Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

С. В. Цыкин

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ ОЖИДАНИЯМИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

§1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u\,(x,t)\,, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geqslant 0$, а σ – комплекснозначный параметр, удовлетворяющий условию $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$.

Для уравнения (1) поставим задачу Коши

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,. \tag{2}$$

При вещественном σ уравнение (1) является уравнением теплопроводности. В физике наибольший интерес представляют случаи $d = 1, 2, 3$. В этих случаях уравнение (1) описывает распространение тепла, заданного в начальный момент времени условием (2), в стержне, на плоскости и в трехмерном пространстве соответственно.

Если показатель $\operatorname{Re}\,\sigma^2 = 0$, то уравнение (1) становится уравнением Шредингера, его решение принято называть волновой функцией и обозначать $\psi\,(x,t)$, более подробно об уравнение Шредингера можно найти в [1]. В этом случае на начальное условие налагается ограничение $\|\varphi\|^2_{L_2} = 1$. Волновая функция описывает изменение чистого состояния с течением времени в гамильтоновых квантовых системах. Квадрат волновой функции $|\psi|^2$ является плотностью вероятности нахождения частицы в данной точке конфигурационного пространства в данный момент времени.

В данной работе уравнение (1) будет рассматриваться с условием $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$, таким образом в результате получится связь уравнения теплопроводности с уравнением Шредингера через параметр σ. Если

Ключевые слова: предельные теоремы, эволюционные уравнения, уравнение Шредингера, мера Фейнмана, случайные блуждания.

$\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$, то (1) – уравнение Шредингера, если $\operatorname{Im}\sigma = 0$, то (1) – уравнение теплопроводности, промежуточные случаи параметра σ не имеют явного физического смысла.

Решение уравнения (1) можно получить как свертку начальной функции (2) с соответствующим фундаментальным решением, именно

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi t\sigma^2)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y) \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}\right) dy. \tag{3}$$

Когда $\operatorname{Im}\sigma = 0$ фундаментальное решение уравнения (1)

$$p(y,t) = \frac{1}{(2\pi t\sigma^2)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}\right) \tag{4}$$

представляет собой вероятностное (нормальное) распределение. Само же решение (3) уравнения (1), тогда может быть записано как

$$u(x,t) = \mathbf{E}\varphi\big(x + \sigma w(t)\big), \tag{5}$$

где $w(t)$ – d-мерный стандартный винеровский процесс.

Если же $\operatorname{Im}\sigma \neq 0$, то решение (3) не имеет вероятностного смысла, так как это уже не интеграл от функции φ по вероятностной мере. В работах [2, 3, 5] были предложены различные методы, дающие возможность придать вероятностный смысл решению эволюционного уравнения даже когда соответствующее фундаментальное решение не является вероятностным распределением. В частности, в работе [2] был предложен подход, позволяющий придать вероятностный смысл выражению (5) и для комплексного σ. Опишем вкратце основные идеи этого подхода. Предположим сначала, что функция φ продолжается с $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{C}^d$ до целой функции экспоненциального типа. Тогда можно повернуть контур интегрирования в (3), в результате чего получится представление решения, имеющее вероятностный смысл. Для простоты рассмотрим случай $d = 1$:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+\sigma z)\, e^{-z^2/2t} dz.$$

Последнее выражение представляет собой математическое ожидание $\mathbf{E}\psi\big(w(t)\big)$, где ψ – функция, которая может быть определена как сужение аналитического продолжения функции φ на прямую $x + \sigma y$, $y \in \mathbb{R}$.

В [2] было показано, что для более широкого класса функций φ решение (1) может быть получено как предел вероятностных представлений. Именно, было показано, что для функций φ, которые не продолжаются до целой функции экспоненциального типа, представление (5) может быть использовано для аппроксимации решения. Для этого начальное данное φ предварительно аппроксимировалось подходящей последовательностью целых функций экспоненциального типа. Простейшим способом такой аппроксимации является срезка хвоста преобразования Фурье, именно, приближение функции $\varphi \in L_2$ семейством функций $\varphi_{_M}, M > 0$, где

$$\varphi_{_M}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\|p\| \leqslant M} e^{-i(p,x)} \widehat{\varphi}(p) dp. \tag{6}$$

