Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

Б. П. Харламов

ФИНАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА С ОСТАНОВКОЙ

§1. Диффузионный процесс с финальным распределением

Характеристический оператор. Рассматривается одномерный процесс диффузионного типа. Предполагается, что характеристический оператор процесса, определённый на множестве дважды дифференцируемых функций, представляет собой трёхчлен вида

$$\mathcal{D}f = a(x)f'' + b(x)f' - c(x)f,$$

у которого коэффициенты $a(x)$ и $c(x)$ положительны [2] (с. 726).

В теории марковских процессов, где впервые появился и активно использовался термин "характеристический оператор" (см. Дынкин [2], с. 207), наличие члена $-c(x)f$ говорит о том, что рассматриваемый процесс $X(t)$, $t \geqslant 0$, имеет обрыв в некоторый случайный момент времени $\zeta < \infty$. Это значит, что траектория процесса определяется только до момента обрыва, а сам факт обрыва вытекает из дефектности марковской переходной вероятности процесса с этим характеристическим оператором. А именно, функция $u(t,x) \equiv \mathbf{P}_x(X(t) \in \mathbb{R})$ (где $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ – область возможных значений процесса) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{D}u,$$

откуда вытекает, что для некоторых $t > 0$ и x

$$\mathbf{P}\left(X(t) \in \mathbb{R} \,|\, X(0) = x\right) < 1.$$

Другая интерпретация данного характеристического оператора связана с классом полумарковских процессов диффузионного типа

Ключевые слова: марковский процесс, непрерывный полумарковский процесс, переходная функция, преобразование Лапласа, финальная точка, момент начала остановки, плотность финального распределения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 12-01-00457-а.

(см. ниже). По определению, класс строго марковских процессов является частью класса полумарковских процессов, см. [4]. Поэтому, говоря о полумарковских процессах, мы иногда будем уточнять – полумарковские, но не марковские. Для таких полумарковских процессов марковская переходная вероятность может быть определена обычным образом, но она не определяет меру процесса и, самое главное, не удовлетворяет предыдущему параболическому уравнению в частных производных. Однако, у полумарковского процесса диффузионного типа существуют другие функционалы, которые удовлетворяют родственному уравнению эллиптического типа. В частности функционал

$$f_\Delta(x) \equiv \mathbf{P}_x(\sigma_\Delta < \infty),$$

(где σ_Δ – момент первого выхода траектории процесса из открытого интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$) удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D} f_\Delta = 0,$$

принимая значения 1 в краевых точках интервала. Но отсюда следует, что $f_\Delta(x) < 1$ внутри интервала. И если допустить, что траектории процесса не обрываются, то для некоторых точек $x \in \Delta$ должно выполняться условие

$$\mathbf{P}_x(\sigma_\Delta = \infty) > 0.$$

А это приводит к совершенно другой интерпретации данного характеристического оператора. Вместо процесса с обрывом появляется процесс с остановкой – бесконечным интервалом постоянства в конце траектории. Доказательству этого факта и выводу предельного (финального) распределения для такого процесса посвящена настоящая статья.

Непрерывный процесс с пределом на бесконечности. Итак, мы делаем предположение, что наш процесс принадлежит более широкому классу, чем класс строго марковских процессов. Заметим, что во всех прочих отношениях рассматриваемый нами полумарковский диффузионный процесс остаётся подобен марковскому диффузионному процессу с обрывом. Только в предполагаемый момент обрыва процесс не обрывается, а останавливается навсегда в достигнутой к этому моменту точке своей траектории.

Рассмотрим одномерный непрерывный случайный процесс $X(t)$ ($t \geqslant 0$). Распределение $\mathbf{P}_x$ процесса с начальным состоянием $x \in \mathbb{R}$ представляет собой вероятностную меру на измеримом пространстве

$(\mathcal{C}, F)$, где $\mathcal{C}$ – множество всех непрерывных выборочных функций $\xi : [0.\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ – борелевская сигма-алгебра подмножеств этого множества. В терминах выборочных функций объект $X(t) \equiv X_t$ играет роль проектирования – значения выборочной функции в момент t : $X_t(\xi) = \xi(t)$.

Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ и $\sigma_{(a,b)}$ – момент первого выхода процесса из интервала (a, b), т.е. функция на множестве $\mathcal{C}$ вида

$$\sigma_{(a,b)}(\xi) = \inf\{t \geqslant 0 : \ \xi(t) \notin (a, b)\} \quad (\xi \in \mathcal{C}).$$

Задача о финальном распределении процесса вытекает из интерпретации событий вида $\{\sigma_{(a,b)} = \infty\}$, особенно в том случае, когда существуют такие точки $x \in (a, b)$, для которых $\mathbf{P}_x(\sigma_{(a,b)} = \infty) > 0$.

В дальнейшем мы будем использовать специальное обозначение для события, состоящего в том, что процесс не выходит из интервала Δ, начиная с некоторого момента. Обозначим

$$\rho(\Delta) \equiv \bigcup_{t \geqslant 0} \theta_t^{-1}\{\sigma_\Delta = \infty\},$$

где θ_t – оператор сдвига на множестве $\mathcal{C}$:

$$(\forall s \geqslant 0) \quad (\theta_t(\xi))(s) = \xi(t + s).$$

Пусть (t_n) – последовательность случайных величин, стремящаяся почти наверное к бесконечности при $n \to \infty$. Тогда справедливо утверждение, что почти наверное

$$\rho(\Delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \theta_{t_n}^{-1}\{\sigma_\Delta = \infty\}. \tag{1}$$

Ясно, что $\{\sigma_\Delta = \infty\} \subset \rho(\Delta)$ и для любого $t > 0$ справедливо

$$\theta_t^{-1}\rho(\Delta) = \rho(\Delta).$$

Одной из причин, по которой процесс, начиная с некоторого момента времени, не выходит из интервала, является существование предела у выборочной траектории ξ процесса при $t \to \infty$, когда $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t) \in (a, b)$. Обозначим $\mathcal{C}^{\lim}$ множество выборочных траекторий, имеющих предел на бесконечности.

Лемма 1. *На множестве $\mathcal{C}$ справедливо соотношение*

$$\mathcal{C}^{\lim} \cap \{\sigma_\Delta = \infty\} = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{\Delta_1 \in \Pi(\epsilon)} \rho(\Delta_1),$$

где Δ *– открытый интервал и* $\Pi(\epsilon)$ *– покрытие множества* Δ *открытыми интервалами длиной не более* ϵ*, где* $\bigcup\limits_{\Delta_1\in\Pi(\epsilon)} \Delta_1 = \Delta$.

Доказательство. Каждая функция $\xi \in \bigcap\limits_{\epsilon>0} \bigcup\limits_{\Delta\in\Pi_\epsilon} \rho(\Delta)$ удовлетворяет критерию Коши на бесконечности и поэтому сходится (сходится в себе). Обратное включение тривиально. □

В качестве специального подкласса множеству функций $\mathcal{C}^{\lim}$ принадлежит класс функций, имеющих так называемую бесконечную остановку – бесконечный интервал постоянства на своей области определения. Слова "бесконечная остановка" не означают обрыв функции в некоторый конечный момент времени. Обрыв процесса принято интерпретировать как попадание процесса в некоторое добавочное состояние $\vartheta \notin \mathbb{R}$, из которого нет возврата. Бесконечной остановкой называется пребывание процесса с непрерывными выборочными траекториями в одном и том же состоянии из множества $\mathbb{R}$ для всех $t \geqslant t_0$ по отношению к некоторому $t_0 \geqslant 0$. Легко определить начало бесконечной остановки, располагая информацией о всей траектории в целом. Но нельзя узнать по предыстории процесса до любого конечного момента времени, что бесконечная остановка уже началась. Это означает, что начало бесконечной остановки (случайный момент ζ) является измеримой функцией относительно $\mathcal{F}$, но не является марковским моментом относительно натуральной фильтрации процесса $(\mathcal{F}_t)_0^\infty$, где $\mathcal{F}_t$ – сигма алгебра, порождённая всеми событиями вида $\{X_s \leqslant x\}$ $(s \leqslant t,\ x \in \mathbb{R})$.

Обозначим $\mathcal{C}^\infty$ множество выборочных траекторий, имеющих бесконечную остановку. Очевидно, что $\mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{C}^{\lim}$. Нетрудно доказать, что оба эти множества измеримы относительно $\mathcal{F}$.

В задаче о финальном распределении, решаемой полумарковским методом, отличие процессов с бесконечной остановкой от процессов, имеющих предел общего вида на бесконечности, не представляется существенным до тех пор, пока не ставится задача о начале бесконечной остановки. К этой задаче мы вернёмся в конце статьи.

Непрерывный полумарковский процесс. Пусть $(\mathbf{P}_x)$ – измеримое согласованное семейство мер на $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, индексированных начальными точками траектории процесса $x \in \mathbb{R}$. Мы предположим, что

согласование мер семейства $(\mathbf{P}_x)$ определяется условием:

$$\mathbf{P}_x(\theta_{\sigma_\Delta}^{-1}B,\, A,\, \sigma_\Delta < \infty) = \mathbf{E}_x(P_{X(\sigma_\Delta)}(B);\, A,\, \sigma_\Delta < \infty) \tag{2}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{F}_{\sigma_\Delta}$, где Δ – интервал из множества значений процесса, $\mathcal{F}_{\sigma_\Delta}$ – сигма-алгебра, определяемая стандартным образом относительно марковского момента σ_Δ. Таким образом, вероятность, зависящая от значения процесса в случайный момент σ_Δ, почти наверное совпадает с условной вероятностью относительно всей предыстории процесса до этого момента, т. е. выполняется однородное марковское условие в момент первого выхода из открытого интервала, включённого в область значений процесса [4]. В общем случае этот процесс не является марковским. Такой процесс мы называем непрерывным полумарковским [4]. Прилагательное “непрерывный” используется для отличия от того определения, которое даётся в теории ступенчатых полумарковских процессов (хотя определение непрерывного полумарковского процесса без ограничения на область задания мер обслуживает и ступенчатые процессы). Заметим, что согласно этому определению каждый непрерывный строго марковский процесс является непрерывным полумарковским процессом, но не обратно. Однако, для изучения процессов с бесконечной остановкой марковская модель не подходит кроме некоторых специальных случаев выбора начала остановки.

Полумарковские переходные функции. Для каждого интервала (a, b) и $x \in (a, b)$ определим полумарковские переходные функции

$$G_{(a,b)}(dt\,|\,x) \equiv \mathbf{P}_x(\sigma_{(a,b)} \in dt,\, X(\sigma_{(a,b)}) = a),$$
$$H_{(a,b)}(dt\,|\,x) \equiv \mathbf{P}_x(\sigma_{(a,b)} \in dt,\, X(\sigma_{(a,b)}) = b)$$

и их преобразования Лапласа по t $(\lambda \geqslant 0)$:

$$g_{(a,b)}(\lambda, x) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} G_{(a,b)}(dt\,|\,x),$$

$$h_{(a,b)}(\lambda, x) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} H_{(a,b)}(dt\,|\,x).$$

Таким образом,

$$g_{(a,b)}(\lambda, x) = \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_{(a,b)});\, \sigma_{(a,b)} < \infty,\, X(\sigma_{(a,b)}) = a),$$
$$h_{(a,b)}(\lambda, x) = \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_{(a,b)});\, \sigma_{(a,b)} < \infty,\, X(\sigma_{(a,b)}) = b).$$

Мы предположим, что для предельных значений выполняются условия:

$$g_{(a,b)}(\lambda, a+) = h_{(a,b)}(\lambda, b-) = 1, \quad g_{(a,b)}(\lambda, b-) = h_{(a,b)}(\lambda, a+) = 0,$$

а в граничных точках интервала значения этих функций определяются по непрерывности.

