grow(\lambda, Rnd(size))$   $\triangleright$  Будем случайно добавлять одну из них
8: end for
9: return  $\lambda$ 

```

Algorithm 3 GenRndPath Псевдокод функции генерации пути между диаграммами

```

1: Вход:
2:  $\lambda_1, \lambda_2$  - начальная и конечная диаграммы
3:  $weights$  - весовая функция
4: Выход: переходные вероятности на пути из  $\lambda_1$  в  $\lambda_2$ 
5: Алгоритм:
6:  $\lambda \leftarrow \lambda_1$   $\triangleright$  начальная диаграмма  $\lambda_1$ 
7:  $path$ 
8: for  $i = 2$  to  $n$  do
9:    $size \leftarrow Size(Complement(\lambda))$   $\triangleright$  Добавляем точку, которая
     принадлежит  $\lambda_2$ ,
10:   $cell = Grow(\lambda, Rnd(size, weights, \lambda_2))$   $\triangleright$  выбранную
     пропорционально весам  $weights$ 
11:   $path[i - 1] = weights(cell)$   $\triangleright$  Добавляем вероятность новой
     точки в путь
12: end for
13: return  $path$ 

```

генерируются в исследуемом процессе с вероятностью, близкой к 1. Произвольный путь в графе Юнга соответствует некоторому произвольному линейному упорядочению точек целочисленной решетки. Мы выделяем двупараметрическое семейство таких линейных порядков.

Эти линейные порядки являются взвешенными лексикографическими упорядочениями. Отсюда получается следующий метод.

• Выбираются две типичные по тестируемой мере диаграммы λ_1, λ_2 : $\lambda_1 \not\prec^n \lambda_2$. Далее, строится симплекс $0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1 - u$, и на каждой его точке задается функция

$$w_{u,v}(x, y, z) = ux + vy + (1 - u - v)z.$$

• Для каждой точки этого симплекса строятся пути из первой диаграммы во вторую, при этом добавляется точка с наименьшим значением весовой функции, но вероятность ее берется равной соответствующей переходной вероятности в исследуемом нами процессе. Таким образом задается соответствие разных путей точкам симплекса (u, v) .

В качестве эталонного берется путь со значениями $u = 1/3; v = 1/3$, и считаются отношения всех путей к образцу, после чего строится поверхность, характеризующая отношения путей. Эта поверхность является графиком функции, сопоставляющей точке симплекса отношение вероятности соответствующего ей пути к вероятности эталонного пути.

Algorithm 4 GenRndPath Псевдокод функции генерации пути между диаграммами

```

1: Вход:
2:  $\lambda_1, \lambda_2$  - начальная и конечная диаграммы
3:  $weights$  - весовая функция
4: Выход: переходные вероятности на пути из  $\lambda_1$  в  $\lambda_2$ 
5: Алгоритм:
6:  $\lambda \leftarrow \lambda_1$   $\triangleright$  начальная диаграмма состоит из одной клетки
7: for  $i = 1$  to  $Size(\lambda_2) - Size(\lambda_1)$  do
8:    $size \leftarrow Size(Complement(\lambda))$ 
9:    $(u, v) = GenUV(i, n)$   $\triangleright$  Получаем соответствующие точки из
      сетки
10:    $cell = GrowUV(\lambda, Rnd(size, \lambda_2, (u, v)))$   $\triangleright$  Добавляем нужную
      точку с помощью функции по координатам  $(u, v)$ 
11:    $path[i - 1] = weights(cell)$   $\triangleright$  Добавляем вероятность новой
      точки в путь
12: end for
13: return  $path$ 

```

§4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Все эксперименты проводились для различных значений длин путей и количества клеток начальных диаграмм.

Количество клеток начальной диаграммы	Среднее значение	Дисперсия
1	7.931	616.028
10000	0.843	0.010
20000	0.853	0.006
30000	0.994	0.006
40000	1.057	0.003
50000	0.998	0.001
100000	1.042	0.001

Таблица 1. Средние значения и дисперсии 100 отношений вероятностей путей длины 100 для стартовых диаграмм с различным количеством клеток.