В настоящей работе для функций φ, принадлежащих соболевскому классу $W_2^{l+k}\left(\mathbb{R}^d\right)$, для некоторых $l \geqslant 0$, $k \geqslant 1$, мы оцениваем скорость сходимости аппроксимации решения задачи Коши (1),(2) вида

$$u_{_M}(t,x) = \mathbf{E}\varphi_{_M}\big(x + \sigma w(t)\big)$$

к точному решению задачи Коши (1),(2) в метрике $W_2^l\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Далее, в работе [2] было также показано, что аппроксимация точного решения задачи Коши имеет место, если не только начальное данное φ приближается целой функцией экспоненциального типа, но и одновременно винеровский процесс приближается последовательностью $\zeta_n(t)$ сложных пуассоновских процессов вида

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j, \tag{7}$$

где ξ_j – независимые одинаково распределенные случайные величины с общим симметричным распределением $\mathcal{P}$, а $\eta(t)$ – пуассоновский процесс с параметром единица, который не зависит от $\{\xi_j\}$.

В работе [2] рассматривались начальное данное φ, принадлежащее соболевскому пространству $W_2^{l+4}\left(\mathbb{R}^d\right)$, для некоторого $l \geqslant 0$, а в качестве аппроксимации целыми функциями бралась аппроксимация (6), причем M выбиралось в зависимости от n, именно, $M = M(n) = n^{1/4}$. Было показано, что в этом случае скорость сближения вероятностной аппроксимации решения вида

$$u_n(x,t) = \mathbf{E}\varphi_{_M}\big(x + \sigma\zeta_n(t)\big) \tag{8}$$

с точным решением задачи Коши (1), (2) в метрике $W_2^l\left(\mathbb{R}^d\right)$ имеет порядок $\frac{C}{n}$. Именно,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(\cdot,t)-u(\cdot,t)\|_{W_2^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C}{n}\|\varphi\|_{W_2^{l+4}(\mathbb{R}^d)}.$$

При этом в [2] предполагалось, что распределение $\mathcal{P}$ симметричное, хотя фактически использовалось только равенство нулю первого и третьего моментов. Про величины ξ_j также предполагалось, что они имеют единичную матрицу ковариации и конечный экспоненциальный момент, то есть для некоторого $\gamma > 0$

$$\mathbf{E}e^{\gamma\|\xi_1\|} < \infty.$$

Мы в настоящей работе покажем, что для $\varphi \in W_2^{l+3}\left(\mathbb{R}^d\right)$ функции $u_n(t,x)$ сходятся в метрике $W_2^l\left(\mathbb{R}^d\right)$ к точному решению и без предположения о равенстве нулю третьего момента, достаточно только равенства нулю математического ожидания. При этом мы выбираем $M = M(n) = n^{1/6}$, и в этом случае скорость сходимости вероятностной аппроксимации решения к точному решению в метрике $W_2^l\left(\mathbb{R}^d\right)$ имеет порядок $\frac{C}{\sqrt{n}}$.

§2. Основные обозначения.

Евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^d$ будем обозначать $\|\cdot\|$.

Пространство Соболева функций, определенных на $\mathbb{R}^d$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно, мы будем обозначать $W_2^k\left(\mathbb{R}^d\right)$. В пространстве $W_2^k(\mathbb{R}^d)$ мы будем пользоваться нормой

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(1+\|p\|^{2k}\right)\left|\widehat{\psi}\,(p)\right|^2 dp,$$

где $\widehat{\psi}$ – прямое преобразование Фурье от функции ψ, которое в данной работе определяется по формуле

$$\widehat{\psi}\,(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(p,x)}\psi\,(x)\,dx.$$

§3. Вероятностная аппроксимация решений.

Определим оператор P^t, полагая

$$P^t\varphi\,(x) = \frac{1}{(2\pi t\sigma^2)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi\,(x+y)\, e^{-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}}\, dy.$$

Известно (см. [2]), что так определенный оператор P^t является операторной экспонентой $e^{\frac{t\sigma^2}{2}\Delta}$. Семейство операторов P^t образуют полугруппу, то есть $P^{t+s} = P^t \cdot P^s$ для любых $s, t \geqslant 0$.

Нам понадобится следующее определение из [4].

