Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

М. В. Платонова

НЕВЕРОЯТНОСТНЫЕ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ: ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛЕВИ–ХИНЧИНА, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Введение

Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $\mathbb{R}$ с интенсивностью $\mathbf{E}\nu(dx) = \Lambda\,(dx)$, причем мера Λ – симметрична и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)\, d\Lambda(x) < \infty, \tag{1}$$

то есть является мерой Леви некоторого безгранично делимого распределения.

Обозначим множества $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $\mathbb{B}_\varepsilon = \{x : \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1\}$.

Для $\varepsilon > 0$ через ξ_ε обозначим случайную величину (интеграл по пуассоновской мере ν)

$$\xi_\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} x\,\nu(dx) = \int\limits_{\mathbb{B}_\varepsilon} x\,\nu(dx) + \int\limits_{|x|>1} x\,\nu(dx). \tag{2}$$

Известно, что если выполнено (1), то существует предел

$$\xi = (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_\varepsilon = (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{B}_\varepsilon} x\,\widetilde{\nu}(dx) + \int\limits_{|x|>1} x\,\nu(dx), \tag{3}$$

причем случайная величина ξ имеет безгранично делимое распределение с мерой Леви Λ. Характеристическая функция $f(p)$ случайной величины ξ равна

$$f(p) = \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{ipx} - 1 - ipx\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\right) d\Lambda(x)\right). \tag{4}$$

Представление (3) называется представлением Леви безгранично делимого распределения.

Ключевые слова: безгранично делимые распределения, предельные теоремы, псевдопроцессы.

Хорошо известно (см., например, [1]), что безграничная делимость вероятностного распределения является как необходимым, так и достаточным условием того, что данное распределение является предельным для распределений сумм независимых случайных величин, удовлетворяющих условию бесконечной малости слагаемых.

Далее, в работах [2–4] был предложен подход, позволяющий получить в качестве предельных распределений не только вероятностные распределения. В частности, в работе [2] было введено понятие обобщенного устойчивого распределения с показателем $\alpha > 2$, $\alpha \neq 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Обобщенное устойчивое распределение уже не является вероятностной мерой, а является только абсолютно непрерывной знакопеременной мерой на прямой, имеющей конечную полную вариацию. Тем не менее, было показано, что эти распределения могут появляться как предельные для распределений сумм независимых случайных величин.

Именно, в [2] рассматривалось предельное поведение распределений сумм независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{P}(\xi_1 > x) = \mathbf{P}(\xi_1 < -x) = \frac{C_1}{x^\alpha}\big(1 + o(1)\big), \quad x \to \infty,$$

причем $\alpha > 2$. Из последнего условия вытекает, что величины ξ_i имеют конечные дисперсии, и значит в силу центральной предельной теоремы последовательность распределений нормированных сумм

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

слабо сходится к нормальному закону. Ясно, что в этом случае в предельном распределении отсутствует информация о поведении хвостового распределения отдельных слагаемых. Чтобы сохранить эту информацию, в [2] рассматривалась последовательность сумм с более слабой нормировкой

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

При такой нормировке последовательность распределений нормированных сумм уже не является слабо сходящейся. В [2] был предложен способ сделать эту последовательность сходящейся при помощи свертки со специально выбранной последовательностью быстро осциллирующих функций. В качестве предельного распределения в этом случае возникало (невероятностное) симметричное устойчивое распределение с показателем α. Хотя предельное распределение в данном случае представляет из себя знакопеременную меру, в [2] было показано, что соответствующая предельная теорема имеет простой вероятностный смысл, именно, предельная мера описывает асимптотику вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин.

В данной работе мы, как и в [2], рассмотрим нетипичный для теории вероятности случай, когда $\int\limits_{\mathbb{R}}(x^2 \wedge 1)d\Lambda(x) = \infty$.

Мы предположим, что Λ – симметричная мера с плотностью $\lambda(x) = g(x)\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}$, причем $g\,(x) \in C^1\,(\mathbb{R})$, $0 < B \leqslant g(x) \leqslant C$, $\alpha \in (2,4)\cup(4,6)$. В этом случае не существует предела в (3) при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через p_ε плотность распределения случайной величины ξ_ε. В данной работе мы строим семейство функций ω_ε, такое что $p_\varepsilon * \omega_\varepsilon$ сходится (при $\varepsilon \to 0$) в $L_2\,(\mathbb{R})$ к некоторой функции q. В отличие от вероятностного случая, функция q принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Далее мы покажем, что знакопеременная мера $Q(dx) = q(x)dx$ (ее естественно считать невероятностным аналогом безгранично-делимого распределения) является предельной для регуляризованных распределений сумм независимых случайных величин. Именно, рассмотрим последовательность серий

$$
\begin{array}{llll}
\xi_{11} & & & \\
\xi_{21} & \xi_{22} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \\
\xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn}
\end{array}
$$

независимых в каждой серии одинаково распределенных симметричных случайных величин. Предположим, что функция распределения F_n случайной величины ξ_{nk} удовлетворяет условию

$$
\begin{aligned}
nF_n\,(x) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda\,(-\infty, x)\,, \quad x < 0,\\
n\bigl(1 - F_n(x)\bigr) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda\,(x, +\infty)\,, \quad x > 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ распределение случайной величины $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_{ni}$, а через p_n – соответствующую плотность. Легко видеть, что при заданных условиях на меру Λ, последовательность $\mathcal{P}_n$ не является слабо сходящейся. Мы построим последовательность функций ζ_n, $n\in\mathbb{N}$, такую что регуляризованная последовательность $p_n + p_n * \zeta_n$ сходится к функции q в $L_2(\mathbb{R})$.

Предельная мера Q является знакопеременной на всей оси, но вне некоторого конечного интервала она положительна. В последней части работы, используя положительную часть предельной меры, мы докажем утверждение об асимптотике вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин.

§1. Сходимость в $L_2(\mathbb{R})$ регуляризованных распределений стохастических интегралов

Пусть $\nu(dx)$ – пуассоновская случайная мера на $\mathbb{R}$ с симметричной интенсивностью $\Lambda(dx)$. Для $\varepsilon>0$ через ξ_ε обозначим случайную величину

$$\xi_\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} x\,\nu(dx)\,, \tag{6}$$

где $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Предположим, что мера Λ имеет следующий вид: $d\Lambda(x)=\lambda(x)dx$, где $\lambda(x) = g(x)\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}$, $\alpha\in(2,4)\cup(4,6)$, а функция $g(x)$ ограничена сверху и снизу, именно

$$0 < B \leqslant g(x) \leqslant C. \tag{7}$$

В этом случае $\int\limits_{\mathbb{R}}(x^2\wedge 1)d\Lambda(x)=\infty$ и, значит, в (4) стоит расходящийся интеграл.

Регуляризуем выражение, стоящее под знаком интеграла в (4). При регуляризации будем умножать характеристическую функцию на некоторую специально выбранную функцию $\widehat{\omega}_\varepsilon$. Эта операция соответствует свертке плотности p_ε распределения случайной величины ξ_ε с функцией ω_ε.

В случае $\alpha\in(2,4)$ положим

$$\widehat{\omega}_\varepsilon(p) = \exp\left(\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\left(\frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\right)d\Lambda(x)\right), \tag{8}$$

а при $\alpha \in (4,6)$

$$\widehat{\omega}_\varepsilon(p) = \exp\left(\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} \left(\frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!} \right) d\Lambda(x) \right). \tag{9}$$

Тогда регуляризованная характеристическая функция $\widehat{q}_\varepsilon(p)$ при $\alpha \in (2,4)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{q}_\varepsilon(p) &= \exp\left(\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} \left(e^{ipx} - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \right) d\Lambda(x) \right) \\ &= \exp\left(2\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[0,1]}(x) \right) d\Lambda(x) \right), \end{aligned} \tag{10}$$

а при $\alpha \in (4,6)$

$$\begin{aligned} \widehat{q}_\varepsilon(p) &= \exp\left(\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} \left(e^{ipx} - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!} \right) d\Lambda(x) \right) \\ &= \exp\left(2\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!} \right) d\Lambda(x) \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Теорема 1. *Существует L_2-предел $\widehat{q} = (L_2)\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\widehat{q}_\varepsilon$, где при $\alpha \in (2,4)$*

$$\widehat{q}(p) = \exp\left(2\int\limits_{0}^{\infty} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[0,1]}(x) \right) d\Lambda(x) \right), \tag{12}$$

а при $\alpha \in (4,6)$

$$\widehat{q}(p) = \exp\left(2\int\limits_{0}^{\infty} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!} \right) d\Lambda(x) \right). \tag{13}$$

Доказательство. Сходимость при каждом $p \in \mathbb{R}$ очевидна. Покажем, что сходимость в (12), (13) имеет место также и в смысле $L_2(\mathbb{R})$.

