Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

В. Н. Солев

УСЛОВИЕ МАККЕНХАУПТА И ОДНА ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ

§1. Введение

Пусть $x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями с нулевым средним, $\mathbf{E}\, x(t) = 0$, и спектральной мерой μ (см. подробнее в [1, 2]). В терминах линейного оператора

$$x\,[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dx(t),$$

определенного стандартным образом на индикаторных функциях,

$$x\left[\mathbf{1}_{[a\,,b]}(\cdot)\right] = x(b) - x(a),$$

а, стало быть, и на линейном подмножестве S, состоящим из линейных комбинаций конечного числа таких индикаторов, сказанное означает, что $x[\varphi]$ – такая функция

$$x\,:\,S\,\to \Gamma \subset L^2(d\mathbf{P}),$$

что

$$R(\psi(\cdot), \varphi(\cdot))\;=\;\mathbf{E}\;x[\psi]\,\overline{x[\varphi]} = R(\psi(\cdot + s), \varphi(\cdot + s)). \tag{1}$$

Здесь через $L^2(d\mathbf{P})$ обозначается пространство L^2, построенное по вероятностной мере $\mathbf{P}$, Γ – гауссовское подпространство пространства $L^2(d\mathbf{P})$. Упомянутая выше спектральная мера μ участвует в представлении

$$R(\psi, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(u)\,\overline{\widehat{\varphi}(u)}\,\mu(du), \tag{2}$$

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 14-01-00856, НШ-2504.2014.1. и программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

где $\widehat{\varphi}$ – преобразование Фурье функции φ, определяемое на протяжении работы следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}ut}\varphi(t)\,dt.$$

При этом спектральная мера μ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(du)}{1+u^2} < \infty. \tag{3}$$

Мы будем предполагать, что спектральная мера μ имеет плотность (спектральная плотность) f относительно меры Лебега, $f(u) = \frac{\mu(du)}{du}$, удовлетворяющую в силу (3) условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)\,du}{1+u^2} < \infty. \tag{4}$$

Последнее условие на неотрицательную функцию f гарантирует существование процесса со стационарными приращениями, для которого она является спектральной плотностью.

Для неотрицательной функции f, заданной на вещественной прямой, через L^2_f обозначается гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_f$ и нормой $\|\cdot\|_f$, определенными соотношениями

$$(h_1,h_2)_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_1(u)\overline{h_2(u)}\,f(u)\,du, \quad \|h\|_f^2 = (h,h)_f\,.$$

Линейный оператор $x[\varphi]$, определенный на S, может быть продолжен на линейное множество $\mathscr{D}_f$,

$$\mathscr{D}_f = \left\{\varphi:\ \varphi \in L^2_{\mathrm{loc}},\ \widehat{\varphi} \in L^2_f\right\}, \tag{5}$$

где L^2_{loc} – множество локально квадратично суммируемых функций. Обозначим

$$\mathscr{D}_f(T) = \{\varphi:\ \varphi \in \mathscr{D}_f,\ \operatorname{supp}\varphi \subset [-T,T]\}\,.$$

Для процесса x мы будем использовать обозначение $H(x)$ для подпространства пространства $L^2(d\mathbf{P})$, порожденного случайными величинами $x[\varphi]$, $\varphi \in \mathscr{D}_f$. Будем обозначать $H_T(x)$ – подпространство,

порожденное случайными величинами $x[\varphi]$, $\varphi \in \mathscr{D}_f(T)$. В силу определения гауссовского процесса со стационарными приращениями, соотношение

$$U_t\, x[\varphi(\cdot)] = x[\varphi(\cdot + t)], \quad t \in \mathbf{R}$$

определяет на $H(x)$ группу унитарных операторов $U_t = U_t(x)$.

Пусть x_1, x_2 – два гауссовских процесса со стационарными приращениями, заданные на одном вероятностном пространстве,

$H(x_1, x_2) = \overline{H(x_1) + H(x_2)}$, здесь замыкание в пространстве $L^2(d\mathbf{P})$.

