Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

Е. С. Косаревская

О СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЗАВИСИМЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРОЦЕССОВ

Введение

Математическую модель системы обслуживания, рассматриваемую в этой работе, можно упрощенно описать следующим образом. Работа системы состоит из независимых между собой процессов. Обслуживание процесса начинается в некоторый момент s, длится u единиц времени и влечет расход ресурса r. Время начала, длительность и расход ресурса — случайные величины.

Объектом изучения является суммарная нагрузка на систему, которая выражается в терминах интеграла по пуассоновской мере. Такой подход позволяет понять предельное поведение модели на больших интервалах времени и приводит к удачному представлению предельных процессов. Многообразие предельных результатов объясняется тем, что возможны разные соотношения между интенсивностью потока процессов и длительностью их обслуживания, а также различные моментные предположения о характеристиках процесса.

Предельное поведение модели исследовалось в работе И. Кая и М. Такку [1] и уточнялось в работе К. А. Аксеновой [3], дипломных работах Д. В. Астаховой [5] и Е. С. Гарай [4]. Во всех этих работах рассматриваются системы обслуживания, для которых длительность обслуживания и расход ресурса независимы не только для разных процессов обслуживания, но и внутри одного процесса.

Особенность данной работы состоит в том, что длительность и расход ресурса внутри одного процесса обслуживания могут быть зависимы; предельное поведение в этом случае зависит от их совместного распределения. Заметим, что допущение о зависимости длительности и расхода ресурса вполне естественно.

Ключевые слова: системы обслуживания, предельные теоремы, винеровский процесс, дробное броуновское движение, устойчивый процесс.

Работа была поддержана грантом РФФИ 13-01-00172 и грантом НШ-2504.2014.1.

Основные результаты работы — доказательство теорем о сходимости процесса суммарной нагрузки к винеровскому процессу, к процессу дробного броуновского движения и к устойчивому процессу, а также разбор примера, проясняющего происходящее в случае зависимых характеристик.

§1. Описание модели системы обслуживания

Положим $\mathcal{R} = (s,u,r) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Каждая точка (s,u,r) имеет смысл процесса обслуживания, который начинается в момент s, длится u единиц времени и расходует r единиц ресурса, *причем мы не накладываем ограничений на зависимость длительности и расхода.* Одновременно могут выполняться несколько процессов обслуживания (без ограничения на суммарный расход ресурса, т.е. нагрузку на систему).

Исходными параметрами для описания работы системы являются:

- $\lambda > 0$ – интенсивность потока процессов обслуживания;
- $P_{UR}(u,r)$ – совместное распределение длительности обслуживания и расхода ресурса.

Определим на $\mathcal{R}$ меру интенсивности

$$\mu(ds, du, dr) = \lambda \, ds \, dP_{UR}(u,r).$$

Пусть N – соответствующая ей случайная мера Пуассона (подробнее о случайных пуассоновских мерах и интегралах по ним см., например, [2]). Реализации N (случайные множества троек) можно рассматривать как возможные траектории работы системы, а все характеристики этой работы выражаются в виде соответствующих интегралов.

В частности, нас будет интересовать мгновенная нагрузка на систему в момент τ:

$$W(\tau) = \int_{\mathcal{R}} r \mathbb{1}_{\{s \leqslant \tau \leqslant s+u\}} \, dN$$

и суммарная нагрузка

$$W^*(t) = \int_0^t W(\tau)\, d\tau = \int_{\mathcal{R}} r \int_0^t \mathbb{1}_{\{s \leqslant \tau \leqslant s+u\}} \, d\tau \, dN \tag{1.1}$$

$$= \int_{\mathcal{R}} r \cdot |[s, s+u] \cap [0,t]| \, dN =: \int_{\mathcal{R}} r \ell_t(s,u) \, dN. \tag{1.2}$$

Появившееся здесь ядро

$$\ell_t(s,u) = |[s, s+u] \cap [0,t]|$$

неоднократно потребуется в дальнейшем.

Определение мгновенной (а, значит, и суммарной) нагрузки корректно, если выполнено

$$\lambda \int\limits_{\mathcal{R}} \min(1, |r\mathbb{1}_{\{s\leqslant\tau\leqslant s+u\}}|)\, ds\, dP_{UR}(u,r) = \lambda \mathbf{E}\,[U\min(1,R)] < \infty. \quad (1.3)$$

Заметим, что аналогичные интегралы по центрированной мере $\widetilde{N}$ будут конечны, если

$$\begin{aligned}\lambda \int\limits_{\mathcal{R}} \min(|r\mathbb{1}_{\{s\leqslant\tau\leqslant s+u\}}|^2, |r\mathbb{1}_{\{s\leqslant\tau\leqslant s+u\}}|)\, ds\, dP_{UR}(u,r)& \\ = \lambda\, \mathbf{E}\left[U\min(R^2,R)\right] < \infty.&\end{aligned} \quad (1.4)$$