Обозначим сумму "со сдвигом", для двух неотрицательных функций τ_1 и τ_2 на $\mathcal{D}$ (возможно принимающих бесконечное значение) как

$$\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}$$

на множестве $\{\tau_1 < \infty\}$ и $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \infty$ на множестве $\{\tau_1 = \infty\}$. Операция $\dot{+}$ обладает ассоциативностью, но не коммутативна.

Известно, что для любого интервала (c, d), такого что $(c, d) \subset (a, b)$, выполняется свойство

$$\sigma_{(a,b)} = \sigma_{(c,d)} \dot{+} \sigma_{(a,b)}.$$

Из этого соотношения, из определённых выше значений функций $g_{(c,d)}$ и $h_{(c,d)}$ на концах интервала (c, d) и из полумарковского свойства процесса следуют уравнения (см. [4])

$$g_{(a,b)}(\lambda, x) = g_{(c,d)}(\lambda, x) g_{(a,b)}(\lambda, c) + h_{(c,d)}(\lambda, x) g_{(a,b)}(\lambda, d), \tag{3}$$

$$h_{(a,b)}(\lambda, x) = g_{(c,d)}(\lambda, x) h_{(a,b)}(\lambda, c) + h_{(c,d)}(\lambda, x) h_{(a,b)}(\lambda, d) \tag{4}$$

для любой точки x, такой что $x \in [c, d] \subset [a, b]$, и $\lambda \geqslant 0$. В частности,

$$\begin{aligned}
g_{(a,b)}(\lambda, x) &= h_{(a,d)}(\lambda, x) g_{(a,b)}(\lambda, d) + g_{(a,d)}(\lambda, x), \\
h_{(a,b)}(\lambda, x) &= h_{(a,d)}(\lambda, x) h_{(a,b)}(\lambda, d), \\
g_{(a,b)}(\lambda, x) &= g_{(c,b)}(\lambda, x) g_{(a,b)}(\lambda, c), \\
h_{(a,b)}(\lambda, x) &= g_{(c,b)}(\lambda, x) h_{(a,b)}(\lambda, c) + h_{(c,b)}(\lambda, x).
\end{aligned}$$

Мы будем иметь дело с процессами, для которых существуют интервалы значений (a, b) и точки $x \in (a, b)$, такие что $\mathbf{P}_x(\sigma_{(a,b)} = \infty) > 0$. Заметим, что если для данного x эта вероятность меньше единицы, то может случиться, что процесс много раз выходит и возвращается в интервал (a, b) до того момента, когда он остаётся в этом интервале навсегда после одного такого возвращения. В этом состоит смысл события (подмножества) $\rho(\Delta)$, когда $\Delta = (a, b)$.

Полумарковский диффузионный процесс. Полумарковский процесс называется диффузионным в окрестности точки x, если существуют функции $A(x)$ и $B(\lambda, x)$, такие что

$$g_{(x-r,x+r)}(\lambda, x) = \frac{1}{2}(1 - A(x)r - B(\lambda, x)r^2) + o(r^2), \tag{5}$$

$$h_{(x-r,x+r)}(\lambda, x) = \frac{1}{2}(1 + A(x)r - B(\lambda, x)r^2) + o(r^2) \tag{6}$$

при $r \to 0$. Предполагается, что $A(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки x, $B(\lambda, x)$ положительна, непрерывна по второму аргументу в окрестности точки x, не убывает и имеет вполне монотонную частную производную по первому аргументу. Если условие диффузионности выполняется для любой точки открытого интервала (a, b) при некоторых допустимых функциях $A(x)$, $B(\lambda, x)$ $(x \in (a, b), \lambda \geqslant 0)$, то функции $g_{(a,b)}(\lambda, x)$, $h_{(a,b)}(\lambda, x)$ удовлетворяют на этом интервале дифференциальному уравнению [4]

$$\frac{1}{2}f'' + A(x)f' - B(\lambda, x)f = 0, \tag{7}$$

с краевыми значениями

$$g_{(a,b)}(\lambda, a) = h_{(a,b)}(\lambda, b) = 1, \quad g_{(a,b)}(\lambda, b) = h_{(a,b)}(\lambda, a) = 0.$$

и, следовательно, при любом $\lambda \geqslant 0$ составляют фундаментальную систему решений этого уравнения.

Для нас особый интерес представляют диффузионные полумарковские процессы, у которых при любом $x \in (a, b)$ выполняется условие $B(0, x) > 0$. Именно для таких коэффициентов при $\lambda = 0$ уравнение (7) имеет решения $g_{(c,d)}$ и $h_{(c,d)}$, для которых $g_{(c,d)}(0, x) + h_{(c,d)}(0, x) < 1$ при любых $(c, d) \subset [a, b]$ и $x \in (c, d)$, которое эквивалентно условию $\mathbf{P}_x(\sigma_{(c,d)} = \infty) > 0$.

В теории марковских процессов уравнение (7) при $B(0, x) > 0$ применяется для описания процесса с обрывом в некоторый марковский момент $\zeta < \infty$. А именно. в качестве исходного объекта берётся измеримая относительно $\mathcal{F}$ неотрицательная случайная величина $\zeta < \infty$. Далее определяется новое пространство элементарных событий – множество оборванных в момент ζ траекторий, – и на этом множестве определяется возрастающее семейство сигма-алгебр подмножеств (фильтрация), определённых стандартным образом с помощью цилиндрических подмножеств (см. Дынкин [2], с. 116, Ито и Маккин [3], с. 110 и др.). Ясно, что относительно такой фильтрации момент ζ

является марковским моментом. Но он, вообще говоря, не является марковским моментом на множестве остановленных траекторий (не оборванных) с заданной на нём натуральной фильтрацией подмножеств. Задача о финальном распределении является содержательной для непрерывного полумарковского процесса, остановленного в случайный момент ζ, но не для оборванного в этот момент марковского процесса. Аналогом этой задачи в теории марковских процессов является задача о распределении процесса в точке "непосредственно перед обрывом". Этому состоянию трудно дать какую-либо материальную интерпретацию кроме остановки в момент "обрыва". Полумарковский подход при решении таких задач состоит в применении полумарковских переходных функций для формулировки результатов и вывода относящихся к ним формул.

Марковские диффузионные процессы составляют подкласс класса полумарковских диффузионных процессов. Марковость полумарковского диффузионного процесса может быть определена в терминах коэффициентов уравнения (7). Полумарковский диффузионный процесс является локально марковским на интервале (a, b), если существует функция $B_0(x) > 0$, такая что для любых $x \in (a, b)$ и $\lambda \geqslant 0$ справедливо представление (см. например, [4, с. 115])

$$B(\lambda, x) = B_0(x) + c\lambda \quad (c > 0).$$

В этом случае коэффициенты уравнения могут быть выражены через феллеровские диффузионные коэффициенты $b(x)$ – снос, $a(x)$ – локальная дисперсия, а именно, $A(x) = b(x)/a(x)$, $B_0(x) = 1/a(x)$, $c = 1$ [4].

Предел на бесконечности. Обозначим

$$G_{(a,b)}(x) \equiv g_{(a,b)}(0, x) = \mathbf{P}_x(\sigma_{(a,b)} < \infty,\ X(\sigma_{(a,b)}) = a),$$

$$H_{(a,b)}(x) \equiv h_{(a,b)}(0, x) = \mathbf{P}_x(\sigma_{(a,b)} < \infty,\ X(\sigma_{(a,b)}) = b).$$

– маргинальные переходные вероятности, где $-\infty < a < x < b < \infty$. Эти функции на интервале (a, b) удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{2} f'' + A(x) f' - B(0, x) f = 0, \tag{8}$$

(далее будем обозначать $B(0, x) \equiv B(x)$) с краевыми значениями

$$G_{(a,b)}(a) = H_{(a,b)}(b) = 1 \quad \text{и} \quad G_{(a,b)}(b) = H_{(a,b)}(a) = 0.$$

Решение задачи о финальном распределении процесса мы дадим в терминах этих функций.

Теорема 1. *Если всюду на замкнутом интервале* $[a,b]$ *непрерывная функция* $B(x)$ *положительна, то для любой точки* $x \in \Delta \equiv (a,b)$ *справедливо* $\mathbf{P}_x(\sigma_\Delta = \infty) > 0$ *и*

$$\mathbf{P}_x(\mathcal{C}^{\lim} \,|\, \sigma_\Delta = \infty) = 1.$$

Доказательство. В условии теоремы рассматривается процесс, для которого при любых $(c,d) \subset [a,b]$ и $x \in (c,d)$ справедливо $\mathbf{P}_x(\sigma_{(c,d)} = \infty) \equiv 1 - G_{(c,d)}(x) - H_{(c,d)}(x) > 0$. Пусть $a = a_1 < a_2 < b_1 < b_2 = b$. Обозначим

$$\Delta_i = (a_i, b_i) \quad (i = 1,2).$$

Далее, для сокращения записи введём обозначения: при $\Delta = (a,b)$

$$\mu(\Delta) \equiv \{\sigma(\Delta) = \infty\}, \quad \phi(\Delta) \equiv \phi_\Delta = \{\sigma(\Delta) < \infty,\, X(\sigma(\Delta)) = a\},$$
$$\psi(\Delta) \equiv \psi_\Delta = \{\sigma(\Delta) < \infty,\, X(\sigma(\Delta)) = b\};$$

аналогично будем различать точки выхода непрерывного процесса из любого другого интервала.

В дальнейшем, обозначая соотношения между множествами, мы будем заменять знак $\cup$ (дизъюнкции) знаком $+$ у не пересекающихся компонент объединения, а также опускать знак пересечения $\cap$ (конъюнкции) или заменять его точкой, где это не вызывает двойного толкования.

Пусть $x \in \Delta_1$. Это определяет порядок следования точек первого выхода. Другое расположение начальной точки внутри интервала Δ рассматривается аналогично.