Будем говорить, что процессы x_1 и x_2 являются стационарно связанными, если в $H(x_1, x_2)$ существует такая группа унитарных операторов U_t, сужения которой на подпространства $H(x_1), H(x_2)$ совпадают с $U_t(x_1)$, $U_t(x_2)$ соответственно. В этом случае имеет место следующее представление

$$\mathbf{E}\, x_1[\psi]\, \overline{x_2[\varphi]} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(u)\, \overline{\widehat{\varphi}(u)}\, p(u) \sqrt{f_1(u) f_2(u)}\, du \tag{6}$$

Здесь f_1, f_2 – спектральные плотности процессов x_1, x_2, функция $p(u)$ удовлетворяет условию $|p(u)| \leqslant 1$. Пусть неотрицательная матричная функция

$$f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) & p(u)\sqrt{f_1(u) f_2(u)} \\ \overline{p(u)}\sqrt{f_1(u) f_2(u)} & f_2(u) \end{pmatrix}.$$

Матричная функция f называется спектральной плотностью стационарного векторного процесса (x_1, x_2). Удобной для нас моделью для такой пары x_1, x_2 стационарных процессов со спектральными плотностями f_1, f_2 является вариант спектрального представления:

$$\begin{aligned} x_1[\varphi_1] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi_1}(u) p(u) \sqrt{f_1(u)}\, dW_1(u) \\ &\quad + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi_1}(u) q(u) \sqrt{f_1(u)}\, dW_2(u), \\ x_2[\varphi_2] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi_2}(u) \sqrt{f_2(u)}\, dW_1(u). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $W_1(u), W_2(u)$ – два независимых винеровских процесса, определенные на всей прямой, функция q удовлетворяет условию

$$|p(u)| + |q(u)| = 1. \tag{8}$$

В (7) подходит любая функция q, удовлетворяющая (8), например, функция $q = \sqrt{1 - |p|^2}$, которая и будет использована в дальнейшем.

Статистическая задача, которую мы будем рассматривать, состоит в следующем. Предположим, что на отрезке $|t| \leqslant T$ наблюдаются процессы y_1, y_2, заданные соотношениями

$$dy_1(t) = s_1(t)\,dt + dx_1(t), \tag{9}$$

$$dy_2(t) = s_2(t)\,dt + dx_2(t), \tag{10}$$

где x_1, x_2 – стационарно связанные гауссовские процессы со стационарными приращениями, неизвестные функции $s_1 \in \mathscr{L}_1$, $s_2 \in \mathscr{L}_2$, линейные подмножества $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ известны и будут определены позже. Точнее, наблюдению доступны случайные величины $y_1[\varphi], y_2[\psi]$ при $\varphi \in \mathscr{D}_{f_1}(T), \psi \in \mathscr{D}_{f_2}(T)$. Здесь f_1, f_2 – спектральные плотности процессов x_1, x_2, величины $y_1[\cdot], y_2[\cdot]$ определены соотношениями

$$y_i[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, s_i(t)\, dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dx_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Вопрос, на который мы собираемся ответить, состоит в следующем: в какой мере при оценивании функции s_1 можно воспользоваться наблюдениями над процессом y_2.

§2. Оператор умножения на индикаторную функцию и условие Маккенхаупта

Пусть x – процесс со стационарными приращениями с нулевым средним и со спектральной плотностью f. Рассмотрим оператор A_I, заданный на $H(x)$ соотношением

$$A_I\, x[\varphi] = x\left[\mathbf{1}_I(\cdot)\, \varphi(\cdot)\right],$$

где $I = [a, b]$. Таким образом, оператор A_I случайной величине ξ вида

$$\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dx(t) \tag{11}$$

сопоставляет случайную величину $A_I\,\xi$,

$$A_I\,\xi = \int\limits_a^b \varphi(t)\,dx(t).$$

В случае, когда $I = [-T, T]$, примем обозначение $A(T) := A_{[-T,T]}$. Нас интересует ответ на следующий вопрос: при каких условиях на спектральную плотность f оператор $A(T)$ – ограниченный оператор с операторной нормой, ограниченной равномерно по T. Необходимость ответа на этот вопрос возникает, например, в следующей задаче прогноза (смотри подробнее в [10]). Предположим, что вы наблюдаете процесс $x(t)$ на временном отрезке $[-T, T]$ и хотите построить наилучший линейный прогноз для случайной величины ξ вида (11). Пусть $\mathscr{P}_T$ – ортопроектор в пространстве $H(x)$ на подпространство $H_T(x)$, порожденное величинами $x[\varphi]$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-T, T]$. Наилучший в среднеквадратичном линейный прогноз ξ_T задается соотношением $\xi_T = \mathscr{P}_T\,\xi$. Однако, построение оператора $\mathscr{P}_T$ – задача трудоемкая. Сильно ли мы проиграем, если заменим ξ_T на $A(T)\,\xi$? Заметим, что

$$\xi = \xi_T + (\mathbf{1} - \mathscr{P}_T)\xi \quad \text{(здесь } \mathbf{1} \text{ – единичный оператор).}$$

Поэтому $A(T)\,\xi = \xi_T + A(T)\,(\xi - \xi_T)$ и, следовательно,

$$\|\xi - A(T)\,\xi\|_{L^2(d\mathbf{P})} \leqslant \|\xi - \xi_T\|_{L^2(d\mathbf{P})} + \|A(T)\|_\infty\,\|\xi - \xi_T\|_{L^2(dP)}\,.$$

Здесь $\|\cdot\|_{L^2(d\mathbf{P})}$ – норма в пространстве $L^2(d\mathbf{P})$, $\|\cdot\|_\infty$ – равномерная операторная норма. Таким образом, величины ошибок аппроксимации величины ξ величинами $\mathscr{P}_T\,\xi$ и $A(T)\,\xi$ имеют одинаковый порядок малости, при больших T.