При $\alpha \in (2,4)$ имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}} \widehat{q}_\varepsilon\,(p)$$
$$= \exp\left(2\int\limits_{x\geqslant\varepsilon}\left(\cos\left(px\right)-1+\frac{p^2x^2}{2!}-\frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\right)d\Lambda(x)\right)$$
$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}}\exp\left(2C\left|p\right|^\alpha\int\limits_{\varepsilon|p|}^{\infty}\left(\cos y-1+\frac{y^2}{2!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}-\frac{2p^4}{4!}B\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{x^4}{x^{1+\alpha}}dx\right)$$
$$\leqslant \exp\left(c_0\left|p\right|^\alpha-\frac{2p^4}{4!\,(4-\alpha)}B\Big(1-\frac{1}{2^{4-\alpha}}\Big)\right)\leqslant \exp\left(c_0\left|p\right|^\alpha-c_1p^4\right),$$

где $c_0>0$ и $c_1>0$. Теперь, используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем $\widehat{q}=(L_2)\lim\limits_{\varepsilon\to0}\widehat{q}_\varepsilon$.

Рассмотрим случай $\alpha\in(4,6)$. Сначала выберем $K>0$ так, чтобы для $|y|>K$ выполнялось неравенство

$$\frac{y^4}{2\cdot 4!}>\cos y-1+\frac{y^2}{2!}.$$

При $|p|\,\varepsilon\geqslant K$ имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant1}\widehat{q}_\varepsilon\,(p)=\sup_{0<\varepsilon\leqslant1}\exp\left(2\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\left(\cos\left(px\right)-1+\frac{p^2x^2}{2!}-\frac{p^4x^4}{4!}\right)\frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}dx\right)$$
$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant1}\exp\left(2\left|p\right|^\alpha B\int\limits_{|p|\varepsilon}^{\infty}\left(\cos y-1+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^4}{4!}\right)\frac{1}{y^{1+\alpha}}dy\right)$$
$$\leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant1}\exp\left(-\left|p\right|^\alpha B\int\limits_{|p|\varepsilon}^{\infty}\frac{y^4}{4!}\frac{1}{y^{1+\alpha}}dy\right)\leqslant\exp\left(-B\frac{\left|p\right|^4}{4!\,(\alpha-4)}\right),$$

а при $|p|\,\varepsilon<K$ имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant1}\widehat{q}_\varepsilon\,(p)=\sup_{0<\varepsilon\geqslant1}\exp\left(2\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\left(\cos\left(px\right)-1+\frac{p^2x^2}{2!}-\frac{p^4x^4}{4!}\right)\frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}dx\right)$$
$$\leqslant \exp\left(2B\left|p\right|^\alpha\int\limits_{K}^{\infty}\left(\cos y-1+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^4}{4!}\right)\frac{1}{y^{1+\alpha}}dy\right).$$

Снова используя теорему Лебега, получаем $\widehat{q} = (L_2)\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \widehat{q}_\varepsilon$. □

Обозначим через q_ε обратное преобразование Фурье функции $\widehat{q}_\varepsilon$. Из теоремы 1 следует L_2-сходимость q_ε при $\varepsilon \to 0$. Обозначим

$$q = (L_2) \lim_{\varepsilon\to 0} q_\varepsilon. \tag{14}$$

Заметим, что $\int\limits_{\mathbb{R}} q\,(x)\,dx = \widehat{q}\,(0) = 1$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 q\,(x)\,dx = -\widehat{q}''\,(0) = 0$. Следовательно, q – плотность знакопеременной меры Q на $\mathbb{R}$, полный интеграл от которой равен 1, а полная вариация конечна.

Таким образом, не существует L_2-предела у последовательности p_ε при $\varepsilon \to 0$, но есть L_2-предел у последовательности q_ε.

§2. Сходимость в $L_2\,(\mathbb{R})$ регуляризованных распределений сумм независимых случайных величин

Рассмотрим последовательность серий

$$\begin{matrix} \xi_{11} & & & \\ \xi_{21} & \xi_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{matrix}$$

независимых в каждой серии одинаково распределенных симметричных случайных величин. Предположим, что функция распределения F_n случайной величины ξ_{nk} удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} nF_n\,(x) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda\,(-\infty, x)\,, \qquad x<0,\\ n\big(1-F_n(x)\big) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda\,(x, +\infty)\,, \quad x>0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Дополнительно предположим, что для некоторых констант $0<\gamma_0<1$ и $\mu>0$ характеристическая функция $f_{\xi_n}(p)$ случайной величины ξ_{nk} удовлетворяет условию

$$\sup_{p>n^{1/\alpha}} f_{\xi_n}(p) \leqslant 1-\mu n^{-\gamma_0}. \tag{16}$$

Как и выше, предполагаем, что Λ – симметричная мера с плотностью $\lambda(x) = g(x)\frac{1}{x^{1+\alpha}}$, $g\,(x) \in C^1\,(\mathbb{R})\,$,$0 < B \leqslant g(x) \leqslant C$, $\alpha \in (2,4)\cup(4,6)$. Обозначим через $\Lambda_n\,(x) = nF_n\,(x)$. Предположим, что у $\Lambda_n\,(x)$ существует плотность $\lambda_n\,(x) = \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}$. Обозначим через $h_n\,(x) =$

$(g(x) - g_n(x))\,\mathbf{1}_{[n^{-1/\alpha},+\infty)}(x)$. Предположим, что выполнено следующее условие

$$\|h_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{17}$$

а также существует такая константа $D > 0$, что

$$g_n(x) \leqslant D n^{1/\alpha} x^{1+\alpha} \tag{18}$$

при $x \in [0, n^{-1/\alpha})$. Дополнительно предположим, что существует такая функция $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$, что

$$|h_n(x)| \leqslant h(x). \tag{19}$$

Условия (16)–(19) выполнены, например, для случая, когда $g_n(x) = g(x) \cdot \mathbf{1}_{[n^{-1/\alpha},+\infty)}$.

Мы рассмотрим распределения сумм независимых случайных величин $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_{ni}$. Такая последовательность распределений не имеет слабого предела. Покажем, что после некоторой регуляризации эта последовательность сходится к знакопеременной мере с плотностью q. Мы будем превращать последовательность распределений сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_{ni}$ в сходящуюся с помощью свертки со специально выбранной последовательностью быстро осциллирующих функций. Эта последовательность выбирается по-разному для $\alpha \in (2,4)$ и $\alpha \in (4,6)$. Эти случаи мы рассмотрим отдельно.