Определение. Функция ψ является функцией экспоненциального сферического типа $M > 0$, если она экспоненциального типа M и для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$, такое что

$$|\psi\,(z)| \leqslant C_\varepsilon \exp\big(\,(M+\varepsilon)\,\|z\|\,\big), \qquad z \in \mathbb{C}^d.$$

Класс целых функций экспоненциального сферического типа M, сужение которых на множество $\operatorname{Im} z_j = 0$ принадлежит $L_p\left(\mathbb{R}^d\right)$, будем обозначать $S\mathfrak{M}_{Mp}$.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$, *а* $\varphi \in S\mathfrak{M}_{M2}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} P^t\varphi\,(x) &= \frac{1}{(2\pi t\sigma^2)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi\,(x+y)\, e^{-\frac{\|y\|^2}{2\sigma^2 t}}\, dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(x+\sigma\sqrt{t}y\right) e^{-\frac{\|y\|^2}{2}}\, dy = \mathbf{E}\varphi\big(x+\sigma w(t)\big), \end{aligned}$$

где $w(t)$ *– стандартный* d*-мерный винеровский процесс.*

Доказательство см. [2].

Пусть теперь φ не является целой функцией экспоненциального типа, но $\varphi \in W_2^{l+k}\left(\mathbb{R}^d\right)$, для некоторых $l \geqslant 0$, $k \geqslant 1$. Функцию φ мы приблизим функциями $\varphi_M \in S\mathfrak{M}_{M2}$, полагая

$$\varphi_M\,(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\|p\|\leqslant M} \widehat{\varphi}\,(p)\, e^{-i(p,x)}\, dp. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$, *а* $\varphi \in W_2^{l+k}\left(\mathbb{R}^d\right)$. *Тогда существует* $C > 0$, *такое что*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(\cdot,t) - u_{_M}(\cdot,t)\|_{W_2^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\frac{\|\varphi\|_{W_2^{k+l}}}{M^k}$$

где $u_{_M}(x,t) = \mathbf{E}\varphi_{_M}\left(x + \sigma w(t)\right)$, $w(t)$ *– винеровский процесс.*

Доказательство. Сделаем в уравнении (1) преобразование Фурье по пространственной переменной x. Получим

$$P^t\varphi\left(x\right) = u\left(x,t\right) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}\left(p\right) e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}} e^{-i(p,x)} dp. \tag{10}$$

Заметим прежде всего, что из условия $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$ следует неравенство

$$\left|e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}}\right| \leqslant 1. \tag{11}$$

Используя (9), (10), (11) и определение $u_{_M}(x,t)$, получаем оценку

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - u_{_M}(\cdot,t)\|^2_{W_2^l(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C \int\limits_{\|p\|>M} \left(1 + \|p\|^{2l}\right) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \left|e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}}\right|^2 dp \\
&\leqslant C \int\limits_{\|p\|>M} \left(1 + \|p\|^{2l}\right) |\widehat{\varphi}(p)|^2\, dp \\
&\leqslant \frac{C}{M^{2k}} \int\limits_{\|p\|>M} \left(1 + \|p\|^{2(l+k)}\right) |\widehat{\varphi}(p)|^2\, dp \leqslant C\frac{\|\varphi\|^2_{W_2^{k+l}}}{M^{2k}}.
\end{aligned}$$

□

Теперь, следуя [2], будем не только аппроксимировать функцию φ функциями $\varphi_{_M}$, но и одновременно винеровский процесс будем аппроксимировать сложным пуассоновским процессом (7). Про величины ξ_j в (7) будем считать, что они центрированы, имеют единичную матрицу ковариации и конечный экспоненциальный момент.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$, $\varphi \in W_2^{l+3}\left(\mathbb{R}^d\right), l \geqslant 0$, *и пусть* $u(x,t)$ *- решение задачи Коши* (1), (2). *Положим*

$$u_n(x,t) = \mathbf{E}\,\varphi_{_M}\big(x + \sigma\zeta_n(t)\big), \tag{12}$$

где $M = M(n) = n^{1/6}$. *Тогда существует такое* $C = C(l, d, T) > 0$, *что*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{W_2^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+3}(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{n}}. \tag{13}$$