§2. Моментные предположения о режиме обслуживания

Будем предполагать, что математическое ожидание величины UR конечно:

$$\mathbf{E}\,(UR) = \iint ur\, dP_{UR}(u,r) < \infty.$$

Заметим, что в таком случае условия (1.3) и (1.4) выполнены, поскольку

$$\mathbf{E}\,(U\min(1,R)) \leqslant \mathbf{E}\,(UR) < \infty; \qquad \mathbf{E}\left(U\min(R^2,R)\right) \leqslant \mathbf{E}\,(UR) < \infty.$$

В дальнейшем чаще всего будем предполагать что либо величина UR имеет конечный второй момент, либо ее распределение имеет регулярный хвост. То есть либо

$$\mathbf{E}\left(U^2R^2\right) = \iint u^2r^2\, dP_{UR}(u,r) < \infty,$$

либо

$$\mathbf{P}(UR > x) \sim \frac{C}{\alpha x^\alpha}, \quad x\to\infty,\ 1<\alpha<2.$$

Свойства интегралов по пуассоновской мере позволяют легко посчитать среднее значение мгновенной нагрузки:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}W(t) =& \mathbf{E}\int\limits_{\mathcal{R}} r\mathbb{1}_{\{s\leqslant t\leqslant s+u\}}\,dN \\ &= \lambda\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty r\int\limits_{-\infty}^\infty \mathbb{1}_{\{s\leqslant t\leqslant s+u\}}\,ds\,dP_{UR}(u,r) = \lambda\mathbf{E}\,(UR)\,.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Следовательно, для суммарной нагрузки имеем $\mathbf{E}W^*(t) = \lambda\mathbf{E}\,(UR)\,t$.

Рассмотрим теперь дисперсию суммарной нагрузки. Поскольку при фиксированном u

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell_t^2(s,u)\,ds = \begin{cases} tu^2 - \frac{u^3}{3} & \text{если } 0\leqslant u\leqslant t \\ t^2u - \frac{t^3}{3} & \text{если } t\leqslant u<\infty \end{cases},$$

то

$$\begin{aligned}\mathbf{D}W^*(t) = \lambda\iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2(tu^2 - \frac{u^3}{3})\,dP_{UR}(u,r)& \\ + \lambda\iint\limits_{\{u>t\}} r^2(t^2u - \frac{t^3}{3})\,dP_{UR}(u,r)&.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Дисперсия конечна, если конечна величина $\mathbf{E}\left(UR^2\right)$. В следующих двух разделах будем предполагать, что это условие выполнено. Проанализируем, как ведет себя дисперсия (2.2) при $t\to\infty$. Здесь возникают два принципиально разных случая.

Утверждение 2.1. *Пусть* $\mathbf{E}\left(U^2R^2\right)<\infty$. *Тогда при* $t\to\infty$ *верно*

$$\mathbf{D}W^*(t) \sim \lambda\mathbf{E}\left(U^2R^2\right)t.$$

Доказательство. Из четырех слагаемых, присутствующих в (2.2), для асимптотического поведения важно только первое:

$$\iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2tu^2dP_{UR}(u,r) \sim \mathbf{E}\left(U^2R^2\right)t.$$

Остальные же слагаемые пренебрежимо малы. Действительно,

$$\iint\limits_{\{u>t\}} r^2t^2udP_{UR}(u,r) \leqslant t\iint\limits_{\{u>t\}} r^2u^2dP_{UR}(u,r) = t\cdot o(1),$$

$$\iint\limits_{\{u>t\}} r^2\frac{t^3}{3}\,dP_{UR}(u,r) \leqslant \frac{t}{3}\iint\limits_{\{u>t\}} r^2u^2 dP_{UR}(u,r) = t\cdot o(1),$$

и для любого $\varepsilon \in (0,1)$ верно, что

$$\iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2\frac{u^3}{3}\,dP_{UR}(u,r) = \iint\limits_{\{u\leqslant \varepsilon t\}} r^2\frac{u^3}{3}\,dP_{UR}(u,r) + \iint\limits_{\{\varepsilon t<u\leqslant t\}} r^2\frac{u^3}{3}\,dP_{UR}(u,r)$$

$$\leqslant \varepsilon\frac{t}{3}\mathbf{E}\left(U^2R^2\right) + \frac{t}{3}\iint\limits_{\{\varepsilon t<u\}} r^2u^2 dP_{UR}(u,r) = \varepsilon\frac{t}{3}\mathbf{E}\left(U^2R^2\right) + t\cdot o(1).$$