Обозначим $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \sigma_{\Delta_1}$ на $\psi(\Delta_1)$, $\tau_2 = \tau_1 \dot{+} \sigma_{\Delta_2}$ на $\theta_{\tau_1}^{-1}\phi(\Delta_2)$, $\tau_3 = \tau_2 \dot{+} \sigma_{\Delta_1}$ на $\theta_{\tau_2}^{-1}\psi(\Delta_1)$ и так далее (каждый первый выход из интервалов Δ_1 и Δ_2 происходит внутри интервала Δ)

$$\tau_{2n+1} = \tau_{2n} \dot{+} \sigma_{\Delta_1} \ \text{ на } \ \theta_{\tau_{2n}}^{-1}\psi(\Delta_1) \quad (n \geqslant 0);$$
$$\tau_{2n+2} = \tau_{2n+1} \dot{+} \sigma_{\Delta_2} \ \text{ на } \ \theta_{\tau_{2n+1}}^{-1}\phi(\Delta_2) \quad (n \geqslant 0);$$

$B_0 = \psi(\Delta_1)$, $B_1 = \theta_{\tau_1}^{-1}\phi(\Delta_2)$, $B_2 = \theta_{\tau_2}^{-1}\psi(\Delta_1)$ и так далее

$$B_{2n+1} = \theta_{\tau_{2n+1}}^{-1}\phi(\Delta_2), \quad B_{2n+2} = \theta_{\tau_{2n+2}}^{-1}\psi(\Delta_1) \quad (n \geqslant 0);$$

$A_0 = \mu(\Delta_1)$, $A_1 = A_0 + B_0\theta_{\tau_1}^{-1}\mu(\Delta_2)$, $A_2 = A_1 + B_0B_1\theta_{\tau_2}^{-1}\mu(\Delta_1)$ и так далее

$$A_{2n+1} = A_{2n} + B_0B_1 \ldots B_{2n}\theta_{\tau_{2n+1}}^{-1}\mu(\Delta_2),$$

$$A_{2n+2} = A_{2n+1} + B_0 B_1 \dots B_{2n+1} \theta^{-1}_{\tau_{2n+2}} \mu(\Delta_1), \quad (n \geqslant 0).$$

В этих терминах мы составляем уравнения – последовательные ступени разложения в ряд для множества $\mu(\Delta)$. Из предыдущих обозначений следует

$$\mu(\Delta) = A_0 + B_0 \theta^{-1}_{\tau_1} \mu(\Delta),$$

Пользуясь представлением $\mu(\Delta)$ в правой части этого равенства относительно начальной точки, принадлежащей множеству Δ_2, распределительным свойством обратного отображения сдвига θ_t^{-1} и свойством ассоциативности оператора сдвига $\theta^{-1}_{\tau_1}\theta^{-1}_{\tau_2} = \theta^{-1}_{\tau_1 \dot{+} \tau_2}$, получаем

$$\begin{aligned} \mu(\Delta) &= A_0 + B_0 \theta^{-1}_{\tau_1} [\mu(\Delta_2) + \phi(\Delta_2) \theta^{-1}_{\sigma(\Delta_2)} \mu(\Delta)] \\ &= A_1 + B_0 B_1 \theta^{-1}_{\tau_2} \mu(\Delta) \end{aligned}$$

и так далее, по индукции получаем формулу

$$\mu(\Delta) = A_n + B_0 B_1 \dots B_n \theta^{-1}_{\tau_{n+1}} \mu(\Delta) \quad (n \geqslant 0).$$

Последовательность множеств (A_n) монотонно возрастает, последовательность остатков

$$B_0 B_1 \dots B_n \theta^{-1}_{\tau_{n+1}} \mu(\Delta) \quad (n \geqslant 0)$$

монотонно убывает. Обозначим $\mathbf{P}_x(\sigma_\Delta = \infty) \equiv M_\Delta(x)$. Пользуясь полумарковским свойством процесса (марковская регенерация относительно момента первого выхода из открытого множества), получаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_x(B_0 B_1 \dots B_n \theta^{-1}_{\tau_{n+1}} \mu(\Delta)) \\ &= \begin{cases} H_{\Delta_1}(x)[G_{\Delta_2}(b_1) H_{\Delta_1}(a_2)]^{n/2} G_{\Delta_2}(b_1) M_\Delta(a_2) & n \text{ четное} \\ H_{\Delta_1}(x)[G_{\Delta_2}(b_1) H_{\Delta_1}(a_2)]^{(n+1)/2} M_\Delta(b_1) & n \text{ нечетное.} \end{cases} \end{aligned}$$

– вероятность стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда последовательность множеств (A_n) стремится к пределу $\mu(\Delta)$ с $\mathbf{P}_x$-вероятностью 1. Справедливо равенство $\mathbf{P}_x$-п.н.

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta_1) + \sum_{n=1}^{\infty} B_0 B_1 \dots B_{n-1} \cdot \theta^{-1}_{\tau_n} \begin{cases} \mu(\Delta_1) & n \text{ четное} \\ \mu(\Delta_2) & n \text{ нечетное} \end{cases}$$

Разобьём правую часть этого равенства на две части

$$\mu(\Delta) = \left(\mu(\Delta_1) + \sum_{n=1}^{\infty} B_0 B_1 \dots B_{2n-1} \cdot \theta_{\tau_{2n}}^{-1} \mu(\Delta_1)\right)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} B_0 B_1 \dots B_{2n} \cdot \theta_{\tau_{2n+1}}^{-1} \mu(\Delta_2).$$

Убирая из правой части компоненты B_i, мы можем её только увеличить. Отсюда следует п.н. равенство

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta) \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \theta_{\tau_{2n}}^{-1} \mu(\Delta_1) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \theta_{\tau_{2n+1}}^{-1} \mu(\Delta_2)\right).$$

При данном расположении концов перекрывающихся интервалов последовательность (τ_n) стремится к бесконечности $\mathbf{P}_x$-почти наверное. Из формулы (1) следует равенство

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta)[\rho(\Delta_1) \cup \rho(\Delta_2)], \tag{9}$$

откуда вытекает равенство

$$\mathbf{P}_x(\rho(\Delta_1) \cup \rho(\Delta_2) \mid \mu(\Delta)) = 1.$$

С другой стороны,

$$\rho(\Delta) = \bigcup_{t \geqslant 0} \theta_t^{-1} \mu(\Delta) \subset \bigcup_{t \geqslant 0} \theta_t^{-1} (\rho(\Delta_1) \cup \rho(\Delta_2))$$
$$= \bigcup_{t \geqslant 0} (\rho(\Delta_1) \cup \rho(\Delta_2)) = \rho(\Delta_1) \cup \rho(\Delta_2).$$

Рассмотрим теперь конечное покрытие $\gamma_n = (\Delta_k)_1^n$ интервала (a, b) интервалами Δ_k вида

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k = (a, b), \quad \Delta_k = (a_k, b_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad n \geqslant 2, \tag{10}$$

$$a = a_1 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < a_4 < b_3 < a_5 < b_4 < \dots < a_n < b_{n-1} < b_n = b.$$

Применяя полученную формулу к подпокрытиям этого покрытия, получаем формулу

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta) \bigcup_{k=1}^{n} \rho(\Delta_k). \tag{11}$$

Ясно, что таким путём можно получить покрытие γ_n со сколь угодно мелкими элементами. Пусть ϵ_n максимальная длина элементов покрытия γ_n и $\epsilon_n \to 0$. Из доказанной выше формулы следует равенство

$$\mathbf{P}_x\left(\bigcup_{\Delta_k\in\gamma_n}^{n}\rho(\Delta_k)\,\middle|\,\sigma_\Delta=\infty\right)=1.$$

Отсюда для любого $N \geqslant 1$

$$\mathbf{P}_x\left(\bigcap_{n=1}^{N}\bigcup_{\Delta_k\in\gamma_n}^{n}\rho(\Delta_k)\,\middle|\,\sigma_\Delta=\infty\right)=1,$$

и, следовательно, по лемме 1

$$\mathbf{P}_x\left(\mathcal{C}^{\lim}\,|\,\sigma_\Delta=\infty\right)=1$$

и процесс имеет предел на бесконечности с условной вероятностью 1. □

§2. Финальное распределение

Процесс, имеющий предел на бесконечности, не является эргодическим, но для него при любых $x \in (a,b)$ существует предельное одномерное распределение (финальное распределение)

$$Q_{(a,b)}(y\,|\,x)\equiv\mathbf{P}_x(\lim_{t\to\infty}X(t)<y\,|\,\sigma_{(a,b)}=\infty),$$

где $a < y \leqslant b$. Это ядро характеризует условное распределение финальной точки $X(\zeta)$, когда переход к пределу или остановка процесса произошла до момента первого выхода из интервала (a,b). Распределение $Q_{(a,b)}(y\,|\,x)$ может быть найдено непосредственно в терминах маргинальных переходных вероятностей.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1, $\Delta_1=(a,y)$, $\Delta_2=(y,b)$.

1) *Если* $x<y$, *то*

$$Q_\Delta(y\,|\,x)=M_\Delta^{-1}(x)\left(1-G_\Delta(x)-H_{\Delta_1}(x)+H_\Delta(x)\frac{H'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_2}(y+)}\right).$$

2) *Если* $x > y$, *то*

$$Q_\Delta(y\,|\,x) = M_\Delta^{-1}(x)\left(-G_\Delta(x) + G_{\Delta_2}(x) - G_\Delta(x)\frac{G'_{\Delta_2}(y+)}{G'_{\Delta_1}(y-)}\right).$$

Доказательство. 1) Пусть $a = a_1 < a_2 < b_1 < b_2 = b$, $\Delta = (a, b)$, $\Delta_1 = (a_1, b_1)$, $\Delta_2 = (a_2, b_2)$. Рассмотрим процесс, начинающийся из точки $x \in \Delta_1$. При доказательстве теоремы 1 мы вывели формулу

$$\mu(\Delta) = \Psi_1 + \Psi_2,$$

где

$$\Psi_1 = \mu(\Delta_1) + \sum_{n=1}^{\infty} B_0 B_1 \ldots B_{2n-1} \cdot \theta_{\tau_{2n}}^{-1}\mu(\Delta_1),$$

$$\Psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_0 B_1 \ldots B_{2n} \cdot \theta_{\tau_{2n+1}}^{-1}\mu(\Delta_2).$$

Из определения Δ_1 и Δ_2 следует, что $\Psi_1 \subset \{\lim\limits_{t\to\infty} X(t) \leqslant b_1\}$ и $\Psi_2 \subset \{\lim\limits_{t\to\infty} X(t) \geqslant a_2\}$. Отсюда

$$\mathbf{P}_x(\Psi_1\,|\,\sigma_\Delta = \infty) \leqslant \mathbf{P}_x\big(\lim_{t\to\infty} X(t) \leqslant b_1\,|\,\sigma_\Delta = \infty\big),$$

$$\mathbf{P}_x(\Psi_2\,|\,\sigma_\Delta = \infty) = 1 - \mathbf{P}_x\big(\Psi_1\,|\,\sigma_\Delta = \infty) \leqslant \mathbf{P}_x\big(\lim_{t\to\infty} X(t) \geqslant a_2\,|\,\sigma_\Delta = \infty\big)$$
$$= 1 - \mathbf{P}_x\big(\lim_{t\to\infty} X(t) < a_2\,|\,\sigma_\Delta = \infty\big).$$

Следовательно

$$\mathbf{P}_x\big(\lim_{t\to\infty} X(t) < a_2\,|\,\sigma_\Delta = \infty\big) \leqslant \mathbf{P}_x(\Psi_1\,|\,\sigma_\Delta = \infty)$$
$$\leqslant \mathbf{P}_x\big(\lim_{t\to\infty} X(t) \leqslant b_1\,|\,\sigma_\Delta = \infty\big)$$

и при $a_2 \to b_1$ левая часть двойного неравенства стремится к правой части в любой точке непрерывности функции распределения случайной величины $\lim\limits_{t\to\infty} X(t)$. Отсюда следует, что почти для всех b_1 (по мере Лебега)

$$\mathbf{P}_x\big(\lim_{t\to\infty} X(t) \leqslant b_1\,|\,\sigma_\Delta = \infty\big) = \lim_{a_2\to b_1} \mathbf{P}_x(\Psi_1\,|\,\sigma_\Delta = \infty).$$

