Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

Л. В. Розовский

ВЕРОЯТНОСТИ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ВЗВЕШЕННОЙ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОБЩИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ, УБЫВАЮЩИМ В НУЛЕ НЕ БЫСТРЕЕ СТЕПЕНИ

1. Введение и результаты. Пусть $S = \sum\limits_{j\geqslant 1} \lambda(j)\, X_j$, где $\{X_i\}$ являются независимыми копиями положительной случайной величины X с функцией распределения $V(x)$, а $\lambda(\cdot)$ – некоторая ограниченная положительная *невозрастающая* функция, заданная на интервале $[1,\infty)$. Ряд S предполагается сходящимся п.н., что равносильно условию

$$\sum_{j\geqslant 1} \mathbf{E}\, \min\,(1, \lambda(j)\, X) < \infty. \tag{1.1}$$

Как известно, скорость стремления вероятности $\mathbf{P}(S < r)$ к нулю при $r \searrow 0$ зависит от поведения распределения V в нуле и на бесконечности, причем последнее в определенной степени диктуется условием (1.1). Так, если $\lambda(n) \asymp n^{-A},\ A > 1$, или $\lambda(n) \asymp q^n,\ 0 < q < 1$, то (1.1) равносильно условиям $\mathbf{E}\, X^{1/A} < \infty$ и $\mathbf{E}\, \ln{(1 + X)} < \infty$, соответственно.

Здесь и в дальнейшем,

$$u(y) \asymp v(y) \Longleftrightarrow \ln\{u(y)/v(y)\} = O\,(1), \quad y \to \infty.$$

Если не слишком ограничивать поведение V в нуле, удается получить оптимальные *логарифмические* асимптотики для $\mathbf{P}(S < r)$ (например, [1–6]).

Для нахождения более точных оценок, как правило, предполагается, что V в нуле убывает степенным образом, например правильно меняется (см. [7, 8] и [16]) или же удовлетворяет существенно менее ограничительному условию, предложенному в [9] (см. также [10]):

Ключевые слова: малые уклонения, суммы независимых положительных случайных величин, медленно меняющиеся функции.

Работа поддержана грантом НШ 2504.2014.1 и грантом РФФИ 13-01-00256а.

L. *Существуют постоянные* $b \in (0,1)$, $c_1, c_2 > 1$ *и* $\varepsilon > 0$, *такие что при каждом* $r \leqslant \varepsilon$

$$c_1\, V(b\, r) \leqslant V(r) \leqslant c_2\, V(b\, r). \tag{1.2}$$

В дальнейшем, результаты из [9] были усовершенствованы в [11] и [12]. В последней работе условие **L** было заменено более общим предположением **R** (см. ниже), позволяющем $V(r)$, в том числе, убывать в нуле медленнее *любой* степени r (например, быть медленно меняющейся функцией).

Для $y > 0$ положим

$$\nu(y) = \frac{1}{y} \int\limits_0^y u\, dV(u)$$

и введем условие

R. *Существуют постоянные* $b \in (0,1)$, $c_1 > b, c_2 > 1$ *и* $\varepsilon > 0$, *такие что при каждом* $r \leqslant \varepsilon$

$$c_1\, \nu(b\, r) \leqslant \nu(r) \leqslant c_2\, \nu(b\, r). \tag{1.3}$$

В [12] показано, что $\mathbf{L} \Longleftrightarrow \mathbf{R}\Big|_{c_1>1}$. В то же время, если

$$\nu(y) \asymp l(y), \quad y \to +0, \tag{1.4}$$

где функция $l(y)$ медленно меняется в нуле, то

$$V(y) \asymp \widetilde{l}(y) = \int\limits_0^y l(u)/u\; du, \quad y \to +0, \tag{1.5}$$

причем $\widetilde{l}(y)$ также медленно меняется в нуле. Из (1.4) и (1.5) следует, что (1.3) при достаточно малом b выполняется, в то время как условие (1.2) нарушается в левой его части. Таким образом, **R** слабее **L**.