2.1. Случай $\alpha \in (2,4)$**.** Сосчитаем характеристическую функцию f_n суммы независимых случайных величин $\xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}$, где функция распределения каждой из случайных величин удовлетворяет (15). Имеем

$$\begin{aligned} f_n(p) = \Bigg(1 &+ \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \Big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\Big) \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}} dx \\ &+ \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}} \Big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\Big) \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx \\ &- \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \Big(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\Big) \frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx - \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x)\Bigg)^n. \end{aligned} \tag{20}$$

Введем обозначения

$$V_n(p) = 2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\right)\frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}dx,$$

$$v_n(p) = 2\int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}}\left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\right)\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx,$$

$$w_n(p) = 2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\right)\frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx.$$

В этих обозначениях

$$f_n(p) = \left(1 + \frac{1}{n}V_n(p) + \frac{1}{n}v_n(p) - \frac{1}{n}w_n(p) - \frac{2}{n}\int\limits_0^{\infty}\frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)\right)^n.$$

Лемма 1. *При $n \to +\infty$ справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2}{2!}d\Lambda_n(x) = \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}d\Lambda(x)\big(1 + o(1)\big),$$

при этом существуют такие константы $\widetilde{B} > 0$ и $\widetilde{C} > 0$, что

$$\frac{\widetilde{B}}{n^{2/\alpha}} \leqslant \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}d\Lambda(x) \leqslant \frac{\widetilde{C}}{n^{2/\alpha}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{2}{n}\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2}{2!}d\Lambda_n(x) &= \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}d\Lambda(x)\\ &+ \frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}}\frac{x^2}{2!}\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx - \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}\frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx.\end{aligned} \tag{21}$$

Первое слагаемое в (21) оценим

$$\frac{B}{n^{2/\alpha}(\alpha-2)} \leqslant \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}g(x)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} \leqslant \frac{C}{n^{2/\alpha}(\alpha-2)}. \tag{22}$$

Учитывая (18), имеем

$$\frac{2}{n}\int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}}\frac{x^2}{2!}\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx \leqslant \frac{Dn^{1/\alpha}}{n}\int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}}x^2dx = \frac{D}{3n^{2/\alpha+1}} = o\left(\frac{1}{n^{2/\alpha}}\right).$$

Пользуясь (17), получаем

$$\left|\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{x^2}{2!}\frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx\right| \leqslant \|h_n\|_\infty\frac{n^{-2/\alpha}}{\alpha-2} = o\left(\frac{1}{n^{2/\alpha}}\right). \qquad \square$$

Лемма 2. *Существуют такие константы $\widetilde{B}_1 > 0$ и $\widetilde{C_1} > 0$, что при $|p| \leqslant 1$ справедливо неравенство $\widetilde{B}_1|p|^\alpha \leqslant V_n(p) \leqslant \widetilde{C}_1|p|^\alpha$.*

Доказательство. Представим $V_n(p)$ в виде

$$\begin{aligned} V_n(p) &= 2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\left(\cos(px)-1+\frac{p^2x^2}{2!}\right)g(x)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} \\ &= 2|p|^\alpha\int\limits_{|p|n^{-1/\alpha}}^{\infty}\left(\cos y-1+\frac{y^2}{2!}\right)g\left(\frac{y}{|p|}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Из условия $0 < B \leqslant g(x) \leqslant C$ следует, что при $|p| \leqslant 1$

$$\widetilde{B}_1|p|^\alpha \leqslant V_n(p) \leqslant \widetilde{C}_1|p|^\alpha,$$

где

$$\widetilde{B}_1 = 2B\int\limits_{1}^{\infty}\left(\cos y-1+\frac{y^2}{2!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} \quad \text{и} \quad \widetilde{C}_1 = 2C\int\limits_{0}^{\infty}\left(\cos y-1+\frac{y^2}{2!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}. \ \square$$

Лемма 3. *Справедливы соотношения $\sup\limits_n v_n(p) = o(|p|^\alpha)$ и $\sup\limits_n w_n(p) = o(|p|^\alpha)$ при $p \to 0$.*

Доказательство. Можно считать, что $|p| \leqslant 1$. Представим $w_n(p)$ в виде

$$w_n(p) = 2 \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\right) h_n(x) \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{1} \frac{p^4x^4}{4!} h_n(x) \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$+ 2|p|^{\alpha} \int\limits_{|p|}^{\infty} \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\right) h_n\left(\frac{y}{|p|}\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Учитывая (17), имеем

$$\sup_n \left(2 \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{1} \frac{p^4x^4}{4!} h_n(x) \frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right) = o(|p|^{\alpha}).$$

Чтобы оценить второе слагаемое, рассмотрим случаи $\alpha \in (2,3]$ и $\alpha \in (3,4)$ отдельно. В случае $\alpha \in (2,3]$

$$2|p|^{\alpha} \int\limits_{|p|}^{\infty} \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\right) h_n\left(\frac{y}{|p|}\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \leqslant \max_{y\in[0,\infty)} \frac{\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}}{y^{1+\alpha}} |p|^{\alpha}$$

$$\times \int\limits_{|p|}^{\infty} h_n\left(\frac{y}{|p|}\right) dy = K|p|^{\alpha+1} \int\limits_{1}^{\infty} h_n(t)\, dt \leqslant K|p|^{\alpha+1} \int\limits_{1}^{\infty} h(t)\, dt = o(|p|^{\alpha}).$$

В случае $\alpha \in (3,4)$ второе слагаемое представим в виде

$$2|p|^{\alpha} \int\limits_{|p|}^{\infty} \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\right) h_n\left(\frac{y}{|p|}\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

$$\leqslant 2|p|^{\alpha} \int\limits_{|p|}^{1} \frac{y^4}{4!} h_n\left(\frac{y}{|p|}\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} + 2|p|^{\alpha} \max_{y\in[1,\infty)} \frac{\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}}{y^{1+\alpha}} \int\limits_{1}^{\infty} h_n\left(\frac{y}{|p|}\right) dy$$

$$\leqslant 2|p|^3 \int\limits_1^{\frac{1}{|p|}} h(t)|p|dt + 2|p|^{\alpha+1} \max_{y\in[1,\infty)} \frac{\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}}{y^{1+\alpha}} \int\limits_0^{\infty} h(t)dt = o(|p|^{\alpha}),$$

так как $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} v_n(p) &= 2 \int\limits_0^{n^{-1/\alpha}} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!}\right) \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx \\ &\leqslant 2p^4 D n^{1/\alpha} \int\limits_0^{n^{-1/\alpha}} \frac{x^4}{4!} dx = \frac{D}{60 n^{4/\alpha}} p^4 = o(|p|^{\alpha}). \end{aligned} \tag{23}$$

Лемма 4. *Существуют ε_0, $d_0 > 0$, такие что для $|p| < \varepsilon_0$ справедливо неравенство*

$$0 \leqslant f_n(p) \exp\left(2 \int\limits_0^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x)\right) \leqslant e^{d_0|p|^{\alpha}}.$$

Доказательство. Используя (20) и неравенство $\ln x \leqslant x - 1$, справедливое при $x > 0$, получим

$$\ln\left(f_n(p) \exp\left(2\int\limits_0^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x)\right)\right) = \ln\left(f_n(p)\right) + 2\int\limits_0^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x)$$

$$\leqslant n\left(\frac{1}{n}V_n(p) + \frac{1}{n}v_n(p) - \frac{1}{n}w_n(p) - \frac{2}{n}\int\limits_0^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x)\right)$$

$$+ 2\int\limits_0^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x) = V_n(p) + v_n(p) - w_n(p).$$

Утверждение леммы следует из лемм 2 и 3. □

Выберем такую убывающую функцию $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, что $\chi(x) = 1$ при $x \leqslant 1$ и $\chi(x) = 0$ при $x \geqslant 2$. Для каждого $\alpha \in (2, 4)$ мы выберем и зафиксируем число $\beta = \beta(\alpha)$ так, что $\beta \in \left(\alpha, \min\{4, \frac{2\alpha}{4-\alpha}\}\right)$ при $\alpha \in (2, 3)$, или $\beta = 4$ в случае $\alpha \in (3, 4)$.