Из определения следует

$$\mathbf{P}_x(\Psi_1) = \mathbf{P}_x\left(\mu(\Delta_1) + \sum_{n=1}^{\infty} B_0 B_1 \ldots B_{2n-1} \cdot \theta_{\tau_{2n}}^{-1}\mu(\Delta_1)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= M_{\Delta_1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_x(B_0 B_1 \dots B_{2n-1} \cdot \theta_{\tau_{2n}}^{-1} \mu(\Delta_1)) \\
&= M_{\Delta_1}(x) + H_{\Delta_1}(x) G_{\Delta_2}(b_1) M_{\Delta_1}(a_2) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} H_{\Delta_1}(x)(G_{\Delta_2}(b_1) H_{\Delta_1}(a_2))^n G_{\Delta_2}(b_1) M_{\Delta_1}(a_2) \\
&= M_{\Delta_1}(x) + H_{\Delta_1}(x) G_{\Delta_2}(b_1) \frac{M_{\Delta_1}(a_2)}{1 - G_{\Delta_2}(b_1) H_{\Delta_1}(a_2)}.
\end{aligned}
$$

Найдём предел этого выражения при $a_2 \to b_1 \equiv y$. Обозначим $b_1 - a_2 = h$. Из краевых условий следует

$$
\begin{aligned}
&G_{\Delta_1}(y-h) = G_{\Delta_1}(y-h) - G_{\Delta_1}(y) = -G'_{\Delta_1}(y-)h + o(h). \\
&H_{\Delta_1}(y-h) = H_{\Delta_1}(y-h) - H_{\Delta_1}(y) + 1 = 1 - H'_{\Delta_1}(y-)h + o(h).
\end{aligned}
$$

От h зависит также интервал $\Delta_2 \equiv (y-h, b)$. Имеем

$$G_\Delta(y) = G_{\Delta_2}(y) G_\Delta(y-h),$$

откуда

$$
\begin{aligned}
G_{\Delta_2}(y) &= \frac{G_\Delta(y)}{G_\Delta(y-h)} \to 1 \quad (h \to 0), \\
\frac{1}{h}\left(G_{\Delta_2}(y) - 1\right) &= \frac{1}{h}\left(G_\Delta(y)/G_\Delta(y-h) - 1\right) \to \frac{G'_\Delta(y-)}{G_\Delta(y)}.
\end{aligned}
$$

Из полумарковского свойства следует $G_\Delta(y+h) = G_{(y,b)}(y+h) G_\Delta(y)$, откуда

$$\frac{1}{h}\left(G_{(y,b)}(y+h) - 1\right) = \frac{1}{h}\left(G_\Delta(y+h)/G_\Delta(y) - 1\right) \to \frac{G'_\Delta(y+)}{G_\Delta(y)},$$

и если производная G'_Δ непрерывна в точке y, то

$$G_{\Delta_2}(y) = 1 + G'_{(y,b)}(y+)h + o(h).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_x(\Psi_1) \to M_{\Delta_1}(x) + H_{\Delta_1}(x) \frac{H'_{\Delta_1}(y-) + G'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_1}(y-) - G'_{(y,b)}(y+)}$$

почти для всех y.

Для упрощения этого выражения мы используем формулы, доказанные в работе [6] (см. Приложение). Почти для всех $y \in (a,b) \equiv \Delta$ справедливо

$$H_\Delta(y) = \frac{H'_{\Delta_2}(y+)}{H'_{\Delta_1}(y-) - G'_{\Delta_2}(y+)}, \quad G_\Delta(y) = \frac{-G'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_1}(y-) - G'_{\Delta_2}(y+)}, \quad (12)$$

где $\Delta_1 = (a,y)$, $\Delta_2 = (y,b)$. Отсюда

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{P}_x(\Psi_1) = 1 - G_\Delta(x) - H_{\Delta_1}(x) + H_\Delta(x)\,\frac{H'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_2}(y+)}$$

и, так как $\Psi_1 \subset \{\sigma_\Delta = \infty\}$, получаем доказательство первого утверждения.

2) Рассмотрим процесс, начинающийся из точки $x \in \Delta_2$, где $\Delta = (a,b)$, $\Delta_1 = (a_1,b_1)$, $\Delta_2 = (a_2,b_2)$.

Пусть

$$\tau_1 = \sigma_{\Delta_2},\ \tau_2 = \tau_1 \dot{+} \sigma_{\Delta_1},\ \tau_3 = \tau_2 \dot{+} \sigma_{\Delta_2},\ \tau_4 = \tau_3 \dot{+} \sigma_{\Delta_1} \text{ и так далее,}$$

$B_0 = \phi(\Delta_2)$, $B_1 = \theta^{-1}_{\tau_1}\psi(\Delta_1)$, $B_2 = \theta^{-1}_{\tau_2}\phi(\Delta_2)$, $B_3 = \theta^{-1}_{\tau_3}\psi(\Delta_1)$ и так далее,

$$\Psi_3 = \mu(\Delta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} B_0 B_1 \ldots B_{2n-1} \cdot \theta^{-1}_{\tau_{2n}} \mu(\Delta_2),$$

$$\Psi_4 = \sum_{n=0}^{\infty} B_0 B_1 \ldots B_{2n} \cdot \theta^{-1}_{\tau_{2n+1}} \mu(\Delta_1).$$

При этом $\mathbf{P}_x(\Psi_3 + \Psi_4 \,|\, \sigma_\Delta = \infty) = 1$, а также

$$\Psi_3 \subset \{\lim_{t\to\infty} X(t) \geqslant a_2\}, \quad \Psi_4 \subset \{\lim_{t\to\infty} X(t) \leqslant b_1\}.$$

Отсюда

$$\mathbf{P}_x(\Psi_3 |\, \sigma_\Delta = \infty) \leqslant \mathbf{P}_x(\lim_{t\to\infty} X(t) \geqslant a_2 \,|\, \sigma_\Delta = \infty),$$

$$\mathbf{P}_x(\Psi_4 |\, \sigma_\Delta = \infty) = 1 - \mathbf{P}_x(\Psi_3 |\, \sigma_\Delta = \infty) \leqslant \mathbf{P}_x(\lim_{t\to\infty} X(t) \leqslant b_1 \,|\, \sigma_\Delta = \infty)$$
$$= 1 - \mathbf{P}_x(\lim_{t\to\infty} X(t) > b_1 \,|\, \sigma_\Delta = \infty).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_x(\lim_{t\to\infty} X(t) > b_1 \,|\, \sigma_\Delta = \infty) \leqslant \mathbf{P}_x(\Psi_3 |\, \sigma_\Delta = \infty)$$
$$\leqslant \mathbf{P}_x\big(\lim_{t\to\infty} X(t) \geqslant a_2 \,|\, \sigma_\Delta = \infty\big).$$

При $b_1 \to a_2$ левый член этого двойного неравенства стремится к правому в любой точке непрерывности искомой функции распределения. Отсюда

$$\mathbf{P}_x\big(\lim_{t\to\infty} X(t) \geqslant a_2 \,|\, \sigma_\Delta = \infty\big) = \lim_{b_1\to a_2} \mathbf{P}_x(\Psi_3 |\, \sigma_\Delta = \infty).$$

Пусть $y = a_2$ и $h = b_1 - a_2$. Из определения следует

$$\mathbf{P}_x(\Psi_3) = M_{\Delta_2}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} G_{\Delta_2}(x) H_{\Delta_1}(y) (G_{\Delta_2}(y+h) H_{\Delta_1}(y))^n M_{\Delta_2}(y+h)$$
$$= M_{\Delta_2}(x) + G_{\Delta_2}(x) H_{\Delta_1}(y) \frac{M_{\Delta_2}(y+h)}{1 - G_{\Delta_2}(y+h) H_{\Delta_1}(y)}.$$

При этом

$$G_{\Delta_2}(y+h) = G_{\Delta_2}(y+h) - G_{\Delta_2}(y) + 1 = 1 + G'_{\Delta_2}(y+)h + o(h),$$
$$H_{\Delta_2}(y+h) = H_{\Delta_2}(y+h) - H_{\Delta_2}(y) = H'_{\Delta_2}(y+)h + o(h),$$
$$H_{\Delta_1}(y) = \frac{H_\Delta(y)}{H_\Delta(y+h)} = 1 - \frac{H'_\Delta(y+)h}{H_\Delta(y)} + o(h).$$

Из полумарковского свойства следует $H_\Delta(y-h) = H_{(a,y)}(y-h) H_\Delta(y)$, откуда

$$\frac{1}{h}\left(H_{(a,y)}(y-h) - 1\right) \to \frac{-H'_\Delta(y-)}{H_\Delta(y)},$$

и если производная H'_Δ непрерывна в точке y, то

$$H_{\Delta_1}(y) = 1 - H'_{\Delta_1}(y-)h + o(h).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_x(\Psi_3) \to M_{\Delta_2}(x) + G_{\Delta_2}(x) \frac{-H'_{\Delta_2}(y+) - G'_{\Delta_2}(y+)}{H'_{\Delta_1}(y-) - G'_{\Delta_2}(y+)}$$

почти для всех y. Отсюда

$$\mathbf{P}_x(\lim_{t\to\infty} X(t) \geqslant y \,|\, \sigma_\Delta = \infty)$$
$$= M_\Delta^{-1}(x) \left(M_{\Delta_2}(x) + G_{\Delta_2}(x) \frac{-H'_{\Delta_2}(y+) - G'_{\Delta_2}(y+)}{H'_{(a,y)}(y) - G'_{\Delta_2}(y+)} \right),$$

или

$$\mathbf{P}_x(\lim_{t\to\infty} X(t) < y \,|\, \sigma_\Delta = \infty) = 1 - \mathbf{P}_x(\lim_{t\to\infty} X(t) \geqslant y \,|\, \sigma_\Delta = \infty)$$
$$= M_\Delta^{-1}(x)\left(M_\Delta(x) - M_{\Delta_2}(x) + G_{\Delta_2}(x)\frac{G'_{\Delta_2}(y+) + H'_{\Delta_2}(y+)}{-G'_{\Delta_2}(y+) + H'_{(a,y)}(y-)}\right).$$

После использования формул (12) получаем

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{P}_x(\Psi_3) = -G_\Delta(x) + G_{\Delta_2}(x) - G_\Delta(x)\frac{G'_{\Delta_2}(y+)}{G'_{\Delta_1}(y-)},$$

где $\Delta_1 = (a, y)$, $\Delta_2 = (y, b)$. □

Пусть

$$f(x, y) \equiv \mathbf{P}_x(\lim_{t\to 0} X(t) < y,\, \sigma_\Delta = \infty) \equiv Q_\Delta(y \,|\, x) M_\Delta(x),$$

где $x, y \in \Delta \equiv (a, b)$. Согласно теореме 2 эта функция имеет разные аналитические представления на областях $\{x < y\}$ и $\{x > y\}$. Будем обозначать первое представление как $f_1(x, y)$ и второе $f_2(x, y)$. Покажем, что эта функция непрерывна на линии $\{x = y\}$, т. е. что равны два предела $\lim\limits_{x\to y} f_1(x, y) \equiv f_1(y, y)$ и $\lim\limits_{x\to y} f_2(x, y) \equiv f_2(y, y)$. Действительно, имеем при $x \to y$

$$f_1(x, y) = 1 - G_\Delta(x) - H_{\Delta_1}(x) + H_\Delta(x)\,\frac{H'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_2}(y+)}$$
$$\to -G_\Delta(y) + H_\Delta(y)\,\frac{H'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_2}(y+)} \equiv f_1(y, y);$$
$$f_2(x, y) = -G_\Delta(x) + G_{\Delta_2}(x) - G_\Delta(x)\frac{G'_{\Delta_2}(y+)}{G'_{\Delta_1}(y-)}$$
$$\to -G_\Delta(y) + 1 - G_\Delta(y)\frac{G'_{\Delta_2}(y+)}{G'_{\Delta_1}(y-)} \equiv f_2(y, y).$$

