Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

И. А. Суслина

ПРОБЛЕМА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ И ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ И ОБНАРУЖЕНИЯ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Введение

Известно, что асимптотика минимаксного оценивания и проверки гипотез для эллипсоидов в пространстве последовательностей

$$\mathcal{F} = \Big\{ f = \sum_l \theta_l \phi_l : \ \sum_l \theta_l^2 c_l^2 \leqslant 1 \Big\},$$

тесно связана с асимптотикой распределения коэффициентов

$$N(T) = \#\{l : \ c_l \leqslant T\} \quad \text{при} \quad T \to \infty;$$

см. [2,3] для задач оценивания и [4, Section 3.2], для задач обнаружения.

Для коэффициентов

$$c_l^2 = \sum_{k=1}^{d} |l_k|, \tag{1}$$

$$c_l^2 = \sum_{k=1}^{d} (l_k)^2 \tag{2}$$

с индексами $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{Z}^d$, имеем

$$N_d(T) = \mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{Z},\eta}(m), \quad \eta = \begin{cases} 1 & \text{для (1)} \\ 2 & \text{для (2)} \end{cases}, \qquad m = \begin{cases} T^2 & \text{для (1)} \\ T & \text{для (2)} \end{cases}.$$

Здесь мы обозначили через

$$\mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{Z},\eta}(m) = \#\{l \in \mathbb{Z}^d : \ \|l\|_\eta \leqslant m\} \tag{3}$$

целочисленный объем l_η-шара радиуса m из $\mathbb{R}^d$, то есть количество точек целочисленной решетки в d-мерном шаре радиуса m. Изучение асимптотики этой величины при $m \to \infty$ и связанные с ней задачи в

Ключевые слова: проблема решетки, возрастание размерности пространства, асимптотика числа точек целочисленной решетки.

теории чисел называют *“lattice problem”* – проблемой решетки, см. [1] и ссылки в этой работе. В частности, для фиксированного $d \geqslant 1$ имеем

$$\mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{Z},\eta}(m) \sim \mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{R},\eta}(m) = m^d V_\eta^d(1), \tag{4}$$

где $\mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{R},\eta}(m)$ есть мера Лебега l_η-шара радиуса m и $V_\eta^d(1)$ есть мера Лебега единичного l_η-шара в $\mathbb{R}^d$. Легко видеть, что

$$V_\eta^d(1) = \frac{2^n \Gamma^d(1+1/\eta)}{\Gamma(1+d/\eta)}.$$

Различные модификации этой задачи встречаются при строительстве криптосхем. Однако, литературы по этой проблеме для случая, когда $m \to \infty$ одновременно с $d \to \infty$, кроме [5], обнаружить не удалось. В работе [5] при изучении задач оценивания и проверки гипотез для эллипсоидов показано, что если $d \to \infty$, $m \to \infty$, то при $d = o(m^{\eta/(1+\eta)})$ справедлива асимптотика, приведенная выше. Кроме того, в этой же работе найдена следующая логарифмическая асимптотика

Предложение 1.1. *Предположим, что* $d \to \infty$, $m \to \infty$. *Положим* $\delta_d = d^{1/\eta}/m$.

(1) *Пусть* $\delta_d = o(1)$. *Тогда*

$$\log\left(\mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{Z},\eta}(m)\right) = \log\left(\mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{R},\eta}(m)\right) + O(d\delta_d);$$

в частности, если $d\delta_d = o(1)$, *то* $\mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{Z},\eta}(m) \sim \mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{R},\eta}(m)$.

(2) *Пусть* $\delta_d \to \infty$. *Тогда*

$$\log\left(\mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{Z},\eta}(m)\right) \sim H\,\log(2\,ed/H), \qquad H = m^\eta.$$

В этой же работе аналогичные результаты получены для любой l_p-полунормы. В работе [6] разработаны вероятностные методы анализа асимптотики $N_d(T)$ для различного вида коэффициентов.

§2. Основные результаты

Пусть $l = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}^d$ и коэффициенты c_l определяются соотношениями (1) или (2).