□

Утверждение 2.2. *Пусть* $\mathbf{E}\left(UR^2\right) < \infty$. *Пусть величина*

$$G(t) := \iint\limits_{\{u>t\}} r^2u\,dP_{UR}(u,r)$$

на бесконечности ведет себя следующим образом:

$$G(t) \sim \frac{c}{t^{\gamma-1}}, \quad t\to\infty, \tag{2.3}$$

где $\gamma \in (1,2)$. *В таком случае при* $t\to\infty$

$$\mathbf{D}W^*(t) \sim \frac{2c}{(2-\gamma)(3-\gamma)\gamma}\cdot\lambda t^{3-\gamma}.$$

Доказательство. Перепишем выражение для дисперсии (2.2) в более удобном для дальнейшего доказательства виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}W^*(t) =&\lambda t\iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2u^2\,dP_{UR}(u,r) - \frac{\lambda}{3}\iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2u^3\,dP_{UR}(u,r)\\ &+\lambda t^2\iint\limits_{\{u>t\}} r^2u\,dP_{UR}(u,r) - \frac{\lambda t^3}{3}\iint\limits_{\{u>t\}} r^2\,dP_{UR}(u,r).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Выразим каждое слагаемое через функцию $G(\cdot)$. Прежде всего, третье слагаемое равно

$$\lambda t^2\iint\limits_{\{u>t\}} r^2u\,dP_{UR}(u,r) = \lambda t^2 G(t).$$

Далее,

$$\lambda t \iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2u^2\,dP_{UR}(u,r) = \lambda t\left(-tG(t)+\int\limits_0^t G(x)\,dx\right),$$

поскольку

$$\begin{aligned}
&-tG(t)+\int\limits_0^t G(x)\,dx\\
&=-\,t\iint\limits_{\{u>t\}} r^2u\mathbb{1}_{\{u>t\}}\,dP_{UR}(u,r)+\int\limits_0^t\iint\limits_{\{u>x\}} r^2u\,dP_{UR}(u,r)\,dx\\
&=-\,t\iint\limits_{\{u>t\}} r^2u\,dP_{UR}(u,r)+\iint r^2u\int \mathbb{1}_{\{u>x;\;0<x<t\}}\,dx\,dP_{UR}(u,r)\\
&=-\,t\iint\limits_{\{u>t\}} r^2u\,dP_{UR}(u,r)+\iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2u^2\,dP_{UR}(u,r)+t\iint\limits_{\{u>t\}} r^2u\,dP_{UR}(u,r)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=\iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2u^2\,dP_{UR}(u,r).
\end{aligned}\tag{2.5}$$

Аналогично проверяется, что

$$\frac{\lambda}{3}\iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2u^3\,dP_{UR}(u,r)=\frac{\lambda}{3}\left(-t^2G(t)+2\int\limits_0^t x\,G(x)\,dx\right)$$

и

$$\frac{\lambda t^3}{3}\iint\limits_{\{u>t\}} r^2\,dP_{UR}(u,r)=\frac{\lambda t^3}{3}\left(t^{-1}G(t)-\int\limits_t^\infty x^{-2}\,G(x)\,dx\right).$$

Так как $G(t)\sim \dfrac{c}{t^{\gamma-1}}$ при $t\to\infty$, то из предыдущих равенств получаем

$$\lambda t \iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2u^2\, dP_{UR}(u,r) \sim \lambda t\left(-\,t\cdot\frac{c}{t^{\gamma-1}} + \int\limits_0^t \frac{c}{x^{\gamma-1}}\,dx\right)$$
$$= c\cdot\frac{\gamma-1}{2-\gamma}\cdot\lambda t^{3-\gamma}; \tag{2.6}$$
$$\iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2u^3\, dP_{UR}(u,r) \sim c\cdot\frac{\gamma-1}{3-\gamma}\cdot\frac{\lambda t^{3-\gamma}}{3};$$
$$\iint\limits_{\{u>t\}} r^2u\, dP_{UR}(u,r) \sim c\cdot\lambda t^{3-\gamma};$$
$$\iint\limits_{\{u>t\}} r^2\, dP_{UR}(u,r) \sim c\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\frac{\lambda t^{3-\gamma}}{3}.$$

Подставляя в (2.4), находим

$$\mathbf{D}W^*(t) \sim \frac{2c}{(2-\gamma)(3-\gamma)\gamma}\cdot\lambda t^{3-\gamma}.$$

□

§3. Центрированный и нормированный процесс нагрузки

Нас будет интересовать поведение процесса суммарной нагрузки на больших интервалах времени. Для того, чтобы получить осмысленный предел, нужно, во-первых, центрировать процесс, во-вторых, разделить его на подходящий нормирующий множитель, и, в-третьих, сжать время так, чтобы уместить его на стандартный временной интервал $[0,1]$. Фактически нагрузка исследуется на длинном интервале времени $[0,a]$, где $a\to\infty$. Совместить стандартный интервал и большое время можно, записав процесс нагрузки в виде $W^*(at), t\in[0,1]$.