При этом, используя формулы (12), получаем, что для почти всех y

$$f_1(y, y) - f_2(y, y) = \frac{H'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_1}(y-) - G'_{\Delta_2}(y+)} - 1 + \frac{-G'_{\Delta_2}(y+)}{H'_{\Delta_1}(y-) - G'_{\Delta_2}(y+)} = 0.$$

Следствие 1. *Если выполняются условия теоремы* 2, *то*

$$f_1(x, y) = 1 - G_{\Delta_1}(x) - H_{\Delta_1}(x) + H_{\Delta_1}(x) f(y, y), \tag{13}$$
$$f_2(x, y) = G_{\Delta_2}(x) f(y, y), \tag{14}$$

где в каждой формуле для $f(y,y)$ может быть использовано любое из двух представлений

$$f(y,y) \equiv f_1(y,y) = -G_\Delta(y) + H_\Delta(y)\,\frac{H'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_2}(y+)},$$

$$f(y,y) \equiv f_2(y,y) = 1 - G_\Delta(y) - G_\Delta(y)\,\frac{G'_{\Delta_2}(y+)}{G'_{\Delta_1}(y-)}.$$

Доказательство. Обозначим

$$r_G = \frac{G'_{\Delta_2}(y+)}{G'_{\Delta_1}(y-)}, \quad r_H = \frac{H'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_2}(y+)}.$$

Из двух представлений $f(y,y)$ получаем формулы для r_H и r_G

$$r_G = \frac{f(y,y) + G_\Delta(y) - 1}{-G_\Delta(y)}, \quad r_H = \frac{f(y,y) + G_\Delta(y)}{H_\Delta(y)}.$$

Подставляя эти выражения в соответствующие формулы, получаем доказательство следствия. □

Заметим, что $G'_{\Delta_1}(y-) \to -\infty$ и $G'_{\Delta_2}(y+) \to G'_\Delta(a+) > -\infty$, если $y \to a$, а также $H'_{\Delta_2}(y+) \to \infty$ и $H'_{\Delta_1}(y-) \to H'_\Delta(b-) < \infty$, если $y \to b$. Отсюда следует, что

$$Q_\Delta(a\,|\,x) = 0, \quad Q_\Delta(b\,|\,x) = 1 \quad (\forall x \in \Delta).$$

Пример. Рассмотрим уравнение (8) с постоянными коэффициентами $A(x) \equiv A$, $B(0,x) \equiv B$ на интервале $\Delta = (a,b)$. Решая однородное дифференциальное уравнение с заданными граничными условиями, получаем

$$G_\Delta(x) = e^{-A(x-a)}\,\frac{\operatorname{sh}(b-x)r}{\operatorname{sh}(b-a)r}, \quad H_\Delta(x) = e^{A(b-x)}\,\frac{\operatorname{sh}(x-a)r}{\operatorname{sh}(b-a)r},$$

где $r = \sqrt{A^2 + 2B}$. Отсюда

$$G_\Delta(x) \sim e^{-A(x-a)}\,\frac{2\operatorname{sh}(b-x)r}{e^{(b-a)r}} = e^{-(x-a)(r+A)}\,\frac{2\operatorname{sh}(b-x)r}{e^{(b-x)r}} \to 0 \quad (a \to -\infty),$$

$$H_\Delta(x) \sim e^{A(b-x)}\,\frac{2\operatorname{sh}(x-a)r}{e^{(b-a)r}} = e^{-(b-x)(r-A)}\,\frac{2\operatorname{sh}(x-a)r}{e^{(x-a)r}} \to 0 \quad (b \to \infty).$$

Найдём предел финального распределения при $a \to -\infty$, $b \to \infty$. Очевидно, что $\mathbf{P}_x(\mu(\Delta)) \to 1$, а также при $x < y$

$$Q_\Delta(y\,|\,x) \sim 1 - H_{\Delta_1}(x) + H_\Delta(x)\frac{H'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_2}(y+)}.$$

Далее

$$H_{\Delta_1}(x) = e^{(y-x)A}\frac{\operatorname{sh}(x-a)r}{\operatorname{sh}(y-a)r} \sim e^{(y-x)A}\frac{e^{(x-a)r}}{e^{(y-a)r}} = e^{-(y-x)(r-A)} \quad (a\to-\infty),$$

$$H'_{\Delta_1}(y-) = -A + r\,\frac{\operatorname{ch}(y-a)r}{\operatorname{sh}(y-a)r}, \quad H'_{\Delta_2}(y+) = r\,e^{(b-y)A}/\operatorname{sh}(b-y)r,$$

$$\begin{aligned} H_\Delta(x)&\frac{H'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_2}(y+)} \\ &\sim e^{-(b-x)(r-A)}\left(\frac{2\operatorname{sh}(x-a)r}{e^{(x-a)r}}\right)\frac{-A + r\operatorname{ch}(y-a)r/\operatorname{sh}(y-a)r}{re^{(b-y)A}/\operatorname{sh}(b-y)r} \\ &\sim \frac{1}{2}\left(1-\frac{A}{r}\right)e^{-(y-x)(r-A)}, \end{aligned}$$

откуда

$$Q_\Delta(y\,|\,x) \sim 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{r}\right)e^{-(y-x)(r-A)}.$$

Для случая $x > y$ имеем

$$Q_\Delta(y\,|\,x) \sim G_{\Delta_2}(x) - G_\Delta(x)\frac{G'_{\Delta_2}(y+)}{G'_{\Delta_1}(y-)},$$

$$G'_{\Delta_2}(y+) = -A - r\frac{\operatorname{ch}(b-y)r}{\operatorname{sh}(b-y)r}, \quad G'_{\Delta_1}(y-) = -r\,\frac{e^{-(y-a)A}}{\operatorname{sh}(y-a)r},$$

$$\begin{aligned} G_\Delta(x)&\frac{G'_{\Delta_2}(y+)}{G'_{\Delta_1}(y-)} \\ &\sim e^{-(x-a)(r+A)}\left(\frac{2\operatorname{sh}(b-x)r}{e^{(b-x)r}}\right)\frac{-A - r\operatorname{ch}(b-y)r/\operatorname{sh}(b-y)r}{-r\,e^{-(y-a)A}/\operatorname{sh}(y-a)r} \\ &\sim \frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{r}\right)e^{-(x-y)(r+A)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$Q_\Delta(y\,|\,x) \sim \frac{1}{2}\left(1-\frac{A}{r}\right)e^{-(x-y)(r+A)}.$$

Плотность финальной меры для одномерного диффузионного процесса с характеристическим оператором

$$\mathcal{A}f = \frac{1}{2}f'' + A\,f' - B\,f$$

и областью определения $(-\infty, \infty)$ имеет вид

$$q(y \mid x) = \begin{cases} \frac{B}{r}\, e^{-(x-y)(r+A)} & x > y, \\ \frac{B}{r}\, e^{-(y-x)(r-A)} & x < y, \end{cases} \tag{15}$$

где $B > 0$ и $r = \sqrt{A^2 + 2B}$.

§3. Распределение времени до начала остановки

Располагая формулой $\mathbf{P}_x(C^{\lim} \mid \sigma_{(a,b)} = \infty) = 1$ и распределением $Q_{(a,b)}(y \mid x)$, естественно задать вопрос, можно ли в первом выражении заменить $C^{\lim}$ на его правильное подмножество C^{∞} (непрерывные траектории с бесконечным интервалом постоянства – с остановкой), и, если это так, то, как распределено время до начала этой остановки, которое мы обозначаем ζ. Отсутствие остановки можно отождествить с бесконечным временем до начала остановки. Таким образом, нам надо отличить конечный момент ζ от бесконечного, при котором для любого t_0 существует $t_1 > t_0$, такое что $X(t_1) \neq \lim\limits_{t\to\infty} X(t)$.

Для нахождения распределение величины ζ мы рассмотрим последовательность ступенчатых полумарковских процессов, порожденных данным процессом и последовательностью так называемых правильных покрытий интервала Δ интервалами конечной длины. Пусть покрытие $\gamma = (\Delta_k)_1^m$ строится по конечному числу граничных точек внутри интервала $\Delta = (a, b)$

$$a \equiv c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_m < c_{m+1} \equiv b \quad (m \geqslant 1),$$

таким образом, что

$$\Delta_1 = (c_0, c_2),\ \Delta_2 = (c_1, c_3),\ \Delta_3 = (c_2, c_4), \dots, \Delta_m = (c_{m-1}, c_{m+1}).$$

Такое покрытие мы называем правильным. Рангом покрытия называется наибольшая из длин интервалов покрытия.

Фиксируем правильное покрытие и меньший из номеров элементов покрытия, покрывающих начальную точку процесса $x \in \Delta$, обозначаемый как $N(x)$ (таких номеров не больше двух). Пусть $N(x) = k$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$. Определим отображение $L_\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ – пространство Скорохода (функции непрерывные справа и имеющие предел слева в любой точке $t > 0$). Пусть $\xi(0) = x$. Функция $L_\gamma \xi$ – кусочно постоянная функция, принимающая конечное число значений. Кроме начальной точки x она принимает значения из множества граничных точек интервалов покрытия γ, совершая конечное число скачков на

каждом конечном отрезке времени. Каждому возможному значению ступенчатой функции соответствует единственный интервал значений исходной функции ξ. В частности, для a это $(-\infty, c_1)$ и для b это (c_m, ∞). Функция $L_\gamma \xi$ (если не равна константе x) совершает скачки в моменты (τ_n) $(n \geqslant 1)$ первого выхода функции ξ или сдвинутых функций $\theta_{\tau_n - 1}(\xi)$ из соответствующих интервалов (если такого выхода для ξ не существует, то функция останавливается в последней достигнутой точке), Так если $\tau_n(\xi)$ очередной скачок из состояния c_p в состояние c_q, то процесс $L_\gamma \xi$ сохраняет постоянное значение c_q на интервале $[\tau_n(\xi), (\tau_n \dot{+} \sigma_{\Delta_q}))$ (понимая под Δ_q бесконечные интервалы, если $q = 0$ или $q = m + 1$).

Измеримое отображение L_γ индуцирует меру ступенчатого полумарковского процесса $(X \circ L_\gamma)(t)$, который мы называем вложенной полумарковской цепью. Эволюция полумарковской цепи до момента $\sigma_\Delta \circ L_\gamma$ задаётся следующими объектами: 1) начальным состоянием x и номером $N(x)$ начального интервала из покрытия γ, которому он принадлежит; 2) множеством регулярных возможных состояний $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, задающих последовательность интервалов $\Delta_k = (c_{k-1}, c_{k+1})$, где $c_0 = a$, $c_{m+1} = b$; 3) временем пребывания в начальном состоянии или бесконечным с вероятностью $M_{\Delta_{N(x)}}(x)$, или конечным, задаваемым функциями $g_{\Delta_{N(x)}}(\lambda, x)$ и $h_{\Delta_{N(x)}}(\lambda, x)$; 4) матрицей $S(\lambda)$ лапласовых образов времён регулярных переходов из граничной точки предыдущего интервала покрытия на границу следующего интервала покрытия, 5) вектором вероятностей остановки в точках регулярного множества состояний

$$M = (M_{\Delta_1}(c_1), M_{\Delta_2}(c_2), \ldots, M_{\Delta_m}(c_m))^T$$

(T – транспонирование)..