Теорема 2.1. *Асимптотика вида* (4) *справедлива для коэффициентов* (1) *при* $d \to \infty$, $m \to \infty$, *если* $d^3/m^2 \to 0$. *При* $d \to \infty$, $m \to \infty$, $d^3/m^2 \geqslant c > 0$, $d\,\log(d)/m \to 0$ *имеем*

$$\mathrm{Vol}\,^d_{\mathbb{Z},\eta}(m) \sim m^d V_\eta^d(1) \exp\left(W(d,m)\right),$$

где $W(d,m)$ *– показатель степени дополнительной экспоненты, имеющий вид*

$$W(d,m) = d\left(\frac{d\,(\exp(\operatorname{arsh}(d/m))+1)}{2\,m(\exp(\operatorname{arsh}(d/m))-1)} - 1\right) = \frac{d^3}{4\,m^2} - \frac{d^5}{16\,m^4} + o\left(\frac{d^5}{m^4}\right).$$

Замечание 2.1. Утверждение теоремы 2.1 означает, что при $d^{3/2}/m \to 0$, $d \to \infty$, $m \to \infty$ асимптотика количества точек целочисленной решетки в l_1-шаре радиуса m с центром в точке $\overline{0} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{d})$ остается классической (то есть совпадает с объемом шара), затем начинает меняться с переходом к асимптотике другого вида при $d^{3/2}/m \geqslant c > 0$. Если $d/m \to \infty$, то объем d-мерного шара радиуса m в l_1-норме стремится к 0.

Теорема 2.2. *Для коэффициентов* (2) *при* $d\log(d)/m^2 \to 0$ *величина* $O(d\delta_d)$ *в пункте* 1 *предложения* 1.1 *определяется асимптотикой при* $h \to 0$ *тэта-функции* $v_3(0,\exp(-h)) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \exp(-hk^2)$ *и ее производной* $(v_3(0,\exp(-h)))'_h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2\exp(-hk^2)$.

2.1. Вероятностная мера на $\mathbb{Z}_d$. Пусть

$$\begin{aligned} &\lambda_k = |k| \quad \text{для} \quad (1),\\ &\lambda_k = k^2 \quad \text{для} \quad (2),\ G(h) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-h\lambda_k),\ h > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Положим $Y(k) = \lambda_k$ и введём семейство вероятностных мер $\mathbf{P}_h$, $h > 0$, на $\mathbb{Z}$

$$\mathbf{P}_h(k) = \exp(-hY(k) - Z(h)), \quad Z(h) = \log(G(h)).$$

Пусть $\mathbf{P}_h^d$ есть произведение d мер $\mathbf{P}_h$ – семейство вероятностных мер на $\mathbb{Z}^d$, то есть для $l = (l_1,\ldots,l_d)$, $h > 0$

$$\mathbf{P}_h^d(l) = \exp(-hS(l) - Z_d(h)), \quad S(l) = \sum_{j=1}^{d} Y(l_j), \quad Z_d(h) = d\,Z(h).$$

Рассмотрим $S = S(l) = c_l^2$ как случайную величину на $\mathbb{Z}^d$ относительно меры $\mathbf{P}_h^d = \mathbf{P}_h^d(l)$. Тогда

$$\mathbf{E}_{d,h}(S) = d\,\mathbf{E}_h(Y) = -d\,Z'(h),\ \operatorname{Var}_{d,h}(S) = d\operatorname{Var}_h(Y) = d\,Z''(h).$$

Здесь и ниже $\mathbf{E}_{d,h}(\,\cdot\,), \mathrm{Var}_{d,h}(\,\cdot\,)$ – математическое ожидание и дисперсия по мере $\mathbf{P}_h^d$, а $\mathbf{E}_h(\,\cdot\,), \mathrm{Var}_h(\,\cdot\,)$ – ожидание и дисперсия по мере $\mathbf{P}_h$. Имеем для $x > 0$

$$\begin{aligned} N_d(x) \quad &= \#\{l \in \mathbb{Z}^d : S(l) \leqslant x\} = e^{Z_d(h)+hx} \sum_{l\in\mathbb{Z}^d:\, S(l)\leqslant x} e^{h(S(l)-x)}\mathbf{P}_h^d(l) \\ &= e^{Z_d(h)+hx}\mathbf{E}_{d,h}\left(e^{h(S-x)}\mathbb{1}_{\{S\leqslant x\}}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, $m = x$ для (1) и $m^2 = x$ для (2) в выражении (3). Пусть

$$\tau_h = (S-x)/s_h, \text{ где } S = \sum_{j=1}^{d} Y_j, \; x = \mathbf{E}_{d,h}(S)/d = -Z'(h).$$

Выберем величины $s_h = s_{d,h} > 0$ и $h = h_d(x)$. Покажем при этом, что величину $h = h_d(x)$ можно выбрать так, чтобы для любого положительного x было справедливо равенство $x = x(h_d)$.