Определим последовательность функций $\psi_n, n \in \mathbb{N}$, полагая

$$\psi_n(p) = \left(\exp\left\{ \left(\frac{2}{n} \int\limits_0^\infty \frac{p^2 x^2}{2!} d\Lambda_n(x) - \frac{\gamma p^4}{n} \right) \chi\left(\frac{|p|}{n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}} \right) \right\} \right)^n, \tag{24}$$

где константа $\gamma > 0$ определяется формулой

$$\gamma = \int\limits_0^1 \frac{x^4}{4!} d\Lambda\,(x)\,. \tag{25}$$

Лемма 5. *Сущетвует n_0, такое что для всех $n \geqslant n_0$*

$$\inf_p \psi_n\,(p) = 1. \tag{26}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (21). Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для этого ε найдется число $N_1 \in \mathbb{N}$, такое что для любого $n > N_1$ справедливо неравенство

$$\left| 2 \int\limits_0^{n^{-1/\alpha}} \frac{x^2}{2} \frac{g_n\,(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right| < \varepsilon$$

и найдется число $N_2 \in \mathbb{N}$, такое что для любого $n > N_2$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^\infty \frac{x^2}{2} \frac{h_n\,(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right| \leqslant \frac{\|h_n\|_\infty}{(\alpha-2)\,n^{2/\alpha}} < \frac{\varepsilon}{(\alpha-2)\,n^{2/\alpha}}.$$

Тогда для фиксированного $\varepsilon > 0$ и $n > N = \max\,(N_1, N_2)$ справедливо неравенство

$$\frac{2}{n} \int\limits_0^\infty \frac{p^2 x^2}{2!} d\Lambda_n\,(x) \geqslant \frac{p^2\,(B-\varepsilon)}{(\alpha-2)\,n^{2/\alpha}} - \frac{\varepsilon}{n} p^2.$$

Функция $\psi_n(p)$ отлична от 1 только при $|p| \leqslant 2n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}$. Покажем, что для таких значений p и достаточно больших n справедливо неравенство

$$\frac{\gamma p^4}{n} \leqslant p^2 \left(\frac{B-\varepsilon}{(\alpha-2)\,n^{2/\alpha}} - \frac{\varepsilon}{n} \right)$$

или

$$|p| \leqslant \sqrt{\frac{B-\varepsilon}{\gamma\,(\alpha-2)}\frac{n^{1/2}}{n^{1/\alpha}}}\sqrt{1-\frac{\varepsilon\,(\alpha-2)}{C+1}\frac{n^{2/\alpha}}{n}}.$$

Выберем $\varepsilon < \frac{C+1}{\alpha-2}$. Тогда

$$|p| \leqslant \sqrt{\frac{2B}{\gamma\,(\alpha-2)}\frac{n^{1/2}}{n^{1/\alpha}}}.$$

Это равносильно следующему условию на показатели

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}<\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha},$$

что эквивалентно условию на показатель β:

$$\beta < \frac{2\alpha}{4-\alpha}. \qquad \square$$

Отметим, что последовательность функций $f_n\,(p)$, заданная формулой (20), не имеет предела. С помощью умножения на функцию ψ_n, заданную формулой (24), получим сходящуюся последовательность.

Теорема 2. *Последовательность $f_n\psi_n$ сходится в $L_2\,(\mathbb{R})$ при $n\to\infty$ к функции $\widehat{q}$, заданной формулой* (12).

Доказательство. Сначала покажем, что справедливо предельное соотношение $f_n(p)\psi_n(p)\to\widehat{q}(p)$ при $n\to\infty$ для каждого $p\in\mathbb{R}$.

Заметим, что для каждого фиксированного p и достаточно больших n (таких, что $|p|\,n^{1/\beta-1/\alpha}<1$), имеем

$$f_n(p)\psi_n(p) = \left[1+\frac{1}{n}V_n\,(p)+\frac{1}{n}v_n\,(p)-\frac{1}{n}w_n\,(p)-\frac{2}{n}\int\limits_0^\infty\frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)\right]^n \times\left(\exp\left(\frac{2}{n}\int\limits_0^\infty\frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)\right)\right)^n\exp\left(-\gamma p^4\right).$$

Используя леммы 2 и 3, получаем

$$f_n(p)\psi_n(p) = \left[1 + \frac{1}{n}V_n\,(p) + \frac{1}{n}v_n\,(p) - \frac{1}{n}w_n\,(p) - \frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x)\right]^n$$

$$\times\left(1 + \frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!}d\Lambda_n(x) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \exp\left(-\gamma p^4\right)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{n}V_n\,(p) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \exp\left(-\gamma p^4\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{q}(p). \qquad \square$$

Покажем теперь, что $f_n\psi_n$ сходится к $\widehat{q}$ не только поточечно, но также и в смысле $L_2\,(\mathbb{R})$.

Имеем

$$f_n\,(p)\,\psi_n(p) = A_n(p) + B_n(p), \tag{27}$$

где

$$A_n(p) = f_n\,(p)\,\psi_n(p)\mathbf{1}_{[0,2n^{1/\alpha-1/\beta})}(p)$$

и

$$B_n(p) = f_n\,(p)\,\psi_n(p)\mathbf{1}_{[2n^{1/\alpha-1/\beta},\infty)}(p).$$

Заметим, что для каждого $p\in\mathbb{R}$ $A_n(p)\to\widehat{q}(p)$ при $n\to\infty$, а в силу лемм 4 и 5 функции A_n^2 мажорируются функцией $e^{2d_0|p|^\alpha-2\gamma p^4}$. Используя теорему Лебега, получаем, что $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{q}$ в $L_2\,(\mathbb{R})$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\|B_n\|_{L_2}\to 0$ при $n\to\infty$. Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 6. *Существует такое $K>0$, что*

$$|f_{\xi_n}\,(p)| \leqslant \frac{Kn^{1/\alpha}}{|p|}. \tag{28}$$

Доказательство. Представим характеристическую функцию $f_{\xi_n}(p)$ случайной величины ξ_{nk} в виде

$$f_{\xi_n}\,(p) = \frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^\infty \cos{(px)}\,\frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}dx + \frac{2}{n}\int\limits_0^{n^{-1/\alpha}} \cos{(px)}\,\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx$$

$$-\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^\infty \cos{(px)}\,\frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx.$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. Воспользуемся свойством (7) и проинтегрируем по частям

$$\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\cos(px)\,\frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}dx \leqslant \frac{2}{n}C\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\cos(px)\,\frac{dx}{x^{1+\alpha}}$$
$$= -\frac{2C}{n}\frac{\sin\left(pn^{-1/\alpha}\right)}{p}n^{1+1/\alpha} + \frac{2C\,(1+\alpha)}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\frac{\sin(px)}{p}\frac{dx}{x^{2+\alpha}}.$$

Оценивая первое слагаемое по модулю, получаем

$$\left|\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\cos(px)\,\frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}dx\right| \leqslant \frac{2Cn^{1/\alpha}}{|p|} + \frac{2Cn^{1/\alpha}}{|p|} = \frac{4Cn^{1/\alpha}}{|p|}.$$

Учитывая (18), имеем

$$\left|\frac{2}{n}\int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}}\cos(px)\,\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx\right| \leqslant \frac{2Dn^{1/\alpha}}{n\,|p|}.$$

В силу (17)

$$\left|\frac{2}{n}\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\cos(px)\,\frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx\right|$$
$$\leqslant \frac{2}{n}\left\|h_n\right\|_{\infty}\left|\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty}\cos(px)\,\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right| \leqslant \frac{4n^{1/\alpha}}{|p|}\left\|h_n\right\|_{\infty}. \qquad \square$$

Лемма 7. *При* $u \in \left[n^{-1/\beta}, 1\right)$ *справедливо соотношение*

$$f_{\xi_n}\left(n^{1/\alpha}u\right) = 1 - d_n u^2 + O\left(|u|^{\alpha}\right),$$

где $B \leqslant d_n \leqslant C$.

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
f_{\xi_n}(p) = 1 - \frac{p^2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} x^2 \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}} dx + \frac{p^2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} x^2 \frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx \\
+ \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}} (\cos(px) - 1) \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx \\
+ \frac{2}{n} |p|^{\alpha} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\right) \frac{g\big(y/|p|\big)}{y^{1+\alpha}} dy \\
- \frac{2}{n} |p|^{\alpha} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\right) \frac{h_n\big(y/|p|\big)}{y^{1+\alpha}} dy. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Из (7) следует

$$
\frac{B}{n^{2/\alpha}} \leqslant \frac{1}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} x^2 \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}} dx \leqslant \frac{C}{n^{2/\alpha}},
$$

а в силу (17)

$$
\frac{1}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} x^2 \frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx = o\left(\frac{1}{n^{2/\alpha}}\right).
$$

Учитывая (18), имеем

$$
\sup_{n^{1/\alpha - 1/\beta} < p < n^{1/\alpha}} \left| \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}} (\cos(px) - 1) \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right| \leqslant \frac{4D}{n}.
$$

Пятое слагаемое в (29) оценивается

$$
\begin{aligned}
\sup_{n^{1/\alpha - 1/\beta} < p < n^{1/\alpha}} \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\right) \frac{g\left(\frac{y}{|p|}\right)}{y^{1+\alpha}} dy \\
\leqslant \frac{-\pi C}{n \Gamma(1+\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