Элемент $S_{ij}(\lambda)$ матрицы $S(\lambda)$ определяет математическое ожидание величины $\exp(-\lambda \sigma_{\Delta_i})$ на множестве $\{\sigma_{\Delta_i} < \infty,\ X(\sigma_{\Delta_i}) = c_j\}$ при условии, что исходный процесс начинается из точки c_i. Величина $\sum\limits_{j=1}^{m} S_{ij}(0) M_{\Delta_j}(c_j)$ представляет собой вероятность остановки полумарковской цепи сразу после первого скачка при том же начальном условии.

Из полумарковского свойства исходного процесса следует, что n-ая степень матрицы S характеризует состояние процесса в момент n-го скачка вложенной полумарковской цепи, который мы обозначим τ_n,

на множестве $\{\tau_n < \sigma_\Delta \circ L_\gamma\}$. По определению, на множестве $\{\tau_{n-1} < \infty,\, X(\tau_{n-1}) = c_k\}$ полагаем

$$\tau_n = \tau_{n-1} \dot{+} \sigma_{\Delta_k} \quad (n \geqslant 1).$$

Докажем формулу

$$S_{ij}^n(\lambda) = \mathbf{E}_{c_i}(e^{-\lambda\tau_n};\, X(\tau_n) = c_j,\, \tau_n < \sigma_\Delta) \quad (i,\, j = 1, \dots m). \tag{16}$$

Действительно, перепишем (16) в виде

$$S_{ij}^n(\lambda) = \mathbf{E}_{c_i}(e^{-\lambda\tau_n};\, \tau_n < \infty,\, X(\tau_1), \dots, X(\tau_{n-1}) \in \Delta,\, X(\tau_n) = c_j).$$

При $n = 1$ формула верна, если определить $\tau_1 = \sigma_{\Delta_i}$. Далее из предположения (16) и из полумарковского свойства следует

$$\begin{aligned}
S_{kp}^{n+1}(\lambda) &= \sum_{i=1}^m \mathbf{E}_{c_k}\Big(e^{-\lambda\tau_n};\, \tau_n < \infty,\, X(\tau_1), \dots, X(\tau_{n-1}) \in \Delta,\, X(\tau_n) = c_i\Big) \\
&\qquad \times \mathbf{E}_{c_i}\Big(e^{-\lambda\sigma_{\Delta_i}};\, \sigma_{\Delta_i} < \infty, X(\sigma_{\Delta_i}) = c_p\Big) \\
&= \sum_{i=1}^m \mathbf{E}_{c_k}\Big(e^{-\lambda\tau_n} e^{-\lambda\sigma_{\Delta_i} \circ \theta_{\tau_n}};\, \sigma_{\Delta_i} \circ \theta_{\tau_n} < \infty, X(\sigma_{\Delta_i}) \circ \theta_{\tau_n} = c_p, \\
&\qquad \tau_n < \infty, X(\tau_1), \dots, X(\tau_{n-1}) \in \Delta,\, X(\tau_n) = c_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^m \mathbf{E}_{c_k}\Big(e^{-\lambda\tau_{n+1}};\, \tau_{n+1} < \infty,\, X(\tau_{n+1}) = c_p, \\
&\qquad X(\tau_1), \dots, X(\tau_{n-1}) \in \Delta,\, X(\tau_n) = c_i\Big) \\
&= \mathbf{E}_{c_k}\Big(e^{-\lambda\tau_{n+1}};\, \tau_{n+1} < \infty,\, X(\tau_1), \dots, X(\tau_n) \in \Delta,\, X(\tau_{n+1}) = c_p\Big).
\end{aligned}$$

Значит, формула (16) верна для всех n.

При $\lambda = 0$ из формулы (16) следует, что

$$S_{ij}^n(0) = \mathbf{P}_{c_i}\big(\tau_n < \infty,\, X(\tau_1), \dots, X(\tau_{n-1}) \in \Delta,\, X(\tau_n) = c_j\big).$$

Таким образом, $S^n(0)M$ – это вектор вероятностей остановки полумарковской цепи сразу после n-ого скачка, а $S^n(\lambda)M$ – вектор математических ожиданий величины $e^{-\lambda\tau_n}$ при разных точках остановки на множестве $\{\tau_n < \infty,\, \tau_{n+1} = \infty\}$.

Обозначим ζ_γ момент остановки вложенной полумарковской цепи, порождённой покрытием γ. По определению, $\zeta_\gamma = \tau_n$ на множестве $\{\tau_n < \infty, \tau_{n+1} = \infty\}$. Для процесса, управляемого уравнением (7)

при $B(0,x) > 0$, справедливо $\mathbf{P}_x(\sigma_\Delta = \infty) > 0$ и $\mathbf{P}_x(\zeta_\gamma < \infty \,|\, \sigma_\Delta = \infty) = 1$. Эта вероятность может быть выражена в терминах функций G_{Δ_k}, H_{Δ_k}, M_{Δ_k}. Мы выведем эту вероятность как следствие формулы, представляющей математическое ожидание $\mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty \,|\, \sigma_\Delta = \infty)$, выраженное в терминах $g_{\Delta_k}(\lambda,\cdot)$, $h_{\Delta_k}(\lambda,\cdot)$ и M_{Δ_k}. Чтобы сгруппировать члены по отношению к x, воспользуемся терминальным свойством момента ζ_γ, которое формулируется для марковских моментов τ, а именно, если $\tau < \zeta_\gamma$, то $\zeta_\gamma = \tau \dotplus \zeta_\gamma$. Отсюда при $x \in \Delta$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x\big(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, \sigma_\Delta = \infty\big)\\
&\quad= \sum_{k=1}^{m} \mathbf{E}_x\Big(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty\Big)\\
&\quad= \sum_{c_k<x} \mathbf{E}_x\Big(e^{-\lambda\sigma_{(c_k,b)} \dotplus \zeta_\gamma};\, \sigma_{(c_k,b)} \dotplus \zeta_\gamma < \infty,\, X(\sigma_{(c_k,b)} \dotplus \zeta_\gamma) = c_k,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sigma_{(c_k,b)} \dotplus \sigma_\Delta = \infty\Big)\\
&\quad+ \sum_{c_k>x} \mathbf{E}_x\Big(e^{-\lambda\sigma_{(a,c_k)} \dotplus \zeta_\gamma};\, \sigma_{(a,c_k)} \dotplus \zeta_\gamma < \infty,\, X(\sigma_{(a,c_k)} \dotplus \zeta_\gamma) = c_k,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sigma_{(a,c_k)} \dotplus \sigma_\Delta = \infty\Big)\\
&\quad= \sum_{c_k<x} \mathbf{E}_x\Big(e^{-\lambda\sigma_{(c_k,b)}};\, \sigma_{(c_k,b)} < \infty,\, X(\sigma_{(c_k,b)}) = c_k\Big)\\
&\qquad\qquad \times \mathbf{E}_{c_k}\Big(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty\Big)\\
&\quad+ \sum_{c_k>x} \mathbf{E}_x\Big(e^{-\lambda\sigma_{(a,c_k)}};\, \sigma_{(a,c_k)} < \infty,\, X(\sigma_{(a,c_k)}) = c_k\Big)\\
&\qquad\qquad \times \mathbf{E}_{c_k}\Big(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty\Big)\\
&\quad= \sum_{c_k<x} g_{(c_k,b)}(\lambda,x)\mathbf{E}_{c_k}\Big(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty\Big)\\
&\quad+ \sum_{c_k>x} h_{(a,c_k)}(\lambda,x)\mathbf{E}_{c_k}\Big(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty\Big).
\end{aligned}
$$

Замечаем, что задача свелась к нахождению искомого математического ожидания при регулярных начальных точках процесса. Особенно просто выглядит задача, если $m = 3$, когда оба не зависящих от x множителя определяются процессом, выходящим из точки c_2.

Покажем, что при любом $m \geqslant 3$ и $1 < k < m$ нахождение функции $\mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty)$ может быть сведено к случаю $m = 3$ (сведено к случаю $m = 2$ для "краевых" интервалов покрытия, когда $k = 1$ или $k = m$)

В случае $1 < k < m$ к варианту $m = 3$ переходим, удалив все внутренние граничные точки с номерами меньше $k - 1$ и больше $k + 1$. В новом трёхточечном правильном покрытии содержатся три интервала $\widetilde{\Delta}_1 = (a, c_k)$ $\widetilde{\Delta}_2 = \Delta_k \equiv (c_{k-1}, c_{k+1})$ и $\widetilde{\Delta}_3 = (c_k, b)$. Очевидно, что удаление граничных точек покрытия никак не сказывается на исходном процессе, по которому строятся полумарковские цепи. С другой стороны, удаление граничных точек покрытия, например, из правой группы точек приводит к использованию двух функций $g_{(c_k,b)}(\lambda, c_{(k+1)})$ и $M_{(c_k,b)}(c_{(k+1)})$, которые могут быть выражены по закону полумарковского процесса через композицию функций

$$g_{\Delta_{k+i}}(\lambda, c_{k+i}), \quad h_{\Delta_{k+i}}(\lambda, c_{k+i}), \quad M_{\Delta_{k+i}}(c_{k+i}),$$

$(i = 1, \ldots, m - k)$, которые описывают вероятности всех траекторий исходной полумарковской цепи от момента первого попадания в точку c_{k+1} до первого выхода из интервала (c_k, c_{m+1}) через левую границу или остановку в нём. Например, если $k = m - 2$ и убирается только одна граница c_m, то

$$g_{(c_k,b)}(\lambda, c_{k+1}) = \frac{g_{\Delta_{k+1}}(\lambda, c_{k+1})}{1 - h_{\Delta_{k+1}}(\lambda, c_{k+1}) g_{\Delta_{k+2}}(\lambda, c_{k+2})},$$
$$M_{(c_k,b)}(c_{k+1}) = \frac{M_{\Delta_{k+1}}(c_{k+1}) + h_{\Delta_{k+1}}(\lambda, c_{k+1}) M_{\Delta_{k+2}}(c_{k+2})}{1 - h_{\Delta_{k+1}}(\lambda, c_{k+1}) g_{\Delta_{k+2}}(\lambda, c_{k+2})}.$$

Формулы будут более громоздкими, если удалить две или больше граничных точек. В данной работе эти формулы нам не понадобятся.