Обозначим

$$f(u) = \mathbf{E}\, e^{-uX}, \quad L(u) = \sum_{n\geqslant 1} \log f(u\lambda(n)), \quad u \geqslant 0, \tag{1.6}$$

и (см. [14, (3.2)]) предположим, что распределение V на бесконечности удовлетворяет условию

F. $\limsup_{s\to\infty} s^2\, \mathbf{P}(X \geqslant s)/\mathbf{E}\, X^2\, \mathbf{1}[\, X < s\,] < \infty$.

Условие **F** выполняется, когда X принадлежит области притяжения какого-либо устойчивого закона, в частности, имеет конечную дисперсию. Из него также следует, что $\mathbf{E}\, X^\delta < \infty$ при некотором положительном δ (см. [11]).

Теорема 1 (12). *Пусть выполняются условия* (1.1), $\mathbf{R}$ *и* $\mathbf{F}$ *и, кроме того,*

$$\tau^2(u) = u^2\, L''(u) \to \infty, \quad u \to \infty. \tag{1.7}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(S < r) \sim \frac{\exp\left(L(u) + ur\right)}{\tau(u)\sqrt{2\pi}}, \quad r \to 0, \tag{1.8}$$

где функция $u = u(r)$ *является единственным решением уравнения*

$$L'(u) + r = 0. \tag{1.9}$$

Замечание 1. Условие (1.7) вытекает из $\mathbf{L}$. Кроме того, оно справедливо (без каких-либо предположений относительно поведения V в нуле), если выполнены условия $\mathbf{F}$ и $\lambda(j) \asymp e^{-g(j)}$, где функция g не убывает, а $g(u)/u$ монотонно стремится к нулю на бесконечности (см. [12]). С другой стороны, если, например, $\lambda(j) \asymp \exp(-j^2)$, $\mathbf{E}\, X^2 < \infty$ и (см. (1.4)) $l(y) \asymp \ln^{-2} y$, $y \to +0$, то $\liminf\limits_{u\to\infty} \tau(u) = 0$.

Необходимое условие (1.1) при быстро убывающих весах $\lambda(j)$ заметно слабее условия $\mathbf{F}$, играющего ключевую роль в доказательстве теоремы 1.

В [13] исследовалось, какой вид при условии $\mathbf{L}$ может иметь асимптотика вероятности $\mathbf{P}(S < r)$, если от предположения $\mathbf{F}$ отказаться, и, в частности, получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.1), $\mathbf{L}$ *и*

$$\sup_{m\geqslant 1} \lambda(m\, l)/\lambda(m) \leqslant A\, \lambda(l), \quad l \geqslant 1, \tag{1.10}$$

где A *– некоторая положительная постоянная. Тогда*

$$\mathbf{P}(S < r) \asymp \frac{\exp\left(L(u) + ur\right)}{\tau(u)}, \quad r \to 0, \tag{1.11}$$

где функция $u = u(r)$ *удовлетворяет уравнению* (1.9).

Заметим, что (1.10) выполняется, если $\lambda(n) \asymp e^{-g(\log n)}$, где функция $g(y)/y$ не убывает при всех достаточно больших y. Например, $\lambda(n)$ имеет вид $n^{-\delta}$ или e^{-n^δ}, где $\delta > 0$.

В настоящей работе изучается, как будет вести себя вероятность $\mathbf{P}(S < r)$, если $\mathbf{L}$ заменить на $\mathbf{R}$, а условие $\mathbf{F}$ ослабить.

Сформулируем результаты.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.1), $\mathbf{R}$ *и* (*см.* (1.6))

$$\limsup_{s\to 0} s\,|f'''(s)|/f''(s) < \infty. \tag{1.12}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(S < r) \asymp \frac{\exp\left(L(u) + ur\right)}{1 + \tau(u)}, \quad r \to 0, \tag{1.13}$$

где функция $u = u(r)$ *удовлетворяет уравнению* (1.9).