В силу (17), (19), имеем

$$\sup_{n^{1/\alpha-1/\beta}<p<n^{1/\alpha}} \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\right) \frac{h_n\left(\frac{y}{|p|}\right)}{y^{1+\alpha}} dy = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Тогда

$$f_{\xi_n}\left(n^{1/\alpha}u\right) = 1 - d_n u^2 + O\left(|u|^{\alpha}\right). \qquad \square$$

Вернемся к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Для нормы $\|B_n\|_{L_2}$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \|B_n\|_{L_2}^2 &= \int\limits_{2n^{1/\alpha-1/\beta}}^{\infty} dp \biggl(\frac{2}{n}\int\limits_0^{\infty} \cos(px)\,\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx\biggr)^{2n} \\ &= \int\limits_{2n^{1/\alpha-1/\beta}}^{\infty} dp\left(f_{\xi_n}(p)\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение для $\|B_n\|_{L_2}^2$. В силу (16), (28), имеем

$$\begin{aligned} \|B_n\|_{L_2}^2 &= \int\limits_{2n^{1/\alpha-1/\beta}}^{n^{1/\alpha}} dp\bigl(f_{\xi_n}(p)\bigr)^{2n} \\ &+ \int\limits_{n^{1/\alpha}}^{Kn^{1/\alpha}} dp\bigl(f_{\xi_n}(p)\bigr)^{2n} + \int\limits_{Kn^{1/\alpha}}^{\infty} dp\bigl(f_{\xi_n}(p)\bigr)^{2n} \\ &\leqslant n^{1/\alpha}\left(1 - 4d_n n^{-2/\beta}\right)^{2n} + \left(1-\mu n^{-\gamma}\right)^{2n} n^{1/\alpha}(K-1) + \frac{Kn^{1/\alpha}}{(2n-1)}. \end{aligned}$$

Заметим, что последнее выражение стремится к 0 при $n \to \infty$. $\square$

2.2. Случай $\alpha \in (4,6)$**.** Сосчитаем характеристическую функцию f_n случайной величины $\xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}$. Имеем

$$f_n(p) = \left(1 + \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\right) \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}\, dx\right.$$
$$+ \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\right) \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}\, dx$$
$$- \frac{2}{n} \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\right) \frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}}\, dx$$
$$\left. - \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x) + \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{p^4x^4}{4!} d\Lambda_n(x)\right)^n. \tag{30}$$

Введем обозначения

$$V_n(p) = -2 \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\right) \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}} dx,$$
$$v_n(p) = -2 \int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\right) \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx$$

и

$$w_n(p) = -2 \int\limits_{n^{-1/\alpha}}^{\infty} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\right) \frac{h_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx.$$

В этих обозначениях

$$f_n(p) = \left(1 - \frac{1}{n} V_n(p) - \frac{1}{n} v_n(p) + \frac{1}{n} w_n(p) - \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!} d\Lambda_n(x)\right.$$
$$\left. + \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{p^4x^4}{4!} d\Lambda_n(x)\right)^n.$$

Лемма 8. *При $n \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{2!} d\Lambda_n(x) = \int_{n^{-1/\alpha}}^\infty \frac{x^2}{2!} d\Lambda(x) \big(1 + o(1)\big),$$

$$\int_0^\infty \frac{p^4 x^4}{4!} d\Lambda_n(x) = \int_{n^{-1/\alpha}}^\infty \frac{p^4 x^4}{4!} d\Lambda(x) \big(1 + o(1)\big),$$

и существуют такие положительные константы $\widetilde{B}_2$, $\widetilde{C}_2$, $\widetilde{B}_3$ и $\widetilde{C}_3$, что справедливы неравенства

$$\frac{\widetilde{B}_2}{n^{2/\alpha}} \leqslant \frac{2}{n} \int_{n^{-1/\alpha}}^\infty \frac{x^2}{2!} d\Lambda(x) \leqslant \frac{\widetilde{C}_2}{n^{2/\alpha}}$$

и

$$\frac{\widetilde{B}_3}{n^{4/\alpha}} \leqslant \frac{2}{n} \int_{n^{-1/\alpha}}^\infty \frac{x^4}{4!} d\Lambda(x) \leqslant \frac{\widetilde{C}_3}{n^{4/\alpha}}.$$

Доказательство этой леммы вполне аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 9. *Для $|p| \leqslant 1$ существуют такие положительные константы $\widetilde{B}_4$ и $\widetilde{C}_4$, что справедливо неравенство $\widetilde{B}_4 |p|^\alpha \leqslant V_n(p) \leqslant \widetilde{C}_4 |p|^\alpha$.*

Доказательство. Представим $V_n(p)$ в виде

$$V_n(p) = -2 \int_{n^{-1/\alpha}}^\infty \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2 x^2}{2!} - \frac{p^4 x^4}{4!}\right) g(x) \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$= -2 |p|^\alpha \int_{|p| n^{-1/\alpha}}^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\right) g\left(\frac{y}{|p|}\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Так как функция $g(x)$ удовлетворяет неравенству $0 < B \leqslant g(x) \leqslant C$, то при $|p| \leqslant 1$

$$\widetilde{B}_4 |p|^\alpha \leqslant V_n(p) \leqslant \widetilde{C}_4 |p|^\alpha,$$

где

$$\widetilde{B}_4 = 2B \int_1^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

и

$$\widetilde{C}_4 = 2C\int\limits_0^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}. \qquad \square$$

Лемма 10. *При* $p \to 0$ *справедливы соотношения* $\sup\limits_n v_n(p) = o(|p|^\alpha)$ *и* $\sup\limits_n w_n(p) = o(|p|^\alpha)$.

Доказательство. Можно считать, что $|p| \leqslant 1$. Представим $w_n(p)$ в виде

$$\begin{aligned} w_n(p) &= -2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^\infty \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\right) h_n(x)\,\frac{dx}{x^{1+\alpha}} \\ &\leqslant 2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^1 \frac{p^6x^6}{6!} h_n(x)\,\frac{dx}{x^{1+\alpha}} \\ &- 2|p|^\alpha \int\limits_{|p|}^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\right) h_n\left(\frac{y}{|p|}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Учитывая (17), имеем

$$\sup_n \left(2\int\limits_{n^{-1/\alpha}}^1 \frac{p^6x^6}{6!} h_n(x)\,\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right) = o(|p|^\alpha).$$

Чтобы оценить второе слагаемое, рассмотрим отдельно случаи $\alpha \in (4,5]$ и $\alpha \in (5,6)$. В случае $\alpha \in (4,5]$

$$\begin{aligned} &- 2|p|^\alpha \int\limits_{|p|}^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\right) h_n\left(\frac{y}{|p|}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} \\ &\leqslant \max_{y\in[0,\infty)} \left(-\frac{\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}}{y^{1+\alpha}}\right) |p|^\alpha \int\limits_{|p|}^\infty h_n\left(\frac{y}{|p|}\right) dy \\ &\leqslant K|p|^{\alpha+1}\int\limits_1^\infty h(t)\,dt = o(|p|^\alpha). \end{aligned}$$

В случае $\alpha \in (5, 6)$ второе слагаемое представим в виде

$$
\begin{aligned}
&- 2\left|p\right|^{\alpha} \int\limits_{|p|}^{\infty} \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\right) h_n\left(\frac{y}{|p|}\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \\
&\leqslant 2\left|p\right|^{\alpha} \int\limits_{|p|}^{1} \frac{y^6}{6!} h_n\left(\frac{y}{|p|}\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \\
&+ 2\left|p\right|^{\alpha} \max_{y\in[1,\infty)} \frac{\left|\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\right|}{y^{1+\alpha}} \cdot \int\limits_{1}^{\infty} \left|h_n\left(\frac{y}{|p|}\right)\right| dy \\
&\leqslant 2\left|p\right|^{6} \int\limits_{1}^{\frac{1}{|p|}} h_n(t)\, dt + 2\left|p\right|^{\alpha+1} K_1 \int\limits_{0}^{\infty} h(t)\, dt = o\left(|p|^{\alpha}\right),
\end{aligned}
$$

так как $h(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

Заметим, что

$$
\begin{aligned}
v_n(p) &= -2 \int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}} \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\right) \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}\, dx \\
&\leqslant 2p^6 D n^{1/\alpha} \int\limits_{0}^{n^{-1/\alpha}} \frac{x^6}{6!} dx = \frac{2D}{7!\, n^{6/\alpha}} p^6 = o\left(|p|^{\alpha}\right). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$
\sigma_n^2 = \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{\infty} x^2 d\Lambda_n(x) \tag{31}
$$

и

$$
m_n = \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{\infty} x^4 d\Lambda_n(x). \tag{32}
$$

Лемма 11. *Существуют такие $\varepsilon_0, d_0 > 0$, что при $|p| < \varepsilon_0$ справедливы неравенства*

$$
0 \leqslant f_n(p) \exp\left(\frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{p^4}{24}\left(m_n - 3\sigma_n^4\right)\right)^n \leqslant e^{-d_0|p|^{\alpha}}
$$

и

$$\exp\left(\frac{p^2\sigma_n^2}{2} - \frac{p^4\left(m_n - 3\sigma_n^4\right)}{24}\right) \geqslant 1. \tag{33}$$

Доказательство. Справедливость неравенства (33) в малой окрестности нуля очевидна.

