Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

В. В. Петров

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПОЧТИ НАВЕРНОЕ

1. Теоремы о сходимости рядов случайных величин почти наверное (п.н.) образуют важный раздел теории вероятностей. Фундаментальным результатом в этой области является теорема Колмогорова о трёх рядах, содержащая условия, необходимые и достаточные для сходимости п.н. ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, где $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин. Одними из многочисленных следствий из теоремы Колмогорова являются теоремы ван Кампена [1] (см. также [5], теоремы 6.2 и 6.3) об условиях абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ при сохранении предположения о независимости. Согласно [1], необходимыми и достаточными условиями абсолютной сходимости этого ряда являются условия сходимости двух рядов $\sum \mathbf{P}(|X_n| \geqslant c)$ и $\sum \mathbf{E}\,|X_n^c|$ для некоторого $c > 0$ (для любого $c > 0$), где $X^c = X$, если $|X| < c$, и $X^c = 0$, если $|X| \geqslant c$, для любой случайной величины X. Отсюда следует, что если $\{X_n\}$ есть последовательность независимых случайных величин и $\sum \mathbf{E}\,|X_n|^p < \infty$ для некоторого положительного $p \leqslant 1$, то $\sum |X_n| < \infty$ п.н. [1].

2. Нас будут интересовать условия, достаточные для сходимости ряда $\sum |X_n|$ п.н. при отсутствии предположения о независимости. Пусть D – множество чётных неотрицательных функций $g(u)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(A) $g(u) \to \infty$ при $u \to \infty$,

(B) $g(u+v) \leqslant g(u) + g(v)$ для любых положительных u,v.

Очевидно, $|u|^p \in D$ при любом положительном $p \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть $\{X_n\}$ – последовательность случайных величин, и пусть ряд $\sum \mathbf{E}\, g(X_n)$ сходится для некоторой функции $g \in D$. Тогда ряд $\sum\ |X_n|$ сходится п.н.*

Ключевые слова: ряды случайных величин, абсолютная сходимость почти наверное, усиленный закон больших чисел.

Работа частично поддержана грантом НШ 1216.2012.1.

Эта теорема обобщает сформулированный выше результат ван Кампена. Она допускает обобщение в аналитических терминах.

Пусть X – некоторое непустое множество элементов, F – выделенная на нём σ-алгебра множеств и μ – заданная на F неотрицательная σ-аддитивная функция. Пусть $\{f_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ – заданная на пространстве X последовательность действительных измеримых функций.

Теорема 2. *Пусть*

$$\sum \int\limits_X g(f_n)d\mu < \infty \tag{1}$$

для некоторой функции $g \in D$. *Тогда ряд* $\sum |f_n|$ *сходится почти всюду.*

Доказательство. Положим

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|, \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_X g(f_k)d\mu. \tag{2}$$

Последовательность $\{U_n(x)\}$ не убывает для любой точки $x \in X$. Поэтому существует (конечный или бесконечный) предел $U_n(x)$ при $n \to \infty$. Предположим, что этот предел бесконечен на множестве точек x положительной меры. Тогда

$$\int\limits_X g(U_n)d\mu \to \infty \qquad (n \to \infty), \tag{3}$$

так как $g(u) \to \infty$ при $u \to \infty$ в силу условия $g \in D$. Имеем

$$\int\limits_X g(U_n)d\mu \leqslant V_n$$

для любого n вследствие (2) и условия $g \in D$. Из (1) следует, что

$$\limsup \int\limits_X g(U_n)d\mu < \infty,$$

вопреки соотношению (3). Теорема доказана. □

Из теоремы 2 следует теорема 1, а также лемма 1 из [4], в которой условие $g \in D$ заменено более ограничительным условием $g \in G$. Множество G, по определению, есть множество чётных непрерывных функций $g(u)$, положительных и строго возрастающих в области $u > 0$

и удовлетворяющих условиям (A), (B) и условию (C) $g(u)g(v) \leqslant Cg(uv)$ для любых положительных u, v, где C – некоторая постоянная. Очевидно, что $|u|^p \in G$ при любом положительном $p \leqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть* $\{X_n\}$ *– последовательность случайных величин,* $\{b_n\}$ *– последовательность положительных чисел, и пусть*

$$\sum \frac{\mathbf{E}\, g(X_n)}{g(b_n)} < \infty \tag{4}$$

для некоторой функции $g \in G$. *Тогда* $\sum \frac{|X_n|}{b_n} < \infty$ *п.н.*

Доказательство. В силу условия $g \in G$ имеем $g(\frac{a}{b}) \leqslant \frac{Cg(a)}{g(b)}$ при любых $a \geqslant 0$, $b > 0$. Поэтому из (4) следует, что сходится ряд $\sum \mathbf{E}\, g(\frac{X_n}{b_n})$. Условие $g \in G$ влечет за собой условие $g \in D$, поэтому ссылка на теорему 1 завершает доказательство. □

3. Теоремы о сходимости рядов случайных величин являются источником различных форм усиленного закона больших чисел. Рассматривая последовательность случайных величин $\{X_n\}$, обычно интересуются усиленным законом больших чисел в форме $\frac{1}{b_n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \to 0$ п.н., где $\{b_n\}$ – последовательность положительных чисел, $b_n \to \infty$, хотя анализ доказательства полученных результатов иногда позволяет получить более сильный результат в форме $\frac{1}{b_n}\sum\limits_{k=1}^{n} |X_k| \to 0$ п.н. без введения дополнительных условий. В частности, это относится к теоремам из [3].