В силу стационарности процесса x, достаточно ответить на вопрос, когда оператор A_I – ограниченный,

$$A_I\,x[\varphi] = x[\mathbf{1}_I(\cdot)\,\varphi(\cdot)] \quad \text{при } I = [0, \infty).$$

Отображение

$$x[\varphi] \;\to\; \widehat{\varphi}, \text{ являющееся изометрией из } L^2(dP) \text{ в } L^2_f,$$

сводит упомянутую задачу к известной аналитической проблеме об ограниченности оператора Гильберта в пространстве с весом (смотри подробнее [2, 6, 9]). Ответ здесь хорошо известен (смотри [7]). Его мы сформулируем в следующем виде.

Теорема 2.1 (Hunt, Muckenhoupt, Wheeden). *Пусть x – процесс со стационарными приращениями с нулевым средним и спектральной плотностью f. Для того, чтобы нормы операторов $A(T)$ были ограничены равномерно по $T > 0$, необходимо и достаточно, чтобы спектральная плотность f удовлетворяла условию*

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I f(u)\,du \frac{1}{|I|} \int\limits_I \frac{1}{f(u)}\,du < \infty. \tag{12}$$

Здесь супремум берется по интервалам I, $|I|$ – длина I.

Пусть теперь (x_1, x_2) – пара стационарно связанных процессов со стационарными приращениями с нулевым средним и спектральной плотностью f. А оператор $A(T)$ задан на $H(x_1, x_2)$ соотношениями

$$A(T)\,x_1[\varphi] = x_1\left[\mathbf{1}_{[-T,\,T]}(\cdot)\,\varphi(\cdot)\right],\ A(T)\,x_2[\psi] = x_2\left[\mathbf{1}_{[-T,T]}(\cdot)\,\psi(\cdot)\right].$$

Нас интересует ответ на следующий вопрос: при каких условиях на спектральную плотность f оператор $A(T)$ – ограниченный оператор, с операторной нормой, ограниченной равномерно по $T > 0$. Рассуждения, проведенные выше в одномерном случае, показывают, что названная задача сводится к известной аналитической проблеме об ограниченности оператора Гильберта в пространстве с матричным весом (смотри подробнее [12]). Сформулируем соответствующий результат в пригодном для нас виде.

Теорема 2.2 (S. Treil, A. Volberg). *Пусть (x_1, x_2) – пара стационарно связанных процессов со стационарными приращениями с нулевым средним и спектральной плотностью f. Для того, чтобы нормы операторов $A(T)$ были ограничены равномерно по $T > 0$, необходимо и достаточно, чтобы спектральная плотность f удовлетворяла условию*

$$\sup_I \left\| \left(\frac{1}{|I|} \int\limits_I f(u)\,du\right)^{1/2} \left(\frac{1}{|I|} \int\limits_I f^{-1}(u)\,du\right)^{1/2} \right\| < \infty. \tag{13}$$

Здесь супремум берется по интервалам I, $|I|$ – длина I.

§3. Класс Степанова псевдопериодических функций

Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{L}$ локально квадратично суммируемх функций s, таких что

$$\|s\|_{\mathcal{L}}^2 = \sup_x \int\limits_x^{x+1} |s\,(t)|^2\, dt < \infty. \tag{14}$$

Пусть Λ – не более чем счетное множество, такое что

$$\tau = \tau\,(\Lambda) = \inf_{u,v\in\Lambda,\, u\neq v} |u-v| > 0 \tag{15}$$

Рассмотрим в $\mathcal{L}$ введенный Степановым (смотри [4]) класс $\mathscr{L}(\Lambda)$ псевдопериодических функций s

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)e^{\mathrm{i}ut}, \tag{16}$$

предполагая, что

$$\|s\|_* := \Big\{ \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 \Big\}^{1/2} < \infty.$$