Заметим, что $Z(h)$ является выпуклой бесконечно дифференцируемой функцией (в силу того, что $Z''(h) = \mathrm{Var}_h(Y)$), убывающей по $h > 0$. Легко видеть, что $G(h) \to 1$ при $h \to \infty$, где $G(h)$ определена в (5). Действительно, $G(h) = 1 + 2I(h), \; h > 0$ и

$$I(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-h\lambda_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-hk) = \frac{\exp(-h)}{1-\exp(-h)} \underset{h\to\infty}{\to} 0. \tag{7}$$

Заметим, что ряд $I(h) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \exp(-h\lambda_k)$ и ряды его производных равномерно сходятся при $h \geqslant h_0 > 0$. Следовательно, можем дифференцировать почленно. Очевидно, что $G'(h) < 0$ при $h \in (0,\infty)$ и, аналогично (7), $\lim\limits_{h\to\infty} G'(h) = 0$. Отсюда $\lim\limits_{h\to\infty} Z'(h) = 0$. Найдем асимптотику $Z'(h)$ при $h \to 0$.

При $\lambda_k = k^2$ имеем (см. (22))

$$G(h) \;=\; 1+2\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-hk^2) = 2\int_0^{\infty} \exp(-hx^2)\,dx + O(1) = \sqrt{\frac{\pi}{h}} + O(1), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} G'(h) \;&=\; -2\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp(-hk^2) = -2\int_0^{\infty} x^2 \exp(-hx^2)\,dx + O(h^{-1}) \\ &=\; -\frac{\sqrt{\pi}}{2\,h^{3/2}} + O(h^{-1}). \end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда

$$Z'(h) = \frac{G'(h)}{G(h)} \asymp -h^{-1} \to -\infty, \quad h \to 0. \tag{10}$$

Аналогично (см.(14)) будет показано, что при $\lambda_k = k,\ h \to 0$

$$Z'(h) = \frac{G'(h)}{G(h)} \sim -h^{-1} \to -\infty.$$

Следовательно, для любого $x > 0$ мы можем так выбрать $h = h_d(x)$, что

$$Z_d'(h) = -x, \quad \text{то есть} \quad Z'(h) = -x/d,$$

что соответствует

$$\mathbf{E}_{d,h} S = x.$$

Выберем $s_h = s_{d,h}$ так, чтобы

$$s_h^2 = Z_d''(h), \quad \text{то есть} \quad s_h^2 = dZ''(h),$$

что соответствует

$$\mathrm{Var}_{d,h} S = s_h^2.$$

Следовательно, имеем $\mathbf{E}_{d,h}\tau_h = 0$, $\mathrm{Var}_{d,h}\tau_h = 1$.

Преобразуем (6) к виду

$$N_d(x) = \Lambda(x) J(hs_h), \quad \Lambda(x) \stackrel{\Delta}{=} e^{Z_d(h)+hx}, \quad J(b) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{E}_{d,h}\left(e^{b\tau_h} \mathbb{1}_{\{\tau_h \leqslant 0\}}\right). \tag{11}$$

В [6] доказано следующее утверждение о величине $J(b)$.

Предложение 2.1. *Пусть $b = hs_h \to \infty$. Предположим, что существует такое $\rho = \rho_h = o(1/b)$, $\rho > 0$, что для любого $a = o(1)$ имеем*

$$\mathbf{P}_h^d(\tau_h \in (a, a+\rho)) \sim \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \tag{12}$$

(это выполнено для гауссовской τ_h). Тогда

$$J(b) \sim (\sqrt{2\pi}\, b)^{-1}. \tag{13}$$

Предположение (12) является некоторой формой локальной предельной теоремы. Далее будет показано, что в рассматриваемых задачах оно выполнено.