Нам понадобятся определения классов функций Ψ_c и Ψ_d, введенных в [2]. Множество функций $\psi(x)$, таких что каждая $\psi(x)$ положителна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\sum \frac{1}{n\psi(n)}$ сходится (расходится), обозначим Ψ_c (соответственно, Ψ_d). В этих определениях значение x_0 не предполагается одним и тем же для различных функций рассматриваемого класса. Мы имеем, например, $x^p \in \Psi_c$ и $(\log x)^{1+p} \in \Psi_c$ при любом $p > 0$, $\log x \in \Psi_d$.

Теорема 4. *Пусть* $\{X_n\}$ *– последовательность случайных величин, и пусть* $\mathbf{E}\, g(X_n) < \infty$ *для всех* n *и некоторой функции* $g \in G$. *Положим*

$M_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{E}\, g(X_k)$, *и пусть* $M_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} |X_k| = o(g^{-1}(M_n \psi(M_n))) \text{ п.н.} \tag{5}$$

для любой функции $\psi \in \Psi_c$.

Заметим, что условие $g \in G$ обеспечивает существование положительной обратной функции $g^{-1}(x)$ в области $x > 0$. Доказательство теоремы 4 использует следующую лемму из [2, 5].

Лемма. *Пусть* $\{b_n\}$ – *последовательность неотрицательных чисел,* $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $B_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. *Тогда ряд* $\sum \frac{b_n}{B_n \psi(B_n)}$ *сходится для любой функции* $\psi \in \Psi_c$.

Пусть $\psi \in \Psi_c$. В силу леммы имеем

$$\sum \frac{\mathbf{E}\, g(X_n)}{M_n \psi(M_n)} < \infty.$$

Положим $b_n = g^{-1}(M_n \psi(M_n))$. Тогда $g(b_n) = M_n \psi(M_n)$. Поэтому выполнено условие (4) теоремы 3, и ряд $\sum \frac{|X_n|}{b_n}$ сходится п.н. Поскольку $b_n \uparrow \infty$ в силу условия $g \in G$, отсюда следует, по лемме Кронекера, соотношение (5).

Оценка (5) оптимальна в некотором смысле. Из [2] следует, что в ней нельзя заменить функцию $\psi \in \Psi_c$ никакой функцией $\psi \in \Psi_d$, не вводя дополнительных условий.

Теорема 4 представляет собой обобщение теоремы 1 из [3], соответствующей случаю $g(x) = |x|^p$, $p \leqslant 1$. В этом случае $M_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{E}\, |X_k|^p$, и (5) принимает вид $T_n = o((M_n \psi(M_n))^{\frac{1}{p}})$ п.н., где $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |X_k|$. В частности, при $p = 1$ и любом $\varepsilon > 0$ имеют место следующие оценки порядка роста суммы T_n, каждая из которых является более сильной, чем предыдущие: $T_n = o({M_n}^{1+\varepsilon})$ п.н., $T_n = o(M_n (\log M_n)^{1+\varepsilon})$ п.н., $T_n = o(M_n \log M_n (\log\log M_n)^{1+\varepsilon})$ п.н., и т.д. В этих оценках нельзя заменить ε нулём, не вводя дополнительных условий.

Для последовательности независимых случайных величин $\{X_n\}$ в [2] (см. также [5]) получены оценки роста сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ п.н.при различных моментных условиях. В [4] содержатся оптимальные в некотором смысле результаты о росте сумм U_n абсолютных величин измеримых функций, определенных равенствами (2), в терминах сумм g-моментов V_n.

Литература

1. E. R. van Kampen, *Infinite product measures and infinite convolutions.* — Amer. J. Math. **62** (1940), 417–448.
2. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел.* — Теория вероятн. и её примен. **14** (1969), 193–202.
3. В. В. Петров, *О порядке роста сумм зависимых случайных величин.* — Теория вероятн. и её примен. **18** (1973), 358–360.
4. В. В. Петров, *О росте сумм измеримых функций.* — Литовский матем. сб. **16** (1976), 189–192.
5. V. V. Petrov, *Limit Theorems of Probability Theory.* Oxford University Press, New York, (1995).

Petrov V. V. On absolute convergence of series of random variables almost surely.

The paper deals with the conditions of absolute convergence of series of random variables almost surely. The results contain no independence assumptions. A generalization is obtained in analytical terms.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28
Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: petrov2v@mail.ru

Поступило 13 октября 2014 г.