Доказательство. Для преобразования выражения (12) понадобится вычислить математическое ожидание $\mathbf{E}\, e^{-i(p,\sigma\zeta_n(t))}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\, e^{-i(p,\sigma\zeta_n(t))} &= e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nt)^k}{k!} \int\limits_{(\mathbb{R}^d)^k} e^{-i\left(p, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sum\limits_{j=1}^{k} x_j\right)} d\mathcal{P}(x_1) \dots d\mathcal{P}(x_k) \\
&= e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nt)^k}{k!} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(p,x)} d\mathcal{P}(x) \right)^k \\
&= \exp\left[nt \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

Используя последнее выражение и (9), запишем $u_n(x,t)$ в следующем виде

$$\begin{aligned}
u_n(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\|p\|\leqslant M} \widehat{\varphi}(p) \\
\times \exp\left[nt \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right] e^{-i(p,x)} dp.
\end{aligned} \tag{14}$$

Из (10) и (14) следует, что

$$\begin{aligned}
\|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|^2_{W_2^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \int\limits_{\|p\|\leqslant M} \left(1 + \|p\|^{2l}\right) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \\
\times \left| \exp\left[nt \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right] - e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}} \right|^2 dp \\
+ C \int\limits_{\|p\|>M} \left(1 + \|p\|^{2l}\right) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \left| e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}} \right|^2 dp = A_1 + A_2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Интеграл A_2 легко оценивается

$$A_2 \leqslant C \int\limits_{\|p\|>M} \left(1+\|p\|^{2l}\right) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \, dp$$
$$\leqslant \frac{C}{M^6} \int\limits_{\|p\|>M} \left(1+\|p\|^{2l+6}\right) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \, dp$$
$$\leqslant C \frac{\|\varphi\|^2_{W_2^{l+3}(\mathbb{R}^d)}}{M^6} \leqslant C \frac{\|\varphi\|^2_{W_2^{l+3}(\mathbb{R}^d)}}{n}. \quad (16)$$

Оценим теперь интеграл A_1. В области $\|p\| \leqslant M$ выполнено соотношение

$$\frac{\|p\|}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{M}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{n^{1/6}}{\sqrt{n}} \leqslant n^{-1/3}. \quad (17)$$

Пользуясь тем, что распределение $\mathcal{P}$ имеет единичную матрицу ковариаций, и (11), оценим разность экспонент в A_1

$$\left| \exp\left[nt \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) \right] - e^{-\frac{\sigma^2 \|p\|^2 t}{2}} \right|$$
$$\leqslant \left| \exp\left[nt \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} d\mathcal{P}(y) - 1 \right) + \frac{\sigma^2 \|p\|^2 t}{2} \right] - 1 \right|$$
$$= \left| \exp\left[nt \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2 (p,y)}{2n} \right) d\mathcal{P}(y) \right] - 1 \right|. \quad (18)$$

Рассмотрим отдельно интеграл, стоящий под знаком экспоненты в правой части (18). Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{\sigma^2 (p,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y)$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2 (p,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}(y). \quad (19)$$

Разобьем интеграл (19) на сумму двух, один по области, в которой $\|y\| \leqslant n^{1/6}$, а другой – по области, где $\|y\| > n^{1/6}$. Используя соотношение

$$|ab-1| \leqslant |a-1| \cdot |b| + |b-1|,$$

получим

$$\left|\exp\left[nt\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}\,d\mathcal{P}(y)-1\right)\right]-e^{-\frac{\sigma^2\|p\|^2 t}{2}}\right|$$

$$\leqslant\left|\exp\left[nt\int\limits_{\|y\|\leqslant n^{1/6}}\left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}-1+\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}+\frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right)d\mathcal{P}(y)\right]-1\right|$$

$$\times\left|\exp\left[nt\int\limits_{\|y\|>n^{1/6}}\left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}-1+\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}+\frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right)d\mathcal{P}(y)\right]\right|$$

$$+\left|\exp\left[nt\int\limits_{\|y\|>n^{1/6}}\left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}-1+\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}+\frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right)d\mathcal{P}(y)\right]-1\right|. \quad (20)$$

Теперь займемся оценками интегралов в формуле (20). Оценим интеграл

$$\int\limits_{\|y\|>n^{1/6}}\left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}-1+\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}+\frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right)d\mathcal{P}(y).$$

Из условия конечности экспоненциального момента у распределения $\mathcal{P}$ и (17) следует, что для любого $N>0$ существует константа $C>0$, такая что

$$\left|\int\limits_{\|y\|>n^{1/6}}\left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}-1+\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}+\frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right)d\mathcal{P}(y)\right|\leqslant Cn^{-N}. \quad (21)$$