4.1. Вероятности на типичных путях. Результаты, представленные в этой таблице, показывают, что отношения вероятностей двух путей длины 100 довольно быстро приближаются к 1 с ростом количества клеток начальной диаграммы. Для количества клеток, равного 100000, эти отношения обычно не превышают 1.05. Причем стоит заметить, что для начальных диаграмм с небольшим количеством клеток отношения вероятностей очень велики. Это показывает асимптотический характер приближения к центральности, а также тот факт, что этот эффект трудно заметить, изучая начальные этажи трехмерного графа Юнга.

Для выравнивания отношений вероятностей путей длины 1000 требуются еще большие значения количества клеток в начальных диаграммах.

4.2. Вероятности для лексикографических путей. На рисунке 3 представлена поверхность для меры, полученной обобщением функции переходных вероятностей меры Планшереля из диаграммы в 50000 клеток для путей длины 100 и 1000. Для путей длины 1000 использовались логарифмы отношений.

Количество клеток начальной диаграммы	Среднее значение	Дисперсия
1	58.620	174250
10000	4.487	134.342
20000	4.823	140.252
30000	0.470	0.451
40000	0.410	0.387
50000	0.802	0.874
100000	3.146	10.371

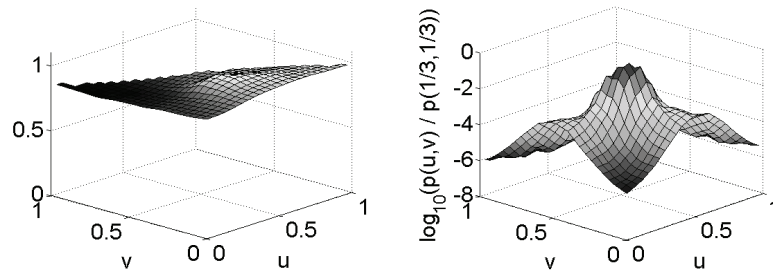
Таблица 2. Средние значения и дисперсии 100 отношений вероятностей путей длины 1000 для стартовых диаграмм с различным количеством клеток.

Количество клеток начальной диаграммы	Среднее значение	Дисперсия
1	$5.28 * 10^{22}$	$1.32 * 10^{40}$
10000	2.013	0.536
20000	1.632	0.366
30000	1.374	0.223
40000	1.273	0.192
50000	1.190	0.165
100000	1.056	0.125

Таблица 3. Средние значения и дисперсии для 10 поверхностей из 100 точек, построенных для путей длины 100 для стартовых диаграмм с различным количеством клеток.

§5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные выше результаты вычислительных экспериментов дают повод выдвинуть предположение о том, что исследованный марковский процесс порождает в строгом смысле асимптотически центральную меру. Отдельные вычислительные эксперименты, проведенные авторами с диаграммами, содержащими значительно больше 100000



(a) Длина пути 100.

(b) Длина пути 1000. Логарифмы отношений.

Рис. 3. Графики отношений вероятностей лексикографических путей, параметризованных точками симплекса, к вероятности эталонного пути на путях длины 100 и 1000.

клеток, показывают, что выравнивание вероятностей длин путей между далекими диаграммами дальше проявляется еще отчетливее. Кроме описанных выше экспериментов мы также изучали асимптотики вероятностей длин путей в этом процессе. В двумерном случае подобные асимптотики связаны с асимптотикой количества таблиц Юнга. Возможно, такая же связь имеет место и в трехмерном случае. В двумерном случае эти асимптотики связаны с асимптотическим поведением типичных и максимальных весов неприводимых представлений симметрической группы. Вычислительные эксперименты по проверке гипотез о росте типичных и максимальных весов неприводимых представлений описаны в [4]. Исследованный нами трехмерный процесс обладает также еще одним интересным свойством, которое известно для двумерного планшерелевского процесса. Если рассмотреть однопараметрическое семейство марковских процессов, зависящее от параметра α , возводя описанные выше переходные вероятности в степень α и используя их в качестве весов для получения новых переходных вероятностей, то, как показывают наши вычислительные эксперименты, в этом семействе сохраняется предельная форма диаграмм.