Центрирование и нормирование на подходящий множитель b приводят к процессу

$$Z_a(t) = \frac{W^*(at)-\lambda\mathbf{E}\,(UR)\,at}{b} = \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{b}\,d\widetilde{N},\quad t\in[0,1].$$

При этом a и λ могут рассматриваться как переменные (хотя бы одна из них должна стремиться к бесконечности), а нормировка b подбирается в зависимости от них, а также от совместного распределения U и R.

Заметим, что $Z_a(t)$ – процесс со стационарными приращениями.

§4. Несколько видов режимов обслуживания

Режим работы системы обслуживания определяется не только непосредственными характеристиками распределения длительности U и расхода ресурса R, но и их связью с количеством возникающих процессов обслуживания – то есть с величинами a и λ. По аналогии со случаем независимых U и R выделим два режима работы системы.

Рассмотрим все процессы обслуживания с достаточно большой длительностью, выполняющиеся в нулевой момент времени. Под достаточно большой длительностью будем понимать то, что время работы процесса соизмеримо со временем работы всей системы: $u \geqslant ah$ для какого-то $h > 0$.

Более того, будем рассматривать только те процессы, у которых расход ресурса r не равен нулю, то есть для которых $r > 0$.

Среднее количество таких процессов равно

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\int \mathbb{1}_{\{u\geqslant ah,\; s\leqslant 0,\; s+u\geqslant 0;\; r>0\}}\, d\widetilde{N} \\ = \lambda \iint\limits_{\{u\geqslant ah\}} \mathbb{1}_{\{r>0\}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{s\leqslant 0,\; s+u\geqslant 0\}}\, ds\, dP_{UR}(u,r) \\ = \lambda \iint\limits_{\{u\geqslant ah\}} u\mathbb{1}_{\{r>0\}}\, dP_{UR}(u,r).\end{aligned}$$

Два режима работы системы:

(1) Режим низкой интенсивности обслуживания:

$$\lambda \iint\limits_{\{u\geqslant ah\}} u\mathbb{1}_{\{r>0\}}\, dP_{UR}(u,r) \to 0 \quad \forall h. \tag{4.1}$$

В этом случае будем говорить, что выполнено *условие низкой интенсивности обслуживания*.

Можно рассматривать также частный случай этого режима: систему, при которой стремится к нулю среднее количество всех процессов с достаточно большой длительностью, в том числе и тех, у которых $r = 0$. Этот случай можно записать как

$$\lambda \int\limits_{\{u \geqslant ah\}} u dP_U(u) \to 0 \quad \forall h > 0.$$

Будем тогда говорить, что выполнено *усиленное условие низкой интенсивности обслуживания.*

(2) Режим высокой интенсивности обслуживания:

$$\lambda \iint\limits_{\{u \geqslant ah\}} u \mathbb{1}_{\{r>0\}} \, dP_{UR}(u,r) \to \infty \quad \forall h > 0.$$

Будем говорить, что выполнено *условие высокой интенсивности обслуживания.*

§5. Сходимость к винеровскому процессу

Будем доказывать предельную теорему о сходимости Z_a к винеровскому процессу в случае $\mathbf{E}(U^2R^2) < \infty$, а нормировку выберем так, чтобы $Z_a(1)$ имела асимптотически единичную дисперсию (напомним, что асимптотическое поведение дисперсии вычислялось в утверждении 2.1):

$$1 \sim \frac{\mathbf{D}W^*(a)}{b^2} \sim \frac{\lambda \mathbf{E}\left(U^2R^2\right) a}{b^2},$$

то есть

$$b = (\lambda \mathbf{E}\left(U^2R^2\right) a)^{1/2}. \tag{5.1}$$

При такой нормировке для любого $t \in [0,1]$

$$\mathbf{D}Z_a(t) \to t. \tag{5.2}$$

Так как $Z_a(t)$ – процесс со стационарными приращениями, то для $t_1, t_2 \in [0,1]$ при $t_1 \leqslant t_2$:

$$\mathbf{D}(Z_a(t_2) - Z_a(t_1)) \to t_2 - t_1.$$

Из тождества

$$\mathbf{D}(Z_a(t_2) - Z_a(t_1)) = \mathbf{D}Z_a(t_1) + \mathbf{D}Z_a(t_2) - 2\mathrm{cov}(Z_a(t_1), Z_a(t_2))$$

находим

$$\operatorname{cov}(Z_a(t_1), Z_a(t_2)) \to \frac{1}{2}(t_1 + t_2 - (t_2 - t_1)) = t_1,$$

то есть для произвольных $t_1, t_2 \in [0,1]$

$$\operatorname{cov}(Z_a(t_1), Z_a(t_2)) \to \min(t_1, t_2), \tag{5.3}$$

что совпадает с ковариацией винеровского процесса.