Замечание 2. Условие (1.12) выполняется, если функция

$$\beta(x) = \mathbf{E}\, X^2\, \mathbf{1}[X < x]$$

при некотором $k > 0$ удовлетворяет условию

$$\sup_{x\geqslant u} x^{-k}\,\beta(x) = O\left(u^{-k}\,\beta(u)\right), \quad u \to \infty, \tag{1.14}$$

или, более общим образом,

$$\sup_{t\geqslant 1} \beta(tu)/\beta(t) = O\left(g(u)\right), \quad u \to \infty,$$

где $\int\limits_1^\infty g(u)\, u\, e^{-u}\, du < \infty$.

Отметим, что условие (1.14) слабее $\mathbf{F}$. В самом деле, из $\mathbf{F}$ вытекает, что при любом $x \geqslant u > 0$

$$x^{-2}\,\beta(x) \leqslant x^{-2}\,\mathbf{E}\,\min\left(x^2, X^2\right) \leqslant u^{-2}\,\mathbf{E}\,\min\left(u^2, X^2\right) = O\left(u^{-2}\,\beta(u)\right), \quad u \to \infty.$$

Замечание 3. Теорема 3 остается справедливой, если функция u в (1.13) удовлетворяет условиям

$$\frac{L'(u) + r}{\sqrt{L''(u)}} = O\,(1), \quad r \to 0, \tag{1.15}$$

и

$$L'(\varepsilon u) + r \leqslant 0 \leqslant L'(u/\varepsilon) + r, \tag{1.16}$$

где некоторая постоянная $\varepsilon \in (0, 1)$, а $r > 0$ – достаточно мало.

Другими словами, точное решение уравнения (1.9) можно заменить на приближенное.

Замечание 4. Положим $I_0(u) = \int_1^\infty \log f(u\lambda(t))\,dt$. Если функция $\lambda(\,\cdot\,)$ удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \left|\log'' \lambda(t)\right| dt < \infty \tag{1.17}$$

и, кроме того,

$$\int_1^\infty \left|(s\,\log' f(s))'\right| ds < \infty, \tag{1.18}$$

то (см. (1.13))

$$L(u) = I_0(u) + 0.5\,\log f(u) + O\,(1), \quad u \to \infty. \tag{1.19}$$

Отметим, что (1.18) выполняется, если функция $s\,\log' f(s)$ монотонна на бесконечности. Другие условия можно найти в [10] и [15].

Нижеследующее следствие теоремы 3 представляет собой аналог теоремы 4 из [13].

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.1), **R**, (1.12), (1.17), (1.18) *и* $s^2\,I_0''(s) \to \infty,\ s \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(S < r) \asymp \sqrt{\frac{f(u)}{u^2\,I_0''(u)}}\; e^{I_0(u)+ur}, \quad r \to 0,$$

где функция $u = u(r)$ *при некоторой постоянной* $\varepsilon \in (0,1)$ *и всех достаточно малых положительных* r *удовлетворяет условиям*

$$I_0'(\varepsilon u) + r \leqslant 0 \leqslant I_0'(u/\varepsilon) + r, \qquad \left|\frac{I_0'(u) + r}{\sqrt{I_0''(u)}}\right| < 1/\varepsilon.$$

2. Доказательства. При доказательствах нами существенно используются результаты из [12] и [13].