Для оценки интеграла

$$\int\limits_{\|y\|\leqslant n^{1/6}}\left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}-1+\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}+\frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right)d\mathcal{P}(y) \quad (22)$$

используем разложение экспоненты $e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}$ в ряд Тейлора и условие (17). Подынтегральное выражение в (22) оценивается

$$\left|e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}}-1+\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}+\frac{\sigma^2(p,y)^2}{2n}\right|\leqslant C\frac{\|p\|^3\|y\|^3}{n^{3/2}}.$$

Используя эту оценку и конечность экспоненциального момента получаем, что интеграл (22) можно оценить как

$$\left| \int\limits_{\|y\| \leqslant n^{1/6}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{i\sigma\,(p,y)}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2\,(p,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}\,(y) \right|$$
$$\leqslant C\frac{\|p\|^3}{n^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \|y\|^3\, d\mathcal{P}\,(y) \leqslant C\frac{\|p\|^3}{n^{3/2}}.$$

Получаем оценку для одной из экспонент в формуле (20)

$$\exp\left[nt \int\limits_{\|y\| \leqslant n^{1/6}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{i\sigma\,(p,y)}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2\,(p,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}\,(y) \right]$$
$$\leqslant \exp\left(C\frac{\|p\|^3}{n^{3/2}} nt \right) = \exp\left(C\frac{\|p\|^3}{\sqrt{n}} t \right).$$

Вспомним теперь, что в интеграле A_1 выполнено соотношение (17) и, значит, в показателе экспоненты стоит величина, которая меньше некоторой константы, не зависящей от n. Соответственно, мы имеем

$$\left| \exp\left[nt \int\limits_{\|y\| \leqslant n^{1/6}} \left(e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} - 1 + \frac{i\sigma\,(p,y)}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2\,(p,y)^2}{2n} \right) d\mathcal{P}\,(y) \right] - 1 \right|$$
$$\leqslant \left| \exp\left(C\frac{\|p\|^3}{\sqrt{n}} t \right) - 1 \right| \leqslant C\frac{\|p\|^3}{\sqrt{n}}.$$

Тем самым, мы показали, что разность экспонент в интеграле A_1 оценивается как

$$\left| \exp\left[nt \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i\sigma(p,y)}{\sqrt{n}}} d\mathcal{P}\,(y) - 1 \right) \right] - e^{-\frac{\sigma^2 \|p\|^2 t}{2}} \right| \leqslant C\frac{\|p\|^3}{\sqrt{n}}. \qquad (23)$$

Используя (23), получаем оценку интеграла A_1

$$A_1 \leqslant C \int\limits_{\|p\|\leqslant M} \left(1+\|p\|^{2l}\right) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \left(\frac{\|p\|^3}{\sqrt{n}}\right)^2 dp$$
$$\leqslant \frac{C}{n} \int\limits_{\|p\|\leqslant M} \left(1+\|p\|^{2l+6}\right) |\widehat{\varphi}(p)|^2\, dp = \frac{C}{n} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+3}(\mathbb{R}^d)}. \quad (24)$$

Теперь из (15), (16) и (24) следует утверждение теоремы. □

Литература

1. П. А. М. Дирак, *Принципы квантовой механики.* Наука, М., 1979.
2. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельная теорема о сходимости функционалов от случайного блуждания к решению задачи Коши для уравнения* $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u$ *с комплексным параметром* σ. — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 88–102.
3. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностная аппроксимация решений задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **396** (2011), 111–143.
4. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* Наука, М., 1977.
5. Smorodina, N. V., Faddeev, M.M. *The Le'vy-Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications.* — Acta Appl. Math. **110**, No. 3, (2010), 1289–1308.

Tsykin S. V. On the approximation of the solutions of some evolution equations by the expectations of functionals of random walks.

We consider some problems associated with a probabilistic representation and a probabilistic approximation of the Cauchy problem solution for the family of equations $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u$ with a complex parameter σ such that $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$. This equation coincides with the heat equation when $\operatorname{Im}\sigma = 0$ and with the Schrödinger equation when $\operatorname{Re}\sigma^2 = 0$.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28
Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: aguero123@yandex.ru

Поступило 20 октября 2014 г.