Теорема 1. *Если* $\mathbf{E}\left(U^2R^2\right) < \infty$, $a \to \infty$ *и* $a\lambda \to \infty$, *то при нормировке* (5.1) *процесс* $Z_a(t)$ *сходится в смысле конечномерных распределений к винеровскому процессу* $\mathrm{B}(t)$.

Доказательство. I. *Сходимость одномерных распределений*
Сначала докажем, что для любого $t \in [0,1]$ верно, что

$$Z_a(t) \Rightarrow \mathcal{N}(0,t).$$

Для сходимости к нормальному закону достаточно показать, что (см. [2])

(1) $\mathbf{D}Z_a(t) \to t$;

(2) $\lambda \iiint \frac{r^2\ell_{at}^2(s,u)}{(a\lambda)} \mathbb{1}_{\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{(a\lambda)^{\frac{1}{2}}} > \varepsilon\right\}} \, ds \, dP_{UR}(u,r) \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$

Нормировка b (см. (5.1)) подбиралась таким образом, чтобы первый пункт был верен (требующуюся асимптотику можно непосредственно найти в формуле (5.2)).

Итак, осталось проверить второй пункт. Возьмем произвольное $h > 0$ и разделим область интегрирования на зоны $u > ah$ и $u \leqslant ah$. Покажем, что вклад зоны $(u > ah)$ пренебрежимо мал. Оценим длину носителя функции $\ell_{at}(\cdot, u)$ по переменной s величиной

$$u + at = u + ah\frac{t}{h} \leqslant \left(1 + \frac{t}{h}\right)u = \mathrm{const} \cdot u.$$

Сама функция $\ell_{at}(s,u)$ оценивается следующим тривиальным образом:

$$\ell_{at}(s,u) = |[0,at] \cap [s, s+u]| \leqslant u;$$
$$\ell_{at}(s,u) = |[0,at] \cap [s, s+u]| \leqslant at.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell_{at}^2(s,u)\, ds \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot at \cdot \mathbb{1}_{\{\ell_{at}(s,u)>0\}}\, ds \leqslant \mathrm{const} \cdot u^2 \cdot at.$$

Значит,

$$\lambda \iiint\limits_{u>ah} \frac{r^2\ell_{at}^2(s,u)}{a\lambda \mathbf{E}\,(U^2R^2)}\,ds\,dP_{UR}(u,r) \leqslant \mathrm{const}\cdot \iint\limits_{u>ah} \frac{r^2u^2\cdot at}{a}\,dP_{UR}(u,r)$$
$$= \mathrm{const}\cdot \mathbf{E}\left(U^2R^2\cdot \mathbb{1}_{\{u>ah\}}\right) \to 0.$$

Далее будем рассматривать зону ($u \leqslant ah$). Оценим в ней длину носителя функции $\ell_{at}(\cdot,u)$ по переменной s величиной

$$u + at \leqslant ah + at = (h+t)a = \mathrm{const}\cdot a.$$

Воспользовавшись данной оценкой и тем, что $\ell_{at}(s,u) = |[0,at]\cap[s,s+u]| \leqslant u$, заметим, что в этой зоне

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell_{at}^2(s,u)\,ds \leqslant \mathrm{const}\cdot a\cdot u^2.$$

Кроме того, из неравенства $\ell_{at}(s,u) \leqslant u$, следует, что зона $\left\{(u,r)\middle|\frac{r\ell_{at}(s,u)}{(\lambda a)^{1/2}} > \varepsilon\right\}$ содержится в $\left\{(u,r)\middle|\frac{ru}{(\lambda a)^{1/2}} > \varepsilon\right\}$. Поэтому можем оценивать величину

$$\lambda \iiint\limits_{\{ru/(\lambda a)^{1/2}>\varepsilon,\ u\leqslant ah\}} \frac{r^2\ell_{at}^2(s,u)}{(a\lambda)}\,ds\,dP_{UR}(u,r)$$
$$= a^{-1} \iint\limits_{\{ru/(\lambda a)^{1/2}>\varepsilon,\ u\leqslant ah\}} r^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell_{at}^2(s,u)\,ds\,dP_{UR}(u,r)$$
$$\leqslant \mathrm{const}\cdot \iint\limits_{ru/(\lambda a)^{1/2}>\varepsilon} r^2u^2 dP_{UR}(u,r) \to 0.$$

II. *Сходимость конечномерных распределений*
Для произвольного набора вещественных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ требуется проверить слабую сходимость распределений

$$(Z_a(t_1),\ldots,Z_a(t_m)) \Rightarrow (\mathrm{B}(t_1),\ldots,\mathrm{B}(t_m)),$$

где $\mathrm{B}(t)$ – винеровский процесс.

Для этого достаточно проверить сходимость каждой проекции

$$\sum_{j=1}^{m} c_j Z_a(t_j) = \int\limits_{\mathcal{R}} \Big(\sum_{j=1}^{m} c_j f_{t_j}\Big)\,d\widetilde{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} c_j \mathrm{B}(t_j),$$

где $f_{a,t_j} = \frac{r\ell_{at_j}(s,u)}{b}$.