Множество Λ будем называть спектральным множеством псевдопериодической функции s. Обозначим

$$\|s\|_T = \left\{ \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |s(t)|^2\, dt \right\}^{1/2}, \quad (s_1, s_2)_T = \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} s_1(t)\overline{s_2(t)}\, dt.$$

Н. Винер и Р. Пэли установили (смотри [5]), что при условии $\tau(\Lambda) > 0$ следующие три нормы топологически эквивалентны на $\mathscr{L}(\Lambda)$ при достаточно больших $T > T_0$: $\|s\|_*, \|s\|_T$ и $\|s\|_{\mathscr{L}}$. Причем топологически эквивалентны указанные нормы равномерно по $T > T_0$. Последнее означает, что найдутся такие константы $0 < c_1 \leqslant C_1 < \infty$ и $0 < c_2 \leqslant C_2 < \infty$, зависящие только от $\tau(\Lambda)$, что при $T > T_0$

$$c_1 \|s\|_* \leqslant \|s\|_T \leqslant C_1 \|s\|_*, \quad c_2 \|s\|_* \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C_2 \|s\|_*.$$

Пусть

$$\varphi_u\,(T; t) = \mathbf{1}_{[-T,\,T]}(t)e^{\mathrm{i}ut}.$$

Из сказанного выше следует (подробнее смотри в [5]), что при названных условиях система $\{\varphi_u\,(T; t)\,,\ u \in \Lambda\}$ является базисом Рисса в $\mathscr{L}(\Lambda)$ в метрике гильбертова пространств с нормой $\|\cdot\|_T$. Стало быть,

в $\mathscr{L}(\Lambda)$ существует сопряженная (в метрике гильбертова пространства с нормой $\|\cdot\|_T$) система $\{\varphi_u^*(T;t)\,,\ u\in\Lambda\}$,

$$\Big(\varphi_u\,(T;\cdot)\,,\varphi_v^*\,(T;\cdot)\Big)_T=\delta_{u,\,v}.$$

Заметим, что в разложении (16)

$$a(u)=(s(\cdot),\varphi_u^*\,(T;\cdot))_T\,. \tag{17}$$

Пусть теперь функция s разложена на отрезке $[-T,T]$ по сопряженной системе

$$s(t)=\sum_{u\in\Lambda}b(u)\,\varphi_u^*\,(T;t)\,. \tag{18}$$

Тогда

$$b(u)=b(T,u)=(s(\cdot),\varphi_u\,(\cdot))_T\,.$$

§4. Оценивание псевдопериодической функции

В этом пункте мы рассмотрим задачу оценивания неизвестных функций s_1, принадлежащих классу $\mathscr{L}(\Lambda)$, по наблюдениям на растущем отрезке $t\in[-T,T]$ над процессами $y_1(t)$ и $y_2(t)$, заданными соотношениями

$$dy_1(t)=s_1(t)\,dt+dx_1(t), \tag{19}$$

$$dy_2(t)=dx_2(t), \tag{20}$$

где x_1,x_2 – стационарно связанные гауссовские процессы со стационарными приращениями с нулевым средним. В одномерном случае эта задача была подробно исследована в работах С. В. Решетова (смотри, например, [11]). Мы упростим задачу, предполагая, что процессы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ отличаются от винеровских процессов на мультипликативную константу, чтобы сделать соответствующие одномерные задачи тривиальными. Точнее, мы будем предполагать, что спектральные плотности $f_1=f_2=1$. В этом случае имеет место следующее представление

$$\mathbf{E}\,x_1[\psi]\,\overline{x_2[\varphi]}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}(u)\,\overline{\widehat{\varphi}(u)}\,p(u)\,du.$$

Здесь функция $p(u)$ удовлетворяет условию $|p(u)| \leqslant 1$, а спектральная плотность векторного процесса (x_1, x_2) имеет вид

$$f(u) = \begin{pmatrix} 1 & p(u) \\ \overline{p(u)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Как уже отмечалось, в этом случае мы можем использовать следующую модель для пары x_1, x_2

$$\begin{aligned} x_1[\varphi] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(u) p(u)\, dW_1(u) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(u) q(u)\, dW_2(u), \\ x_2[\psi] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}\, dW_1(u). \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $W_1(u), W_2(u)$ – два независимых винеровских процесса, определенные на всей прямой, функция q удовлетворяет условию

$$|p(u)| + |q(u)| = 1. \tag{23}$$

Для $\varphi \in L^2$ мы будем аппроксимировать случайную величину $x_1[\varphi]$, когда $\operatorname{supp} \varphi \subset [-T, T]$, случайной величиной $x_2[\psi]$, так чтобы величина

$$\int\limits_{-T}^{T} |\widetilde{\varphi}(t) - \psi(t)|^2\, dt \text{ была минимальной.}$$