Используя (30) и неравенство $\ln x \leqslant x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$, справедливое при $x \in (0,1)$, получим

$$\begin{aligned}
&\ln\left(f_n(p)\exp\left(\frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{p^4}{24}(m_n - 3\sigma_n^4)\right)^n\right)\\
&= \ln\left(f_n(p)\right) + \frac{np^2\sigma_n^2}{2} - \frac{np^4\left(m_n - 3\sigma_n^4\right)}{24}\\
&\leqslant n\Bigg(- \frac{1}{n}V_n(p) - \frac{1}{n}v_n(p) + \frac{1}{n}w_n(p) - \frac{p^2\sigma_n^2}{2} + \frac{p^4 m_n}{4!}\\
&- \frac{p^2\sigma_n^2}{2}\frac{V_n + \nu_n - w_n}{n} + \frac{p^2\sigma_n^2}{2}\frac{p^4 m_n}{4!} - \frac{p^4\sigma_n^4}{4}\Bigg)\\
&+ \frac{np^2\sigma_n^2}{2} - \frac{np^4\left(m_n - 3\sigma_n^4\right)}{24} = -V_n(p) - v_n(p) + w_n(p)\\
&+ \frac{p^2\sigma_n^2}{2}\big(- V_n(p) - v_n(p) + w_n(p)\big) + \frac{p^4 m_n}{24}.
\end{aligned}$$

Утверждение леммы следует из лемм 9 и 10. □

Выберем, как и ранее, такую убывающую функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\chi(x) = 1$ при $x \leqslant 1$ и $\chi(x) = 0$ при $x \geqslant 2$.

Определим последовательность функций $\psi_n, n \in \mathbb{N}$, полагая

$$\psi_n(p) = \left(\exp\left\{\left(\frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{p^4}{24}\left(m_n - 3\sigma_n^4\right)\right)\chi\left(\frac{|p|}{n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{6}}}\right)\right\}\right)^n. \tag{34}$$

Последовательность функций $f_n(p)$, заданная формулой (20), не имеет предела. Для того, чтобы сделать эту последовательность сходящейся, умножим f_n на функцию ψ_n, заданную формулой (34).

Теорема 3. *Последовательность $f_n\psi_n$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$ к функции $\widehat{q}$, заданной формулой* (13).

Доказательство. Сначала покажем, что выполняется соотношение $f_n(p)\psi_n(p) \to \widehat{q}(p)$ при $n \to \infty$ для каждого $p \in \mathbb{R}$.

Заметим, что для каждого фиксированного p и достаточно больших n, таких что $|p|\, n^{1/6-1/\alpha} < 1$, имеем

$$f_n(p)\psi_n(p) = \left[1 - \frac{1}{n}V_n(p) - \frac{1}{n}v_n(p) + \frac{1}{n}w_n(p) - \frac{\sigma_n^2 p^2}{2} + \frac{m_n p^4}{24}\right]^n \times \left(\exp\left(\frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{p^4}{24}\left(m_n - 3\sigma_n^4\right)\right)\right)^n.$$

Используя леммы 9 и 10, получаем

$$\begin{aligned} f_n(p)\psi_n(p) &= \left[1 - \frac{1}{n}V_n(p) - \frac{1}{n}v_n(p) + \frac{1}{n}w_n(p) - \frac{\sigma_n^2 p^2}{2} + \frac{m_n p^4}{24}\right]^n \\ &\quad\times \left(1 + \frac{\sigma_n^2 p^2}{2} - \frac{p^4}{24}\left(m_n - 3\sigma_n^4\right) + \frac{\sigma_n^4 p^4}{8} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{n}V_n(p) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{q}(p). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что $f_n\psi_n$ сходится к $\widehat{q}$ не только поточечно, но также и в смысле $L_2(\mathbb{R})$.

Имеем

$$f_n(p)\,\psi_n(p) = A_n(p) + B_n(p), \tag{35}$$

где

$$A_n(p) = f_n(p)\,\psi_n(p)\mathbf{1}_{[0,2n^{1/\alpha-1/6})}(p)$$

и

$$B_n(p) = f_n(p)\,\psi_n(p)\mathbf{1}_{[2n^{1/\alpha-1/6},\infty)}(p).$$

Заметим, что для каждого $p \in \mathbb{R}$ $A_n(p) \to \widehat{q}(p)$ при $n \to \infty$, а в силу леммы 11 функции A_n^2 мажорируются функцией $e^{-2d_0|p|^\alpha}$. Используя теорему Лебега, мы получаем, что $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{q}$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\|B_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$. В этом нам поможет следующая лемма.

Лемма 12. *При $u \in \left[n^{-1/6}, 1\right)$ справедливо соотношение*

$$f_{\xi_n}\left(n^{1/\alpha}u\right) = 1 - d_n u^2 + O\left(|u|^\alpha\right),$$

где $B \leqslant d_n \leqslant C$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.

Вернемся к доказательству теоремы 3. По определению $\|B_n\|^2_{L_2}$ представляется в следующем виде

$$\|B_n\|^2_{L_2} = \int\limits_{2n^{1/\alpha - 1/6}}^{\infty} dp \left(\frac{2}{n} \int\limits_0^{\infty} \cos(px) \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx \right)^{2n}.$$

Как и в теореме 2, мы можем показать, что существует такая константа $K_1 > 0$, что характеристическая функция $f_{\xi_n}(p)$ случайной величины ξ_{nk} оценивается следующим образом:

$$|f_{\xi_n}(p)| \leqslant \frac{K_1 n^{1/\alpha}}{|p|}. \tag{36}$$

Преобразуем выражение для $\|B_n\|^2_{L_2}$. В силу (16) и (36), имеем

$$\|B_n\|^2_{L_2} = \int\limits_{2n^{1/\alpha-1/6}}^{n^{1/\alpha}} dp\big(f_{\xi_n}(p)\big)^{2n} + \int\limits_{n^{1/\alpha}}^{K_1 n^{1/\alpha}} dp\big(f_{\xi_n}(p)\big)^{2n}$$
$$+ \int\limits_{K_1 n^{1/\alpha}}^{\infty} dp\big(f_{\xi_n}(p)\big)^{2n} \leqslant n^{1/\alpha}\left(1 - 4d_n n^{-1/3}\right)^{2n}$$
$$+ \left(1 - \mu n^{-\gamma}\right)^{2n} n^{1/\alpha}(K_1 - 1) + \frac{K_1 n^{1/\alpha}}{(2n-1)}.$$

Заметим, что последнее выражение стремится к 0 при $n \to \infty$. □

§3. Локальные предельные теоремы для больших уклонений

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ распределение случайной величины $\xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}$, а через p_n – соответствующую плотность. Через ζ_n обозначим обратное преобразование Фурье функции $\psi_n - 1$ (функция ψ_n для $\alpha \in (2,4)$ определяется формулой (24), а для $\alpha \in (4,6)$ – формулой (34)). Как мы установили выше (теоремы 2, 3), последовательность $p_n + p_n * \zeta_n$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к функции q, определенной формулой (14).