При $m = 3$ получаем матрицу регулярных переходных функций

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & h_{\Delta_1}(\lambda, c_1) & 0 \\ g_{\Delta_2}(\lambda, c_2) & 0 & h_{\Delta_2}(\lambda, c_2) \\ 0 & g_{\Delta_3}(\lambda, c_3) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для изучения её степеней рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \quad (a,\, b,\, c,\, d > 0).$$

Нечётные степени этой матрицы имеют тот же порядок размещения нулей и положительных элементов, что и A, а у чётных степеней нули стоят на месте положительных значений исходной матрицы. Отсюда получаем значения элементов второго столбца у всех степеней матрицы A

$$A_{12}^{2(n+1)+1} = A_{12}^{2n+1}(ab+cd), \quad A_{12}^{2n+1} = a(ab+cd)^n \quad (n \geqslant 0),$$

и аналогичным образом, получаем

$$A_{22}^{2n} = (ab+cd)^n \quad (n \geqslant 1), \quad A_{32}^{2n+1} = d(ab+cd)^n \quad (n \geqslant 0), .$$

Отсюда

$$S_{22}^{2n}(\lambda) = (h_{\Delta_1}(\lambda,\, c_1) g_{\Delta_2}(\lambda,\, c_2) + h_{\Delta_2}(\lambda,\, c_2) g_{\Delta_3}(\lambda,\, c_3))^n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{c_2}\big(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_2,\, \sigma_\Delta = \infty\big) \\
&\quad = M_{\Delta_2}(c_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_{c_2}\Big(e^{-\lambda\tau_n};\, \tau_n < \infty,\, \tau_{n+1} = \infty,\, X(\tau_n) \\
&\qquad\qquad\qquad = c_2,\, X(\tau_1), \dots X(\tau_{n-1}) \in \Delta\Big) \\
&\quad = M_{\Delta_2}(c_2) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{\Delta_2}(c_2) \mathbf{E}_{c_2}\Big(e^{-\lambda\tau_n};\, \tau_n < \infty,\, X(\tau_n) \\
&\qquad\qquad\qquad = c_2,\, X(\tau_1), \dots X(\tau_{n-1}) \in \Delta\Big) \\
&\quad = M_{\Delta_2}(c_2) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{\Delta_2}(c_2) S_{22}^n(\lambda) \\
&\quad = M_{\Delta_2}(c_2) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{\Delta_2}(c_2)(h_{\Delta_1}(\lambda, c_1) g_{\Delta_2}(\lambda, c_2)) + h_{\Delta_2}(\lambda,\, c_2) g_{\Delta_3}(\lambda, c_3))^n \\
&\quad = \frac{M_{\Delta_2}(c_2)}{1 - h_{\Delta_1}(\lambda,\, c_1) g_{\Delta_2}(\lambda,\, c_2)) - h_{\Delta_2}(\lambda,\, c_2) g_{\Delta_3}(\lambda,\, c_3)}.
\end{aligned}$$

При $\lambda = 0$ получаем

$$\begin{aligned}
&P_{c_2}(\zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_2,\, \sigma_\Delta = \infty) \\
&\qquad\qquad = \frac{M_{\Delta_2}(c_2)}{1 - H_{\Delta_1}(c_1) G_{\Delta_2}(c_2)) - H_{\Delta_2}(c_2) G_{\Delta_3}(c_3)}.
\end{aligned}$$

При $m = 2$ матрица регулярных переходных функций имеет вид

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & h_{\Delta_1}(\lambda, c_1) \\ g_{\Delta_2}(\lambda, c_2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для изучения её степеней рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (a,\, b > 0).$$

Нечётные степени этой матрицы имеют тот же порядок размещения нулей и положительных элементов, что и B, а у чётных степеней нули стоят на месте положительных значений исходной матрицы. Отсюда получаем значения элементов степеней матрицы B

$$B_{11}^{2n} = (ab)^n \quad (n \geqslant 1), \quad B_{12}^{2n+1} = a(ab)^n \quad (n \geqslant 0),$$

$$B_{21}^{2n+1} = b(ab)^n \quad (n \geqslant 0), \quad B_{22}^{2n} = (ab)^n \quad (n \geqslant 1)$$

и, следовательно,

$$S_{11}^{2n}(\lambda) = S_{22}^{2n}(\lambda) = (h_{\Delta_1}(\lambda, c_1) g_{\Delta_2}(\lambda, c_2))^n.$$

Далее

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{c_1}(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_1,\, \sigma_\Delta = \infty) \\
&\qquad = M_{\Delta_1}(c_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_{c_1}(e^{-\lambda\tau_n};\, \tau_n < \infty,\, \tau_{n+1} = \infty, \\
&\qquad\qquad\qquad X(\tau_n) = c_1,\, X(\tau_1), \ldots, X(\tau_{n-1}) \in \Delta) \\
&\qquad = M_{\Delta_1}(c_1) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{\Delta_1}(c_1) \mathbf{E}_{c_1}(e^{-\lambda\tau_n};\, \tau_n < \infty, \\
&\qquad\qquad\qquad X(\tau_n) = c_1,\, X(\tau_1), \ldots, X(\tau_{n-1}) \in \Delta) \\
&\qquad = M_{\Delta_1}(c_1) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{\Delta_1}(c_1) S_{11}^n(\lambda) \\
&\qquad = M_{\Delta_1}(c_1) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{\Delta_1}(c_1) (h_{\Delta_1}(\lambda, c_1) g_{\Delta_2}(\lambda, c_2))^n \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{M_{\Delta_1}(c_1)}{1 - h_{\Delta_1}(\lambda, c_1) g_{\Delta_2}(\lambda, c_2)};
\end{aligned}$$

а также

$$\mathbf{E}_{c_2}(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_2,\, \sigma_\Delta = \infty) = \frac{M_{\Delta_2}(c_2)}{1 - h_{\Delta_1}(\lambda, c_1) g_{\Delta_2}(\lambda, c_2)}.$$

Итак, при $x \in \Delta$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, \sigma_\Delta = \infty)\\
&\quad = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty)\\
&\quad = \sum_{a<c_k<x} \mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty)\\
&\qquad + \sum_{x<c_k<b} \mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty)\\
&\quad = \sum_{a<c_k<x} g_{(c_k,b)}(\lambda, x) \mathbf{E}_{c_k}(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty)\\
&\qquad + \sum_{x<c_k<b} h_{(a,c_k)}(\lambda, x) \mathbf{E}_{c_k}(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, X(\zeta_\gamma) = c_k,\, \sigma_\Delta = \infty)\\
&\quad = \sum_{a<c_k<x} \frac{g_{(c_k,b)}(\lambda, x)\, M_{\Delta_k}(c_k)}{1 - h_{(a,c_k)}(\lambda, c_{k-1}) g_{\Delta_k}(\lambda, c_k) - g_{(c_k,b)}(\lambda, c_{k+1}) h_{\Delta_k}(\lambda, c_k)}\\
&\qquad + \sum_{x<c_k<b} \frac{h_{(a,c_k)}(\lambda, x)\, M_{\Delta_k}(c_k)}{1 - h_{(a,c_k)}(\lambda, c_{k-1}) g_{\Delta_k}(\lambda, c_k) - g_{(c_k,b)}(\lambda, c_{k+1}) h_{\Delta_k}(\lambda, c_k)},
\end{aligned}$$

где $h_{(a,c_1)}(\lambda, c_0) = g_{(c_m,b)}(\lambda, c_{m+1}) = 0$.

Наша очередная задача состоит в доказательстве сходимости $\zeta_\gamma \to \zeta$ при $\epsilon \to 0$, где ϵ – ранг покрытия γ. Для этой цели удобно использовать некоторый регулярный метод построения последовательности правильных покрытий с убывающими рангами.

По данному покрытию $\gamma(\epsilon)$ правильное покрытие с рангом $\epsilon/2$ строится простым делением нечётных интервалов пополам и дополнением таким образом образованной новой последовательности нечётных интервалов чётными элементами покрытия, представляющими собой интервалы между средними точками соседних нечётных интервалов. Назовём такую операцию правильным дроблением. Пусть покрытие γ_2 получено правильным дроблением из правильного покрытия γ_1, Ясно, что в этом случае $\zeta_{\gamma_1} \leqslant \zeta_{\gamma_2} \leqslant \zeta$. Пусть $(\gamma_n)_1^\infty$ – последовательность

правильных покрытий, из которых каждое следующее получено с помощью правильного дробления из предыдущего. Моменты остановки (ζ_n), соответствующие этим покрытиям – это неубывающая последовательность измеримых функций, заданных на одном вероятностном пространстве. Такая последовательность сходится почти наверное.

Лемма 2. *Последовательность* (ζ_n) *сходится* $\mathbf{P}_x$*-почти наверное к* ζ *на множестве* $\{\sigma_\Delta = \infty\}$.

Доказательство. Из определения ζ_n следует, что для любой функции $\xi \in \mathcal{C}^{\lim}$

$$\sup_{t \geqslant \zeta_n} |\xi(t) - \xi(\zeta_n)| \leqslant \epsilon_n.$$

Из того, что при любом $n \geqslant 1 \quad \zeta_n \leqslant \zeta_{n+1}$, следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n \equiv \zeta_\infty$ $\mathbf{P}_x$-почти наверное, где $\zeta_\infty \geqslant \zeta_n$. Очевидно, что $\zeta \geqslant \zeta_n$. Отсюда следует, что при любом $t > 0 \quad |\xi(\zeta_\infty + t) - \xi(\zeta)| \leqslant 2\epsilon_n$, и из произвольности n и ξ следует, что эти две величины равны $\mathbf{P}_x$-почти наверное. Следовательно, $\zeta_\infty = \zeta \quad \mathbf{P}_x$-почти наверное. $\square$

Отсюда следует

$$\mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta};\, \sigma_\Delta = \infty) = \mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda\zeta_n};\, \sigma_\Delta = \infty)$$
$$+ \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta_n};\, \zeta_n < \infty,\, X(\zeta_n) = c_{n,k},\, \sigma_\Delta = \infty).$$

где m_n и $c_{n,k}$ – число интервалов и внутренняя граничная точка покрытия γ_n. Следовательно,

$$\mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, \sigma_\Delta = \infty) = \mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda\zeta_n};\, \sigma_\Delta = \infty)$$
$$+ \sum_{k:a<c_{n,k}<x} \frac{g_{(c_{n,k},b)}(\lambda, x) M_{\Delta_{n,k}}(c_{n,k})}{1 - h_{(a,c_{n,k})}(\lambda, c_{n,k-1}) g_{\Delta_{n,k}}(\lambda, c_{n,k}) - g_{(c_{n,k},b)}(\lambda, c_{n,k+1}) h_{\Delta_{n,k}}(\lambda, c_{n,k})}$$
$$+ \sum_{k:x<c_{n,k}<b} \frac{h_{(a,c_{n,k})}(\lambda, x) M_{\Delta_{n,k}}(c_{n,k})}{1 - h_{(a,c_{n,k})}(\lambda, c_{n,k-1}) g_{\Delta_{n,k}}(\lambda, c_{n,k}) - g_{(c_{n,k},b)}(\lambda, c_{n,k+1}) h_{\Delta_{n,k}}(\lambda, c_{n,k})}.$$

Обозначим $\epsilon_{n,k}$ длину интервала $\Delta_{n,k}$. Из определения полумарковского процесса диффузионного типа следует, что при $n \to \infty$

$$M_{\Delta_{n,k}}(c_{n,k}) = B(0, c_{n,k})\epsilon_{n,k}^2 + o(\epsilon_{n,k}^2)$$

$$g_{\Delta_{n,k}}(\lambda, c_{n,k}) = \frac{1}{2}(1 - A(c_{n,k})\epsilon_{n,k}) + o(\epsilon_{n,k})$$

$$h_{\Delta_{n,k}}(\lambda, c_{n,k}) = \frac{1}{2}(1 + A(c_{n,k})\epsilon_{n,k}) + o(\epsilon_{n,k})$$