Предельный случай, соответствующий выбору значения $\alpha = \infty$, соответствует выбору на каждом шаге ребра в графе Юнга с максимальной вероятностью. Соответствующие предельные формы можно увидеть на следующих рисунках.

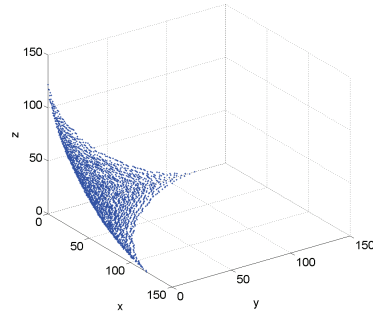


Рис. 4. Форма типичной по обобщенной мере диаграммы из 100000 клеток.

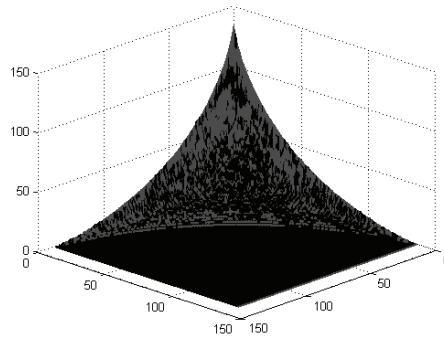


Рис. 5. Взаимное расположение типичной по обобщенной мере диаграммы и диаграммы, сгенерированной при помощи выбора клеток с максимальной вероятностью. Размеры диаграмм – 100000 клеток, сгенерированы они были из одной и той же диаграммы в 1000 клеток.

На рис. 4 представлена типичная форма диаграммы из 100000 клеток, генерируемой в исследуемом процессе. Соответствующая поверхность ограничена на координатных плоскостях точными плашерелевскими кривыми.

На рис. 5 на одном графике нарисованы сразу две диаграммы из 100000 точек. Серые точки принадлежат фронту диаграммы из описанного здесь псевдоплашерелевского процесса, а черные соответствуют фронту диаграммы из процесса с $\alpha = \infty$. Легко видеть, что соответствующие поверхности практически совпадают. Можно даже предположить, что такая предельная форма совпадает с предельной формой гипотетического единственного центрального процесса с нулевыми частотами в трехмерном случае. Результатам исследования асимптотического поведения вероятностей путей, предельных форм и поперечников диаграмм для процессов на трехмерном графе Юнга будет посвящена отдельная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы*. — Функц. анализ и его прил. **15**, вып. 4 (1981), 15–27.
2. А. М. Бородин, *Мультипликативные центральные меры на графе Шура*. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **240** (1997), 44–52.
3. С. В. Керов, *Дифференциальная модель роста диаграмм Юнга*. — Труды С.-Петербургского мат. общества **V** (1996), 165–192.
4. А. М. Вершик, Д. Павлов, *Численные эксперименты в задачах асимптотической теории представлений*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **373** (2009), 77–93.

Vasiliev N. N., Terent'ev A. B. Modelling of measures close to central ones on the three-dimensional Young graph.

We describe some computer experiments with 3D Young diagrams for modelling a Markov process whose properties are close to those of the Plancherel growth process in the two-dimensional case. The transition probabilities of this process are defined by formulas that use the lengths of 3D hooks. These formulas were obtained by generalizing well-known formulas for the Plancherel growth process probabilities. Although this 3D Markov

process does not generate a central measure, we show that this measure is close to a central one.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
С.-Петербург 191023, Россия
E-mail: nn.vasiliev@gmail.com

Поступило 3 декабря 2014 г.

С.-Петербургский
государственный политехнический
университет,
ул. Политехническая, д. 29,
С.-Петербург 195251, Россия
E-mail: alterterrific@gmail.com