В дальнейшей работе нам понадобится понятие слабой эквивалентности функций на бесконечности. Напомним соответствующее определение.

Пусть $f(x)$ и $h(x)$ – положительные при $x \geqslant a \geqslant 0$ функции. Мы говорим, что функции f и h слабо эквивалентны на бесконечности, если для произвольного ε существует $\delta_0 \in (0,1)$, такое что для любого $\delta \in (0,\delta_0)$ найдется такое $x_0 > 0$, что при $x \geqslant x_0$ выполнены неравенства

$$(1-\varepsilon)\, g\,(t\,(1+\delta)) \leqslant f\,(t) \leqslant (1+\varepsilon)\, g\,(t\,(1-\delta))\,.$$

Для слабой эквивалентности мы будем использовать обозначение $f\,(x) \overset{w}{\backsim} h\,(x)$ при $x \to \infty$. Отметим следующий результат:

Теорема 4 (Якымив, [5], с. 207)**.** *Пусть ζ – безгранично делимая случайная величина со спектральной мерой Леви $G\,(dx)$. Пусть $G\,(dx)$ ограничена и обладает непрерывной на $[0,\infty)$ плотностью $\widetilde{g}\,(x)$ причем, существует $\beta_0 > 0$, такое что функция $b\,(x) = x\widetilde{g}\,(x)$ не возрастает при $x \geqslant \beta_0$, выполнено неравенство*

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\widetilde{g}\,(x)}{\widetilde{g}\,(2x)} < \infty \tag{37}$$

и для произвольного $\lambda_0 > 1$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{G\big([\lambda_0 x,\infty)\big)}{G\big([x,\infty)\big)} < 1. \tag{38}$$

Тогда для плотности распределения $f\,(x) = \frac{d}{dx}\mathbf{P}\,\{\xi \leqslant x\}$ справедливо при $x \to \infty$

$$f\,(x) \overset{w}{\backsim} \widetilde{g}\,(x)\,.$$

Также нам понадобится следующее простое свойство преобразования Фурье.

Лемма 13. *Пусть $\widehat{r}$ – преобразование Фурье функции r. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ $\widehat{r}^{(k)} \in L_1\,(\mathbb{R})$. Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$|r\,(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|^k}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\widehat{r}^{(k)}\,(p)\right|dp. \tag{39}$$

Доказательство можно найти в [6].

Лемма 14. *Пусть $g\,(x) \in C^1\,(\mathbb{R})\,, 0 < B \leqslant g(x) \leqslant C, \alpha \in (2,4) \cup (4,6)$. Пусть существует $\beta_0 > 0$, такое что функция $b\,(x) = \frac{g(x)}{x^\alpha}$ не возрастает при $x \geqslant \beta_0$. Тогда при $x \to \infty$*

$$q\,(x) \overset{w}{\backsim} \frac{g\,(x)}{x^{1+\alpha}}.$$

Доказательство. Представим плотность меры Леви в виде

$$\frac{g(x)}{x^{1+\alpha}} = \lambda_1(x) + \lambda_2(x),$$

где $\lambda_1(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}, & |x| \geqslant 1 \end{cases},$$

а функция $\lambda_2(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию

$$\lambda_2(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}, & |x| \leqslant \frac{1}{2} \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}.$$

Рассмотрим случай $\alpha \in (2,4)$. Представим теперь функцию $\widehat{q}(p)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\widehat{q}(p) &= \exp\left(2\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} (\cos(px) - 1)\,\lambda_1(x)\,dx\right) \\ &\times \exp\left(2\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \left(\frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\right)\lambda_1(x)\,dx\right) \\ &\times \exp\left(2\int_0^1 \left(\cos(px) - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!}\right)\lambda_2(x)\,dx\right) \\ &= \widehat{q}_1(p)\cdot\widehat{q}_2(p)\cdot\widehat{q}_3(p).\end{aligned}$$

Функция $\widehat{q}_1(p)$ является характеристической функцией некоторой безгранично делимой случайной величины η. Условия (37) и (38) равносильны условиям

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{g(x)}{g(2x)} < \infty \tag{40}$$

и

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\int_{\lambda_0 x}^{\infty}\frac{g(t)}{t^{1+\alpha}}dt}{\int_x^{\infty}\frac{g(t)}{t^{1+\alpha}}dt} < 1 \tag{41}$$

соответственно. Условие (40) выполнено, так как $\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{g(2x)} \leqslant \frac{C}{B} < \infty$. Условие (41) выполнено в силу справедливости неравенства

$$0 < \frac{\int\limits_{\lambda_0 x}^{\infty} \frac{g(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt}{\int\limits_{x}^{\infty} \frac{g(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt} = 1 - \frac{\int\limits_{x}^{\lambda_0 x} \frac{g(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt}{\int\limits_{x}^{\infty} \frac{g(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt} \leqslant 1 - \frac{B}{C}\left(1 - \frac{1}{(\lambda_0)^{\alpha}}\right) < 1$$

при $\lambda_0 > 1$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 4 и, тем самым, мы видим, что $q_1(x) \overset{w}{\backsim} \lambda_1(x)$ при $x \to \infty$, то есть

$$q_1(x) \overset{w}{\backsim} \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}.$$

Обозначим $q_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{q}_2(p)\,e^{ipx}dp$ и $q_3(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{q}_3(p)\,e^{ipx}dp$. На основании леммы 13 для $q_2(x)$ и $q_3(x)$ мы видим, что при $x \to \infty$ функции $q_2(x)$ и $q_3(x)$ стремятся к нулю быстрее любой степени x. В силу рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 4 ([5], с. 207), мы можем заключить, что

$$q(x) \overset{w}{\backsim} \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}.$$

Случай $\alpha \in (4,6)$ доказывается аналогично. □

Теперь мы покажем, что для достаточно больших $x = x(n)$ асимптотическое поведение p_n совпадаем с асимптотическим поведением q. При этом дополнительно предположим, что функция $g(x) \in C^{[\alpha]+2}(\mathbb{R})$, причем справедливы оценки $\left|g^{(i)}(x)\right| \leqslant \frac{K_i}{|x|^i}$, $i = 1, 2, \ldots, [\alpha]+2$ при $x \to \infty$. Предположим также, что для $\alpha \in (2,4)$ характеристическая функция f_{ξ_n} случайной величины ξ_{nk} допускает представление

$$f_{\xi_n}(p) = 1 - \frac{2}{n}\int\limits_0^{\infty} \frac{p^2x^2}{2!}\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}dx + \frac{1}{n}c_0(|p|)\,|p|^{\alpha} - \frac{1}{n}T_n(p)\,p^{[\alpha]+1}, \quad (42)$$

где

$$c_0\left(|p|\right) = 2\int\limits_0^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!}\right) \frac{g\bigl(y/|p|\bigr)}{y^{1+\alpha}}\, dy,$$

$$\sup_{|p|\leqslant n^{1/\alpha - 1/\beta}} \left|T_n\left(p\right)\right| = \frac{\widetilde{K}}{n^\theta}, \theta > 1 - \frac{\alpha}{4},$$

а функция T_n $[\alpha]+2$ раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности 0 и

$$\sup_{|p|\leqslant n^{1/\alpha - 1/\beta}} \left|T_n^{(i)}\left(p\right)\right| = \frac{\widetilde{K}^{(i)}}{n^\theta}, \theta > 1 - \frac{\alpha}{4}$$

при $i = 1, 2, \ldots, [\alpha]+2$.

Для случая $\alpha \in (4, 6)$, по аналогии с (42), предположим, что характеристическая функция f_{ξ_n} случайной величины ξ_{nk} допускает представление

$$\begin{aligned} f_{\xi_n}\left(p\right) = 1 - \frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \frac{p^2x^2}{2!}\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}\, dx + \frac{2}{n}\int\limits_0^\infty \frac{p^4x^4}{4!}\frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}}\, dx \\ - \frac{1}{n}c_2\left(|p|\right)|p|^\alpha + \frac{1}{n}T_n\left(p\right)p^{[\alpha]+1}, \end{aligned} \tag{43}$$

где

$$c_2\left(|p|\right) = -2\int\limits_0^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!}\right) \frac{g\left(\frac{y}{|p|}\right)}{y^{1+\alpha}}\, dy,$$

$$\sup_{|p|\leqslant n^{1/\alpha - 1/6}} \left|T_n\left(p\right)\right| = \frac{\widetilde{K}}{n^\theta},\ \theta > 1 - \frac{\alpha}{6},$$

а функция T_n $[\alpha]+2$ раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности 0 и

$$\sup_{|p|\leqslant n^{1/\alpha - 1/6}} \left|T_n^{(i)}\left(p\right)\right| = \frac{\widetilde{K}^{(i)}}{n^\theta}, \theta > 1 - \frac{\alpha}{6}$$

при $i = 1, 2, \ldots, [\alpha]+2$.