Здесь

$$\widetilde{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}ut}\, \widehat{\varphi}(u)\, p(u)\, du.$$

Обозначим

$$\widetilde{\varphi}_T(t) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\, \widetilde{\varphi}(t), \quad \widetilde{\varphi}^{\,T}(t) = \widetilde{\varphi}(t) - \widetilde{\varphi}_T(t).$$

Оптимальный выбор функции ψ очевиден: $\psi = \widetilde{\varphi}_T$. В силу (22),

$$\|x_1[\varphi] - x_2[\psi]\|^2_{L^2(dP)} = 2\pi \left\|\widetilde{\varphi}^{\,T}\right\|^2_{L^2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u)|^2\, |q(u)|^2\, du. \tag{24}$$

Если носитель функции φ лежит на отрезке $[-T,T]$, то

$$A_T\, x_1[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}_T(u)\, dW_1(u) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(u)\, q(u)\, dW_2(u),$$

$$A_T\, x_2\,[\widetilde{\varphi}_T] = x_2\,[\widetilde{\varphi}_T] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}_T(u)\, dW_1(u).$$

Здесь

$$\widehat{\varphi}_T(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \widetilde{\varphi}_T(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$A_T\left(x_1[\varphi] - x_2\,[\widetilde{\varphi}_T]\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(u)\, q(u)\, dW_2(u),$$

$$x_1[\varphi] - x_2\,[\widetilde{\varphi}_T] = A_T\left(x_1[\varphi] - x_2\,[\widetilde{\varphi}_T]\right) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}^{\,T}(u)\, dW_1(u),$$

где

$$\widehat{\varphi}^{\,T}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\, \widetilde{\varphi}^{\,T}(t)\, dt.$$

Поэтому, если выполнено условие (13) и, следовательно, нормы операторов A_T ограничены равномерно по $T > 0$, то при некоторой константе C

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widetilde{\varphi}^{\,T}(t)\right|^2 dt \leqslant C \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u)|^2\, |q(u)|^2\, du. \tag{25}$$

Фактически мы доказали справедливость утверждения следующей леммы.

Лемма 4.1. *Пусть спектральная плотность в* (21) *удовлетворяет условию* (13), *функция* $\varphi \in L^2, \operatorname{supp}\varphi \subset [-T,T]$. *Тогда при некоторой*

константе C_1

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u)|^2 \, |q(u)|^2 \, du \leqslant \|x_1[\varphi] - x_2[\widetilde{\varphi}_T]\|^2_{L^2(d\mathbf{P})} \leqslant C_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u)|^2 \, |q(u)|^2 \, du. \tag{26}$$

Из леммы 4.1 следует, что, в задаче оценивания (19), (20) при использовании наблюдений вида $x_1[\varphi] - x_2\,[\widetilde{\varphi}_T]$ мы получаем порядок величины риска такой же, как в задаче оценивания (19), но со спектральной плотность $f_1 = 1 - |p^2|$.

Литература

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* Мир, М., 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* Мир, М., 1974.
3. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятн. и ее применен. **29**, No. 1, (1984), 19–32.
4. W. Stepanoff, *Sur quelques généralisatiou des fonctions presque-périodiques.* — Comptes Rendus **181** (1925), 90–92.
5. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* Наука, М., 1964.
6. J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* Academic Press, N-Y, 1981.
7. R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform.* — Trans. Amer. Math. Soc., **176** (1973), 227–251.
8. В. Н. Солев, *Точность метода наименьших квадратов в задаче оценивания в стационарном шуме.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **228** (1996), 294–299.
9. В. Н. Солев, *Гауссовские f-регулярные процессы и асимптотическое поведение функции правдоподобия.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **119** (1982), 203–239.
10. V. N. Solev, Ch. Bulot, *Prediction problems and Hunt–Muckenhoupt–Wheeden condition.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **260** (1999), 73–83.
11. С. В. Решетов, *Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Вестник СПбГУ, Серия 1, **2** (2010), 106–115.
12. S. Treil, A. Volberg, *Continuous wavelet decomposition and a vector Hunt-Muckenhoupt-Wheeden Theorem.* — Ark. fur Mat., Preprint (1995), 1–16.

Solev V. N. Mackenhoupt condition and an estimating problem.

The paper deals with studying a connection of the weighted norm inequalities for the Hilbert transform with matrix valued weights and an estimating problem. We show a connection of the vector Muckenhoupt condition on the spectral density of the stationary noise and the possibility to transform a difficult estimating problem to another well-studied.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: vnsolev@gmail.com

Поступило 4 декабря 2014 г.