Пусть случайная величина $X(u)$, $u \geqslant 0$, имеет распределение

$$e^{-u\,r}\,V(dr)/f(u).$$

Из [13, (3.4), (3.5)] следует, что

$$\mathbf{P}(S < r) \leqslant \frac{e^{L(u)+ur}}{\tau(u)}\;\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 6\,\tau(u)\,\mu(u)\right), \tag{2.1}$$

где

$$\mu(u) = \frac{1}{\sigma^3(u)} \sum_{j\geqslant 1} \lambda_j^3 \,\mathbf{E}\left|X(u\,\lambda(j)) - \mathbf{E}\,X(u\,\lambda(j)\right|^3, \tag{2.2}$$

а функция u удовлетворяет условию (1.9). Кроме того,

$$\mathbf{P}(S < r) \leqslant e^{L(u)+ur}. \tag{2.3}$$

Имеем,

$$\mu(u) \leqslant 8 \sum_{j\geqslant 1} \lambda^3(j)\,\mathbf{E}\,X^3(u\lambda(j)) \leqslant 8A/\tau(u), \tag{2.4}$$

где, согласно [12, (2.5) при $h \geqslant 1$] и (1.12) (см. также [14, лемма 2.2],

$$A = \sup_{\gamma>0} \gamma\,\mathbf{E}\,X^3(\gamma)/\mathbf{Var}X(\gamma) < \infty. \tag{2.5}$$

Верхняя оценка в (1.13) вытекает из (2.1), (2.3)–(2.5).

Далее, из [12, (3.6), (3.7) и (3.10)] с учетом (2.2), (2.4) и (2.5) при любом $K > 0$ следует

$$\mathbf{P}(S<r) \geqslant e^{L(u)+ur-2K} \max\left(1-\frac{\tau^2(\bar u)}{K^2}, \frac{1}{\tau(\bar u)}\big(K\,\bar\Phi(K/\tau(\bar u)) - 48A\big)\right), \tag{2.6}$$

где u и $\bar u$ удовлетворяют условиям (1.9) и $\bar u(\,r + L'(\bar u)) = K$, соответственно, $\bar\Phi(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t d\Phi(x)$, а $\Phi(\,\cdot\,)$ – стандартное нормальное распределение. Кроме того,

$$|\tau^2(\bar u) - \tau^2(u)| \leqslant (2 + 8\,A)\,K. \tag{2.7}$$

Оценка в (1.13) снизу вытекает из (2.6) и (2.7) при достаточно большом K. Теорема 3 доказана. □

Рассмотрим замечание 1. Его первое утверждение следует из [9]. Для проверки второго заметим, что если $u\,\lambda(n+1) < 1 \leqslant u\,\lambda(n)$, то

$$\tau^2(u) \leqslant \Bigg(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} + \sum_{j>n}\Bigg)(u\,\lambda(j))^2\,\mathbf{E}\,X^2(u\,\lambda(j)) = J_1 + J_2.$$

В нашем примере при $u \to \infty$

$$J_1 = O\bigg(u^2 \sum_{j>n} \lambda^2(j)\bigg), \quad J_2 = O\bigg(u^2 \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{1}{|\ln u\lambda(j)|}\bigg).$$

Пусть $u = u_N = e^{(N+1/2)^2}$, где $N = 1, 2, \dots$. Тогда $n = N$ и, в согласии с предыдущими оценками, при $z_N = (N+1/2)^2$ и $N \to \infty$

$$J_1 = O\biggl(\sum_{j \geqslant N} e^{-2(j^2 - z_N)}\biggr) = O(e^{-cN}),$$

$$J_2 = O\biggl(\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \frac{1}{z_N - j^2}\biggr) = O(\ln N/N).$$

Таким образом, $\lim\limits_{N\to\infty} \tau(u) = 0$. Замечание 1 полностью проверено.

Замечание 2 является следствием очевидных оценок $f''(s) \geqslant \beta(1/s)/e$ и $s\,|f'''(s)| \leqslant \beta(1/s) + \int\limits_1^\infty \beta(x/s)\, e^{-x}(x-1)\,dx$.