Через $\widehat{h}_n$ обозначим функцию $\widehat{h}_n\left(p\right) = f_n\left(p\right)\psi_n\left(p\right) - \widehat{q}\left(p\right)$. Заметим, что из теорем 2, 3 следует, что $\left\|\widehat{h}_n\right\|_{L_2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Теорема 5. *Для* $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$ *имеем*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \widehat{h}_n^{([\alpha]+2)}(p) \right| dp \leqslant \frac{C}{n^{\varrho}},$$

где $\varrho = \min\left(\theta + \frac{\alpha}{4} - 1, 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ *при* $\alpha \in (2,4)$ *и* $\varrho = \min\left(\theta + \frac{\alpha}{6} - 1, 1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ *при* $\alpha \in (4,6)$.

Доказательство. При $\alpha \in [3,4)$ имеем $\beta = 4$ и $[\alpha] + 2 = 5$. Оценим $\int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} \left| \widehat{h}_n^{(5)}(p) \right| dp$. При $|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}$ из формулы (42) следует, что

$$\ln f_{\xi_n}(p) = -\frac{2}{n} \int\limits_0^{\infty} \frac{p^2 x^2}{2!} \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx + \frac{1}{n} c_0(|p|)\, |p|^{\alpha} - \frac{1}{n} R_n(p)\, p^4,$$

где функция R_n 5 раз непрерывно дифференцируема в окрестности нуля. Тогда для $|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}$ справедливо

$$\begin{aligned} \widehat{h}_n(p) = \exp\Bigg(n\Big(\ln f_{\xi_n}(p) + \frac{2}{n} \int\limits_0^{\infty} \frac{p^2 x^2}{2!} \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx - \frac{\gamma p^4}{n} \Big) \Bigg) \\ - \exp\left(c_0(|p|)\, |p|^{\alpha} - \gamma p^4 \right) = \exp\left(c_0(|p|)\, |p|^{\alpha} - \gamma p^4 \right) \\ \times \left(\exp\left(-R_n(p)\, p^4 \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} \left| \widehat{h}_n^{(5)}(p) \right| dp \leqslant \frac{C}{n^{\theta + \alpha/4 - 1}}.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, получаем

$$\begin{aligned} \int\limits_{|p| > n^{1/\alpha - 1/4}} \left| \widehat{h}_n^{(5)}(p) \right| dp \leqslant \int\limits_{|p| > n^{1/\alpha - 1/4}} \left| \left(\exp\left(c_0(|p|)\, |p|^{\alpha} - \gamma p^4 \right) \right)^{(5)} \right| dp \\ + \int\limits_{|p| > n^{1/\alpha - 1/4}} \left| \left(f_n(p)\, \psi_n(p) \right)^{(5)} \right| dp \leqslant \frac{C}{n^{1 - 1/\alpha}}. \end{aligned}$$

В случае $\alpha \in (2,3) \cup (4,6)$ теорема доказывается аналогично. $\square$

Из теоремы 5 и леммы 13 следует, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ при $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$ верно

$$|p_n(x) + p_n(x) * \zeta_n(x) - q(x)| \leqslant \frac{C}{n^{\varrho} |x|^{[\alpha]+2}}. \tag{44}$$

Из (44) и леммы 14 получаем

$$p_n(x) + p_n(x) * \zeta_n(x) \overset{w}{\backsim} q(x)$$

при $x \to \infty$.

Далее мы сравним асимптотическое поведение $p_n + p_n * \zeta_n$ и p_n. Положим $d_n(p) = f_n(p)\psi_n(p) - f_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)\left(1 - \psi_n^{-1}(p)\right)$.

Теорема 6. *Для всех $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left| d_n^{([\alpha]+2)}(p) \right| dp \leqslant C \rho_n^{[\alpha]+1-\alpha},$$

где $\rho_n = n^{1/2 - 1/\alpha} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Предположим $\alpha \in [3,4)$. Для начала покажем, что

$$\int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} \left| d_n^{(5)}(p) \right| dp \leqslant C \rho_n^{4-\alpha}.$$

При $|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}$ из формулы (42) следует, что

$$\begin{aligned} d_n(p) = {} & \exp(c_0(|p|)|p|^{\alpha} - \gamma p^4 - p^4 R_n(p)) \\ & \times \left(1 - \exp\left(-2\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 p^2}{2!} \frac{g_n(x)}{x^{1+\alpha}} dx + \gamma p^4\right)\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} \left| d_n^{(5)}(p) \right| dp = {} & \int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/2}} \left| d_n^{(5)}(p) \right| dp \\ & + \int\limits_{n^{1/\alpha - 1/2} \leqslant |p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} \left| d_n^{(5)}(p) \right| dp \leqslant C_1 n^{1 - 2/\alpha} \int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/2}} p^{\alpha - 3} dp \\ & + C_2 n^{1 - 2/\alpha} \int\limits_{n^{1/\alpha - 1/2} \leqslant |p| \leqslant n^{1/\alpha - 1/4}} p^{\alpha - 5} e^{c_0(|p|)(p)^{\alpha} - \gamma p^4} dp \leqslant C \rho_n^{4-\alpha}. \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что для каждого $p \in \mathbb{R}$ и достаточно больших n справедливо (26), имеем при $n > n_0$

$$\int\limits_{n^{1/\alpha - 1/4} \leqslant |p| \leqslant 2n^{1/\alpha - 1/4}} \left| d_n^{(5)}(p) \right| dp \leqslant \frac{C}{n^{1-1/\alpha}}.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что $d_n(p) = 0$ при $|p| > 2n^{1/\alpha - 1/4}$.

Аналогично теорема доказывается для $\alpha \in (2,3) \cup (4,6)$. □

В заключение отметим, что для любого $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$ из теорем 5, 6 следует, что при $x \to \infty$

$$p_n(x) = q(x) + O\Big(\frac{1}{|x|^{[\alpha]+2}}\Big) + r_n(x),$$

где

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\left(n^{1/2 - 1/\alpha}\right)^{[\alpha]+1-\alpha}}{|x|^{[\alpha]+2}}.$$

Ясно, что слабая эквивалентность функций $p_n(x)$ и $q(x)$ при $x \to \infty$ будет иметь место в том случае, когда

$$\frac{\left(n^{1/2 - 1/\alpha}\right)^{[\alpha]+1-\alpha}}{|x|^{[\alpha]+2}} = o\Big(\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}\Big),$$

что эквивалентно

$$\frac{\sqrt{n}}{|x|\, n^{1/\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Литература

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* Гостехиздат, Москва, 1949.
2. N. V. Smorodina, M. M. Faddeev, *The Lévy-Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications.* — Acta Appl. Math. **110** (2010), 1289–1308.
3. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностная аппроксимация решений задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **396** (2011), 111–143.
4. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельные теоремы о сходимости функционалов от комплексных случайных блужданий к решениям начально-краевых задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **420** (2013), 88–102.
5. А. Л. Якымив, *Вероятностные приложения тауберовых теорем.* Физматлит, Москва, 2005.

6. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа.* Наука, Москва, 1976.

Platonova M. V. Nonprobabilistic infinitely divisible distributions: the Lévy-Khinchin representation, limit theorems.

We study properties of generalized infinitely divisible distributions with the Lévy measure $\Lambda(dx) = \frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}\,dx$, $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$. Such measures are signed ones and hence they are not probability measures. We show that in some sence these signed measures are limit measures for sums of independent random variables.

С.-Петербургский
государственный университет
физический факультет
ул. Ульяновская 3,
Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mariyaplat@rambler.ru

Поступило 20 октября 2014 г.