Поскольку $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j \mathrm{B}(t_j)$ – нормальная случайная величина, то снова для сходимости к нормальному закону достаточно показать, что

(1) $\mathbf{D}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} c_j Z_a(t_j)\Big) \to \mathbf{D}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} c_j \mathrm{B}(t_j)\Big)$;

(2) $\lambda \iiint\limits_{\{|f_a|>\varepsilon\}} f_a^2\, ds\, dP_{UR}(u,r) \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$

В данном случае $f_a = \sum_{j=1}^{m} c_j f_{a,t_j}$.

Проверим первый пункт. Действительно, из формулы для ковариации (5.3) следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j Z_a(t_j)\Big) &= \sum_{i,j=1}^{m} c_i c_j \mathbf{E}\left(Z_a(t_i) Z_a(t_j)\right) \to \sum_{i,j=1}^{m} c_i c_j \min(t_i, t_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} c_i c_j \mathbf{E}\left(\mathrm{B}(t_i)\mathrm{B}(t_j)\right) = \mathbf{D}\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j \mathrm{B}(t_j)\Big).
\end{aligned}$$

Остается проверить, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\iiint\limits_{\{|f_a|>\varepsilon\}} f_a^2 \lambda\, ds\, dP_{UR}(u,r) \to 0.$$

Заметим, что все ядра $f_{a,t} = \frac{r^2 \ell_{at}(s,u)}{b}$ неотрицательны. В силу монотонности функции $\ell_t(s,u)$ по аргументу t, имеем $f_{a,t} \leqslant f_{a,1}$ для любого $t \leqslant 1$. Отсюда следует

$$0 \leqslant |f_a| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |c_j| f_{a,1} := C f_{a,1}$$

и далее

$$\{|f_a| > \varepsilon\} \subset \{f_{a,1} > \varepsilon / C\}.$$

Поэтому

$$\iiint\limits_{\{|f_a|>\varepsilon\}} f_a^2 \lambda\, ds\, dP_{UR}(u,r) \leqslant \iiint\limits_{\{f_{a,1}>\frac{\varepsilon}{C}\}} f_{a,1}^2 \lambda\, ds\, dP_{UR}(u,r).$$

Но в доказательстве сходимости одномерных распределений уже было показано, что последний интеграл сходится к нулю. Искомое утверждение доказано. □

§6. Сходимость к дробному броуновскому движению

Будем доказывать теорему о сходимости к дробному броуновскому движению при следующих ограничениях на совместное распределение U и R. Во-первых, пусть конечна величина $\mathbf{E}\left(UR^2\right)$ (что обеспечивает конечность дисперсии $\mathbf{D}W^*(at)$). Затем, пусть величина

$$G(t) = \iint\limits_{\{u>t\}} r^2 u \; dP_{UR}(u,r),$$

как и в условии (2.3) утверждения 2.2, ведет себя следующим образом: $G(t) \sim \frac{c}{t^{\gamma-1}}, \quad t \to \infty$, где $\gamma \in (1,2)$ и $c > 0$.

И, наконец, предположим, что система работает в *режиме малых вкладов*, который является частным случаем режима высокой интенсивности обслуживания:

$$I = a^{\gamma-1} \iint ur^2 \; \mathbb{1}_{\left\{r>\varepsilon\left(\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}} \; \mathbb{1}_{\{u>ah\}} \; dP_{UR} \to 0 \qquad \forall \varepsilon > 0,\ h > 0. \tag{6.1}$$

Нормировку выберем так, чтобы $Z_a(1)$ имела асимптотически единичную дисперсию:

$$1 \quad \sim \quad \frac{\mathbf{D}W^*(a)}{b^2} = \frac{\lambda \cdot c \cdot \frac{2}{(2-\gamma)(3-\gamma)\gamma} \cdot a^{3-\gamma}}{b^2},$$

то есть

$$b = \left(\lambda \cdot c \cdot \frac{2}{(2-\gamma)(3-\gamma)\gamma} \cdot a^{3-\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} =: K \cdot \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3-\gamma}{2}}. \tag{6.2}$$

Тогда

$$Z_a(t) = \int\limits_{\mathcal{R}} \left(\frac{r\ell_{at}(s,u)}{K\lambda^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3-\gamma}{2}}}\right) d\widetilde{N}, \quad t \in [0,1].$$

При данной нормировке для любого $t \in [0,1]$ верно, что

$$\mathbf{D}Z_a(t) \to t^{3-\gamma}.$$

В силу стационарности приращений процесса Z_a верно, что для $t_1, t_2 \in [0,1]$ при $t_1 \leqslant t_2$:

$$\mathbf{D}(Z_a(t_2) - Z_a(t_1)) \sim (t_2 - t_1)^{3-\gamma}.$$

Из тождества

$$\mathbf{D}(Z_a(t_2) - Z_a(t_1)) = \mathbf{D}Z_a(t_1) + \mathbf{D}Z_a(t_2) - 2\mathrm{cov}(Z_a(t_1), Z_a(t_2))$$

находим

$$\mathrm{cov}(Z_a(t_1), Z_a(t_2)) \to \frac{1}{2}(t_1^{3-\gamma} + t_2^{3-\gamma} - (t_2 - t_1)^{3-\gamma}), \qquad (6.3)$$

что совпадает с ковариацией дробного броуновского движения.