Замечание 3 вытекает из нижеследующих соотношений (см. [12, (3.10) и далее]), в которых функция $h = h(r)$ удовлетворяет уравнению $L'(h) + r = 0$:

$$\left|\ln\frac{\tau^2(u)}{\tau^2(h)}\right| = \left|\int\limits_h^u \frac{d\tau^2(u)}{\tau^2(u)}\right| \leqslant (2 + 8\,A)\left|\int\limits_h^u \frac{du}{u}\right| = (2 + 8\,A)\left|\ln\frac{u}{h}\right|,$$

$$0 \leqslant L(u) + u\,r - (L(h) + h\,r) = \int\limits_h^u (L'(t) + r)\,dt \leqslant |(u-h)|\,|L'(u) + r|$$
$$= (u-h)^2\,L''(\widetilde{u}), \quad \widetilde{u} \in (u, h).$$

Замечание 4 и теорема 4 с учетом (2.5) проверяются так же, как аналогичные утверждения из [10] и [13]. □

Литература

1. F. Aurzada, *On the lower tail probabilities of some random sequences in l_p.* — J. Theor. Probab., **20** (2007), 843–858.
2. F. Aurzada, *A short note on small deviations of sequences of i.i.d. random variables with exponentially decreasing weights.* — Statist. Probab. Letters **78** (2008), 2300–2307.
3. A. A. Borovkov, P. S. Ruzankin, *On small deviations of series of weighted random variables.* — J. Theor. Probab. **21** (2008), 628–649.
4. L. V. Rozovsky, *Small deviations of series of weighted i.i.d. non-negative random variables with a positive mass at the origin.* — Statist. Probab. Letters, **79** (2009), 1495–1500.

5. Л. В. Розовский, *О малых уклонениях сумм взвешенных положительных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **384** (2010), 212–224.
6. Л. В. Розовский, *О малых уклонениях рядов независимых неотрицательных случайных величин с гладкими весами.* — Теория вероятн. и ее примен. **58**, No. 1, (2013), 133–151.
7. R. Davis, S. Resnick, *Extremes of moving averages of random variables with finite endpoint.* — Ann. Probab., **19** (1991), 312–328.
8. A. A. Borovkov, P. S. Ruzankin, *Small deviations of series of independent positive random variables with weights close to exponential.* — Siber. Adv. Math, **18**, No. 3, (2008), 163–175.
9. M. A. Lifshits, *On the lower tail probabilities of some random series.* — Ann. Probab. **25** (1997), 424–442.
10. T. Dunker, M. A. Lifshits, W. Linde, *Small deviations of sums of independent variables.* — In: High Dimensional Probability (Progress in Probability, **43**), Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 59–74.
11. Л. В. Розовский, *О вероятностях малых уклонений сумм независимых положительных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **341** (2007), 151–167.
12. Л. В. Розовский, *Малые уклонения взвешенной суммы независимых положительных случайных величин с общим распределением, убывающим в нуле не быстрее степени.* — Теория вероятн. и ее примен., в печати.
13. L. V. Rozovsky, *Small deviation probabilities of weighted sums under minimal moment assumptions.* — Statist. Probab. Letters **86**, No. 1, (2014), 1–6.
14. N. C. Jain, W. E. Pruitt, *Lower tail probability estimates for subordinators and nondecreasing random walks.* — Ann. Probab. **15**, No. 1, (1987), 76–101.
15. L. V. Rozovsky, *Comparison theorems for small deviations of weighted series.* — Probab. Math. Statist. **32**, No. 1, (2012), 117–130.
16. L. V. Rozovsky, *Small deviation probabilities of weighted sums with fast decreasing weights.* — Probab. Math. Statist., принято в печать.

Rozovsky L. V. Small deviation probabilities for weighted sum of independent random variables with a common distribution, decreasing at zero not faster than a power.

In the note we give estimates of small deviation probabilities of a sum $\sum\limits_{j\geqslant 1} \lambda_j X_j$, where $\{\lambda_j\}$ are positive numbers and $\{X_j\}$ are i.i.d. positive random variables, satisfying mild assumptions at zero and infinity.

С.-Петербургская
химико-фармацевтическая академия
С.-Петербург, Россия
E-mail: l_rozovsky@mail.ru

Поступило 5 ноября 2014 г.