2.2. Доказательство теоремы 2.1. Для коэффициентов (1) имеем

$$G(h) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-hk) = \frac{\exp(h)+1}{\exp(h)-1}.$$

Напомним, что в этом случае $x = m$ и мы доказываем теорему в предположении, что $d\,\log(d)/m \to 0$. Тогда

$$x = -d\,\frac{G'(h)}{G(h)} = \frac{2\,d\exp(h)}{\exp(2h)-1}, \quad h = \operatorname{arsh}\left(\frac{d}{x}\right) \to 0,$$
$$s_h^2 = dZ''(h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{d}{h^2}.$$

Таким образом, при $h \to 0$

$$Z'(h) = G'(h)/G(h) \sim -h^{-1} \to -\infty. \tag{14}$$

В работе [6] строится аналогичная вероятностная мера, но случайные величины Y выбираются иначе, а именно $Y(k) = \log(\lambda_{|k|})$. В пункте 7.3 работы [6] доказано, что при $h\log(d) \to 0$ для $\lambda_k \sim A\exp(\kappa k)$, $\kappa > 0$, $A > 0$ выполнено (12). Следовательно, (12) выполнено для коэффициентов (1) при $d\,\log(d)/m \to 0$. Отсюда, используя предложение 2.1 и (11), (13) получаем для (1)

$$N_d(m) = \#\{l \in \mathbb{Z}^d : \sum_{k=1}^{d} |l_k| \leqslant m\} \sim \frac{(G(h))^d \exp(d)}{2\sqrt{\pi d}}, \quad \text{где } h = \operatorname{arsh}\left(\frac{d}{m}\right). \tag{15}$$

Утверждение теоремы 2.1 следует из (15) при $h \to 0$. $\square$

2.3. Доказательство теоремы 2.2. Для коэффициентов (2) имеем

$$x = m^2, \quad G(h) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-hk^2), \quad h > 0.$$

Заметим, что $Z'(h) = O(1)$, если $h \geqslant c > 0$. Тогда при $d/m^2 \to 0$, $x = m^2$ из соотношения $x = -dZ'(h)$ и (10) следует, что $h \to 0$.

2.3.1. *Проверка* (12) *для коэффициентов* (2). Напомним, что $S=\sum\limits_{j=1}^{d} Y_j$, где $Y_1,\dots,Y_d$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Положим

$$\mu_Y^k = \mathbf{E}_h(Y-\mathbf{E}_h(Y))^k, \quad L_h^{(k)} \triangleq d\,\mu_Y^k/(d\,\mu_Y^2)^{k/2}, \quad k=2,4. \tag{16}$$

Введем обозначение

$$N_1 \triangleq (16L_h^{(4)})^{-1/2}. \tag{17}$$

В [6] (см. раздел 7.1) показано, что для выполнения (12) достаточно доказать, что существует такое $M=M_h>N_1$, $M \gg hs_h\log(hs_h)$, что для $f_h(u)$ – характеристической функции τ_h выполнено

$$J_{N_1,M}(h) \triangleq \int\limits_{N_1<|u|<M} |f_h(u)|du = o(1). \tag{18}$$

Справедливо соотношение $|f_h(u)| = |f_{h,Y}(u/s_h)|^d$, где $f_{h,Y}(v)$ – характеристическая функция случайной величины Y с распределением $\mathbf{P}_h$

$$f_{h,Y}(v) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}_h(k)\exp(ivk^2).$$

При $v=u/s_h$ выполнено

$$\begin{aligned}
&\log|f_h(u)| = \frac{d}{2}\log|f_{h,Y}(v)|^2 \leqslant -\frac{d}{2}\,(1-|f_{h,Y}(v)|^2)\\
&= -d\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{P}_h(k)\,\mathbf{P}_h(l)\sin^2(v(l^2-k^2)/2) \qquad (19)\\
&\leqslant -\frac{2\,d}{G^2(h)}\sum_{(k,l)\in\mathcal{N}} \exp(-h(l^2+k^2))\sin^2(v(l^2-k^2)/2) \triangleq -\frac{2\,dR_h(v)}{G^2(h)},
\end{aligned}$$

где $\mathcal{N}=\{(k,l)\in\mathbb{N}^2,\ k<l\}$,

$$R_h(v) = \sum_{(k,l)\in\mathcal{N}} \exp(-h(l^2+k^2))\sin^2(v(l^2-k^2)/2). \tag{20}$$

Найдем асимптотику при $h\to 0$ величины N_1, определенной соотношением (17). При этом $Z(h)=\log(G(h))$, $\mathbf{E}_hY=-Z'(h)=G'(h)/G(h)$, где величины $G(h)$, $G'(h)$ удовлетворяют (8) и (9). Кроме того, $x=$