Теорема 2. *Если* $\mathbf{E}\left(UR^2\right) < \infty$, *поведение величины*

$$G(t) := \iint r^2 u \mathbb{1}_{\{u>t\}}\, dP_{UR}(u, r)$$

определяется (2.3), *система работает в режиме малых вкладов, а также* $a \to \infty$ *и* $a\lambda \to \infty$, *то при нормировке* (6.2) *процесс* $Z_a(t)$ *сходится в смысле конечномерных распределений к дробному броуновскому движению с индексом* $H = \frac{3-\gamma}{2}$.

Доказательство. Доказательство сходимости конечномерных распределений процесса Z_a практически дословно повторяет вторую часть доказательства теоремы 1 о сходимости к винеровскому процессу, поэтому покажем лишь сходимость одномерных распределений.

Докажем, что для любого $t \in [0, 1]$ верно

$$Z_a(t) \Rightarrow \mathcal{N}(0, t^{3-\gamma}).$$

Для сходимости к нормальному закону, как уже было сказано, достаточно показать, что

(1) $\mathbf{D}Z_a(t) \to t^{3-\gamma}$;

(2) $\displaystyle\iiint \frac{r^2 \ell_{at}^2(s, u)}{a^{3-\gamma}}\, \mathbb{1}_{\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{(\lambda a^{3-\gamma})^{\frac{1}{2}}} > \varepsilon\right\}}\, ds\, dP_{UR}(u, r) \to 0.$

Нормировка b (см. (6.2)) подбиралась таким образом, чтобы пункт (1) был верен.

Итак, осталось проверить пункт (2). Возьмем произвольное $h > 0$ и разделим область интегрирования на зоны $(u > ah)$ и $(u \leqslant ah)$. Рассмотрим вначале зону $(u > ah)$. Оценим в этой области длину носителя функции $\ell_{at}(\cdot, u)$ по переменной s величиной

$$u + at < u + \frac{t}{h}u = (1 + \frac{t}{h})u = \mathrm{const} \cdot u.$$

Воспользовавшись данной оценкой и тем, что $\ell_{at}(s,u) = |[0,at] \cap [s,s+u]| \leqslant at$, заметим, что в этой зоне

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell_{at}^2(s,u)\,ds < \mathrm{const}\cdot u \cdot a^2.$$

Кроме того, из того, что $\ell_{at}(s,u) \leqslant at$, следует, что зона

$$\Big\{(u,r)\Big|\ \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(\lambda a^{3-\gamma})^{\frac{1}{2}}} > \varepsilon\Big\}$$

содержится в $\big\{(u,r)\big|\ r > \frac{\varepsilon}{t}(\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}})^{\frac{1}{2}}\big\} = \big\{(u,r)\big|\ r > \varepsilon'(\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}})^{\frac{1}{2}}\big\}$. Поэтому для зоны $(u > ah)$ (воспользуемся условием малых вкладов) верно, что

$$\iiint \frac{r^2\ell_{at}^2(s,u)}{a^{3-\gamma}} \mathbb{1}_{\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{(\lambda a^{3-\gamma})^{\frac{1}{2}}}>\varepsilon\right\}}\ \mathbb{1}_{\{u>ah\}}\,ds\,dP_{UR}(u,r)$$
$$< \mathrm{const}\cdot a^{\gamma-1}\iint ur^2\ \mathbb{1}_{\{r>\varepsilon'(\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}})^{\frac{1}{2}}\}}\ \mathbb{1}_{\{u>ah\}}\,dP_{UR} \to 0.$$

Теперь рассмотрим зону $(u \leqslant ah)$. Прежде всего отбросим область $\big\{(u,r)\big|\ \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(\lambda a^{3-\gamma})^{\frac{1}{2}}} > \varepsilon\big\}$:

$$\iiint \frac{r^2\ell_{at}^2(s,u)}{a^{3-\gamma}} \mathbb{1}_{\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{(\lambda a^{3-\gamma})^{\frac{1}{2}}}>\varepsilon\right\}}\ \mathbb{1}_{\{u\leqslant ah\}}\,ds\,dP_{UR}(u,r)$$
$$< \iiint \frac{r^2\ell_{at}^2(s,u)}{a^{3-\gamma}}\ \mathbb{1}_{\{u\leqslant ah\}}\,ds\,dP_{UR}(u,r).$$