Из существования производных на краях интервалов у функций $g_{(c_{n,k},b)}(\lambda, x)$ и $h_{(a,c_{n,k})}(\lambda, x)$ следует

$$\begin{aligned} g_{(c_{n,k},b)}(\lambda, c_{n,k+1}) &= g_{(c_{n,k},b)}(\lambda, c_{n,k+1}) - g_{(c_{n,k},b)}(\lambda, c_{n,k}) + 1 \\ &= 1 + g'_{(c_{n,k},b)}(\lambda, c_{n,k}+)\epsilon_{n,k} + o(\epsilon_{n,k}), \\ h_{(a,c_{n,k})}(\lambda, c_{n,k-1}) &= h_{(a,c_{n,k})}(\lambda, c_{n,k-1}) - h_{(a,c_{n,k})}(\lambda, c_{n,k}) + 1 \\ &= 1 - h'_{(c_{n,k},b)}(\lambda, c_{n,k}+)\epsilon_{n,k} + o(\epsilon_{n,k}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta_\gamma};\, \zeta_\gamma < \infty,\, \sigma_\Delta = \infty) = \mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda\zeta_n};\, \sigma_\Delta = \infty) \\ &+ \sum_{k:\, a<c_{n,k}<x} \frac{g_{(c_{n,k},b)}(\lambda, x)B(0, c_{n,k})\epsilon_{n,k}^2 + o(\epsilon_{n,k}^2)}{(1/2)(h'_{(a,c_{n,k})}(\lambda, c_{n,k}-) - g'_{(c_{n,k},b)}(\lambda, c_{n,k}+))\epsilon_{n,k} + o(\epsilon_{n,k})}, \\ &+ \sum_{k:\, x<c_{n,k}<b} \frac{h_{(a,c_{n,k})}(\lambda, x)B(0, c_{n,k})\epsilon_{n,k}^2 + o(\epsilon_{n,k}^2)}{(1/2)(h'_{(a,c_{n,k})}(\lambda, c_{n,k}-) - g'_{(c_{n,k},b)}(\lambda, c_{n,k}+))\epsilon_{n,k} + o(\epsilon_{n,k})}, \end{aligned}$$

и при $n \to \infty$ получаем интегральное представление

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta};\, \zeta < \infty,\, \sigma_\Delta = \infty) &= \int_a^x g_{(y,b)}(\lambda, x)\frac{2B(0, y)\,dy}{h'_{(a,y)}(\lambda, y-) - g'_{(y,b)}(\lambda, y+)} \\ &+ \int_x^b h_{(a,y)}(\lambda, x)\frac{2B(0, y)\,dy}{h'_{(a,y)}(\lambda, y-) - g'_{(y,b)}(\lambda, y+)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Применяя формулы (12) и полумарковские формулы (3, 4), получаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta};\, \zeta < \infty,\, \sigma_\Delta = \infty) \\ &\qquad = g_\Delta(\lambda, x)\int_a^x \frac{2B(0, y)\,dy}{-g'_{\Delta_1}(\lambda, y-)} + h_\Delta(\lambda, x)\int_x^b \frac{2B(0, y)\,dy}{h'_{\Delta_2}(\lambda, y+)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Пример. Рассмотрим эту формулу при постоянных A и $B(\lambda, \cdot)$. Получаем

$$g_\Delta(\lambda, x) = e^{-A(x-a)}\frac{\operatorname{sh}(b-x)r}{\operatorname{sh}(b-a)r}, \quad h_\Delta(\lambda, x) = e^{A(b-x)}\frac{\operatorname{sh}(x-a)r}{\operatorname{sh}(b-a)r}, \tag{19}$$

где $r = \sqrt{A^2 + 2B(\lambda)}$, а также

$$g'_{\Delta_1}(\lambda, y-) = e^{-A(y-a)} \frac{-r}{\operatorname{sh}(y-a)r}, \quad h'_{\Delta_2}(\lambda, y+) = e^{A(b-y)} \frac{r}{\operatorname{sh}(b-y)r}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta};\, \zeta < \infty,\, \sigma_\Delta = \infty) \\
&= g_\Delta(\lambda, x) \int\limits_a^x \frac{2B(0)\operatorname{sh}(y-a)r\,dy}{re^{-A(y-a)}} + h_\Delta(\lambda, x) \int\limits_x^b \frac{2B(0)\operatorname{sh}(b-y)r\,dy}{r\,e^{A(b-y)}} \\
&= \frac{B(0)}{B(\lambda)} g_\Delta(\lambda, x) \left(-1 + e^{A(x-a)} \operatorname{ch}(x-a)r - \frac{A}{r}\, e^{A(x-a)} \operatorname{sh}(x-a)r \right) \\
&+ \frac{B(0)}{B(\lambda)} h_\Delta(\lambda, x) \left(-1 + e^{-A(b-x)} \operatorname{ch}(b-x)r + \frac{A}{r}\, e^{-A(b-x)} \operatorname{sh}(b-x)r \right) \\
&= \frac{B(0)}{B(\lambda)} \left(-g_\Delta(\lambda, x) + \frac{\operatorname{sh}(b-x)r}{\operatorname{sh}(b-a)r} \operatorname{ch}(x-a)r - \frac{A}{r} \frac{\operatorname{sh}(b-x)r}{\operatorname{sh}(b-a)r} \operatorname{sh}(x-a)r \right. \\
&\qquad \left. - h_\Delta(\lambda, x) + \frac{\operatorname{sh}(x-a)r}{\operatorname{sh}(b-a)r} \operatorname{ch}(b-x)r + \frac{A}{r} \frac{\operatorname{sh}(x-a)r}{\operatorname{sh}(b-a)r} \operatorname{sh}(b-x)r \right) \\
&= \frac{B(0)}{B(\lambda)} (1 - g_\Delta(\lambda, x) - h_\Delta(\lambda, x). \qquad (20)
\end{aligned}$$

В некоторых случаях удаётся найти прообраз преобразования Лапласа данного выражения. Если исходный процесс, развивается как диффузионный марковский процесс до момента остановки, то коэффициент $B(\lambda)$ линейно зависит от λ, т.е. $B(\lambda) = B + c\lambda$, где $B > 0, c > 0$. Прообразом отношения $\frac{B}{B+c\lambda}$ является плотность экспоненциального распределения. В то же время прообразы функций $g_\Delta(\lambda, x)$ и $h_\Delta(\lambda, x)$ известны (см. [1], с. 303).

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\lambda^{-1} g_\Delta(\lambda, x) \\
&\quad = e^{-A(x-a)-(A^2/2+B)t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x - a + 2k(b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(x-a+2k(b-a))^2/(2t)},
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1} h_\Delta(\lambda, x)$$
$$= e^{A(b-x)-(A^2/2+B)t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{b-x+2k(b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(b-x+2k(b-a))^2/(2t)}.$$

Для получения полного прообраза используем известный результат, согласно которому произведению образов соответствует свёртка прообразов.

Неожиданный результат получается из этой формулы при $a \to -\infty$ и $b \to \infty$. В этом случае

$$\mathbf{E}_x(e^{-\lambda\zeta};\, \zeta < \infty,\, \sigma_\Delta = \infty) \to \frac{B(0)}{B(\lambda)}$$

и предел не зависит от x. Отсюда следует, что в "марковском" случае при любой начальной точке процесса время до начала окончательной остановки процесса распределено экспоненциально с одним и тем же параметром B/c.

Приложение. Докажем справедливость формул (12). Пусть $a < y - h < y < y + h < b$ $\Delta = (a, b)$, $\Delta_1 = (a, y)$, $\Delta_2 = (y, b)$. Тогда

$$H_\Delta(y-h) = H_{\Delta_1}(y-h) H_\Delta(y);$$
$$H_\Delta(y-h) - H_\Delta(y) = H_\Delta(y)(H_{\Delta_1}(y-h) - H_{\Delta_1}(y));$$
$$H'_\Delta(y-) = H'_{\Delta_1}(y-) H_\Delta(y), \tag{21}$$
$$H_\Delta(y+h) = H_{\Delta_2}(y+h) + G_{\Delta_2}(y+h) H_\Delta(y);$$
$$H_\Delta(y+h) - H_\Delta(y) = H_{\Delta_2}(y+h) - H_{\Delta_2}(y) + (G_{\Delta_2}(y+h) - G_{\Delta_2}(y)) H_\Delta(y);$$
$$H'_\Delta(y+) = H'_{\Delta_2}(y+) + G'_{\Delta_2}(y) H_\Delta(y). \tag{22}$$
$$G_\Delta(y-h) = G_{\Delta_1}(y-h) + H_{\Delta_1}(y-h) G_\Delta(y);$$
$$G_\Delta(y-h) - G_\Delta(y) = G_{\Delta_1}(y-h) - G_{\Delta_1}(y) + G_\Delta(y)(H_{\Delta_1}(y-h) - H_{\Delta_1}(y));$$
$$G'_\Delta(y-) = G'_{\Delta_1}(y-) + H'_{\Delta_1}(y-) G_\Delta(y), \tag{23}$$
$$G_\Delta(y+h) = G_{\Delta_2}(y-h) G_\Delta(y);$$
$$G_\Delta(y+h) - G_\Delta(y) = G_\Delta(y)(G_{\Delta_2}(y+h) - G_{\Delta_2}(y)),$$
$$G'_\Delta(y+) = G'_{\Delta_2}(y+) G_\Delta(y). \tag{24}$$

Сравнивая формулы (21), (22), в точках y, где производная справа равна производной слева, получаем формулу

$$H_\Delta(y) = \frac{H'_{\Delta_2}(y+)}{H'_{\Delta_1}(y-) - G'_{\Delta_2}(y+)}.$$

Сравнивая формулы (23), (24) в точках y, где производная справа равна производной слева, получаем формулу

$$G_\Delta(y) = \frac{-G'_{\Delta_1}(y-)}{H'_{\Delta_1}(y-) - G'_{\Delta_2}(y+)}.$$

Литература

1. А. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению.* СПб, Лань, 2000.
2. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы.* М., ФМ, 1963.
3. К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории.* М., Мир, 1968.
4. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы.* СПб, Наука, 2001.
5. Б. П. Харламов, *Диффузионный процесс с задержкой на краях отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **351** (2007), 284–297.
6. Б. П. Харламов, *О точках задержки и асимметрии одномерного полумарковского диффузионного процесса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **384** (2010), 291–309.

Harlamov B. P. Final distribution of a diffusion process with a final stop.

One-dimensional diffusion process is considered. A characteristic operator of this process is assumed to be a linear differential operator of the second order with a negative coefficient in the operator's member without derivative. Such an operator determines a measure of a Markov diffusion process with a break (the first interpretation), and also that of a semi-Markov diffusion process with a final stop (the second interpretation). Under the second interpretation the existence of a limit on infinity of the process (the final point) is characterized. This limit exists on any interval almost sure with respect to a conditional measure, generated by condition that the process never leaves this interval. A distribution of the final point

expressed in terms of two fundamental solutions of the corresponding ordinary differential equation, and also that of the final stop beginning instant are derived. A homogeneous process is considered as an example.

Институт проблем машиноведения РАН
Санкт-Петербург
E-mail: b.p.harlamov@gmail.com

Поступило 16 сентября 2014 г.