$-dZ'(h) = \mathbf{E}_{h,d}S$, $s_h^2 = dZ''(h) = \mathrm{Var}_{h,d}S$. Напомним, что $L_h^{(k)}$ определяются соотношениями (16) и мы положили $N_1 \triangleq (16L_h^{(4)})^{-1/2}$. Величина $L_h^{(4)}$ определяется выражением

$$L_h^{(4)} = d\mu_Y^4/(d\mu_Y^2)^2. \tag{21}$$

Асимптотика начальных моментов находится следующим образом. Имеем для $j = 1, 2, 3, 4$

$$\mathbf{E}_h(Y^j) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{2j}\exp(-hk^2)/G(h).$$

Обозначим $m = h^{-1/2} \to \infty$. Тогда для $j = 0, 1, 2, 3, 4$ будем иметь

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{2j}\exp(-hk^2) &= m^{2j+1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{m}\right)^{2j}\exp(-h(k/m)^2)\,\frac{1}{m} \\ \sim \quad m^{2j+1}&\int_{k=1}^{\infty} x^{2j}\exp(-hx^2)\,dx = h^{-j-1/2}\Gamma(j+1/2). \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma(t) = \int\limits_0^{\infty} x^{t-1}\exp(-t)\,dt$ – гамма-функция Эйлера. Заметим, что функция $y(x) = x^{2j}\exp(-hx^2)$ возрастает на промежутке $(0,\, h^{-1/2}\sqrt{j})$ и убывает при $x > h^{-1/2}\sqrt{j}$. Отсюда при некоторой постоянной B

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} k^{2j}\exp(-hk^2) - \int_0^{\infty} x^{2j}\exp(-hx^2)\,dx\right| \leqslant Bh^{-j}. \tag{22}$$

При $h \to 0$ имеем

$$\begin{gathered} \mathbf{E}_h(Y^4) \sim 105\,h^{-4}/16, \quad \mathbf{E}_h(Y^3) \sim 15\,h^{-3}/8, \\ \mathbf{E}_h(Y^2) \sim 3\,h^{-2}/4, \quad \mathbf{E}_h(Y) \sim h^{-1}/2. \end{gathered}$$

Следовательно,

$$x = d\,\mathbf{E}_h(Y) \sim d/(2h), \quad s_h \sim \sqrt{d}/(h\sqrt{2}), \quad N_1 \sim \sqrt{d}/(4\sqrt{15}).$$

Выберем теперь M – вторую границу интегрирования (18). После замены переменных случай $|u| > N_1$ соответствует $|v| = |u/s_h| > b_0 h$ при $b_0 = (1+o(1))/\sqrt{60}$, а соотношения $|u| < M,\ M \gg hs_h\log(hs_h) \asymp$

$\sqrt{d}\,\log(d)$ представимы в виде $|v| \leqslant H,\ H \gg h\,\log(d)$. В предположении $h\,\log(d) \to 0$ можно так выбрать $M,\ H$, что

$$1 \gg H \gg h\,\log(d), \qquad H \leqslant h\,(\log(d))^2, \quad d \gg M \gg \sqrt{d}\,\log(d)$$

и множеству интегрирования $\{u:\ |u| \in (N_1, M)\}$ соответствует множество $\{v:\ |v| \in (b_0 h, H)\}$.

Найдем нижние границы величин $R_h(v)$, определенных соотношением (20). Пусть $|v| \in (b_0 h, H)$. Положим, для $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{N}_k = \left\{ l \in \mathbb{N}:\ \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{|v|\,(l^2 - k^2)}{2} \leqslant \frac{3\,\pi}{4} \right\}.$$

Если $l \in \mathcal{N}_k$, то $\sin^2(v(l^2 - k^2)/2) \geqslant 1/2$. Следовательно,

$$R_h(v) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2\,hk^2) \sum_{l \in \mathcal{N}_k} \exp(-h\,(l^2 - k^2)).$$

Множества $\mathcal{N}_k$ при таких k, что

$$\frac{2\,\pi}{5\,|v|} \leqslant k^2 \leqslant \frac{\pi}{2\,|v|},$$

содержат все l из промежутка $3\,k/2 \leqslant l \leqslant 2\,k$. Этим множествам соответствуют

$$A_1 = \sqrt{\frac{2\,\pi}{5\,|v|}} \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{|2\,v|}} = A_2,\ |v| = o(1).$$

При этом если $3\,k/2 \leqslant l \leqslant 2\,k,\ l \in \mathcal{N}_k,\ A_1 \leqslant k \leqslant A_2$, то

$$h(l^2 - k^2) \asymp hk^2 \leqslant \frac{\pi h}{2\,|v|} < \frac{\pi}{2\,b_0} = c_0.$$

Отсюда следует, что в этих условиях величины $\exp(-2\,hk^2)$ и $\exp(-h\,(l^2 - k^2))$ отделены от нуля общей константой и

$$R_h(v) \geqslant b \sum_{A_1 \leqslant k \leqslant A_2} k \asymp (A_2^2 - A_1^2) \asymp |v|^{-1}.$$

Следовательно, из (19) и (8) имеем

$$-\log|f_h(u)| \geqslant \frac{2\,dR_h(v)}{G^2(h)} \geqslant bdh/|v| \geqslant bdh/H \geqslant bd/\log^2 d.$$

Тогда (см. (18)) при $M \ll d$

$$J_{N_1,M}(h) \leqslant M \exp(-bd/\log^2 d) \to 0,$$

что влечет выполнение (12) при $d\log(d)/m^2 \to 0$. □

2.3.2. *Асимптотика* $N_d(x)$ *для коэффициентов* (2). Для коэффициентов (2) величина $N_d(x)$, определенная в (6), имеет вид (см. (11))

$$N_d(x) = \#\Big\{l \in \mathbb{Z}^d : \sum_{k=1}^{d} l_k^2 \leqslant x\Big\} = e^{Z_d(h)+hx} J(hs_h).$$

При этом из предложения 2.1 следует, что величина $J(hs_h)$, $hs_h \to \infty$, при выполнении (12) удовлетворяет соотношению

$$J(hs_h) \sim (\sqrt{2\pi}\, hs_h)^{-1}.$$

Для коэффициентов (2) имеем $x = m^2$ и при $d \to \infty$, $h \to 0$, $h\log(d) \sim d\log(d)/(2m^2) \to 0$

$$hs_h \sim \sqrt{d/2}, \quad J(hs_h) \sim (\pi d)^{-1/2}, \ hx \sim d/2, \quad \exp(hx) \sim \exp(d/2).$$

При этом основная часть выражения (6) представима в виде

$$\exp(Z_d(h)) = (G(h))^d, \ G(h) = 1 + 2\sum_{k=1} \exp(-hk^2),$$

где $h = h(m,d)$ определяется из соотношения

$$x = m^2 = -dZ'(h) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp(-hk^2)/G(h).$$

При асимптотике (8) и (9) получаем при $d\log(d)/m^2 \to 0$ результат пункта (1) предложения 1.1. □

Литература

1. F. Götze, *Lattice point problem and the Central Limit Theorem in Euclidean spaces.* — Documenta Mathematica. Extra Volume ICM, **III** (1998), pp. 245–255.
2. I. A. Ibragimov, R. Z. Khasminskii, *Asymptotic properties of some nonparametric estimators in a Gaussian white noise.* — Proc. 3rd Summer School on Probab. Theory and Math. Statist., Varna 1978, Sofia, 1980, pp. 31–64.
3. I. A. Ibragimov, R. Z. Khasminskii, *Some estimation problems on infinite dimensional Gaussian white noise.* — In: Festschrift for Lucien Le Cam. Research Papers in Probability and Statistics, Springer, New York, 1997, 275–296.
4. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *Nonparametric Goodness-of-Fit Testing under Gaussian Model.* — Lect. Notes Statist., Vol. **169**, Springer, New York, 2003.
5. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *On estimation and detection of smooth function of many variables.* — Math. Methods Statist., **14** (2005), 299–331.

6. Ю. И. Ингстер, И. А. Суслина, *Оценивание и проверка гипотез для функций из тензорных произведений пространств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **351** (2007), 180–218.

Suslina I. A. Lattice point problem and the question of estimation and detection of smooth functions of many variables.

We consider the problem of asymptotics of $N_d(m)$, where $N_d(m)$ is the number of integer lattice points in the d-dimensional ball of radius m (in l_1 and l_2-norms) for $d \to \infty,\ m \to \infty$. We show that this asymptotics differs from the asymptotic volume of d-dimensional ball of radius m when the rate of convergence of d to infinity is sufficiently high in comparison with that of m.

С.-Петербургский Национальный
исследовательский Университет
информационных технологий,
механики и оптики,
Кронверкский проспект, д. 49,
197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: isuslina@mall.ru

Поступило 17 ноября 2014 г.