Далее заметим, что при $u \leqslant ah$ верно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell_{at}^2(s,u)\,ds \leqslant \mathrm{const}\cdot a \cdot u^2.$$

Значит,

$$\iiint \frac{r^2\ell_{at}^2(s,u)}{a^{3-\gamma}}\ \mathbb{1}_{\{u\leqslant ah\}}\,ds\,dP_{UR}(u,r)$$
$$< \frac{\mathrm{const}}{a^{2-\gamma}}\iint r^2u^2\ \mathbb{1}_{\{u\leqslant ah\}}\,dP_{UR}(u,r).$$

Из доказательства утверждения 2.2 (см. формулу (2.6)) известна асимптотика последнего интеграла:

$$\iint\limits_{\{u\leqslant t\}} r^2u^2\, dP_{UR}(u,r) \sim c\cdot\frac{\gamma-1}{2-\gamma}\cdot t^{2-\gamma}.$$

Таким образом,

$$\frac{\mathrm{const}}{a^{2-\gamma}}\iint \mathbb{1}_{\{u\,\leqslant\,ah\}}\, r^2u^2\, dP_{UR}(u,r) \sim \frac{\mathrm{const}}{a^{2-\gamma}}\, a^{2-\gamma}\, h^{2-\gamma} = \mathrm{const}\cdot h^{2-\gamma}.$$

Устремив h к нулю, завершим доказательство сходимости. □

Замечание. Условие малых вкладов (6.1), несмотря на несколько громоздкий вид, имеет под собой основание.

(1) Несложно убедиться, что при работе системы в режиме низкой интенсивности обслуживания условие (6.1) не выполняется.

(2) Рассмотрим систему обслуживания, в которой существенные вклады отдельных процессов с длиной, соизмеримой с ah для некоторого h (т.е. $u > ah$), маловероятны. Размер вклада таких процессов больше ahr; нормированный вклад больше

$$\frac{ahr}{(\lambda a^{3-\gamma})^{\frac{1}{2}}} = \frac{rh}{(\lambda a^{1-\gamma})^{\frac{1}{2}}}.$$

Интерес представляют процессы, вклады которых больше некоторого ε_1, то есть процессы, у которых

$$\frac{rh}{(\lambda a^{1-\gamma})^{\frac{1}{2}}} > \varepsilon_1$$

для некоторых h и ε_1, или

$$\frac{r}{(\lambda a^{1-\gamma})^{\frac{1}{2}}} > \varepsilon$$

для некоторого ε.

Второй момент размера таких вкладов равен

$$\mathbf{E}\left(\frac{r}{(\lambda a^{1-\gamma})^{\frac{1}{2}}}\,\mathbb{1}_{\{\frac{r}{(\lambda a^{1-\gamma})^{\frac{1}{2}}}>\varepsilon,\ u>ah\}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\lambda a^{1-\gamma}}\,\lambda\iint\Big(\int\limits_{-u}^{a}ds\Big)\,r^2\,\mathbb{1}_{\{u\geqslant a\}}\,\mathbb{1}_{\{r>\varepsilon(\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}})^{\frac{1}{2}}\}}\,dP_{UR}$$

$$\asymp a^{\gamma-1}\iint ur^2\,\mathbb{1}_{\{r>\varepsilon(\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}})^{\frac{1}{2}}\}}\,\mathbb{1}_{\{u>ah\}}\,dP_{UR},$$

то есть сходимость размера таких вкладов к нулю в L^2 как раз совпадает с введенным нами условием:

$$a^{\gamma-1}\iint ur^2\,\mathbb{1}_{\{r>\varepsilon(\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}})^{\frac{1}{2}}\}}\,\mathbb{1}_{\{u>ah\}}\;dP_{UR}\to 0\quad \forall h>0,\ \varepsilon>0.$$

§7. Сходимость к устойчивому процессу

Будем доказывать предельную теорему о сходимости к устойчивому процессу для Z_a в случае

$$\mathbf{P}(UR>x)\sim\frac{C}{\alpha x^{\alpha}},\quad x\to\infty,\quad 1<\alpha<2, \tag{7.1}$$

а нормировку выберем по формуле

$$b=(C\lambda a)^{1/\alpha}. \tag{7.2}$$

Будем считать, что выполнено условие низкой интенсивности обслуживания:

$$\lambda\iint\limits_{\{u\geqslant ah\}} u\mathbb{1}_{\{r>0\}}\,dP_{UR}(u,r)\to 0\qquad \forall h>0. \tag{7.3}$$

Теорема 3. *Если* $\mathbf{P}(UR>x)\sim\frac{C}{\alpha x^{\alpha}}$, $x\to\infty$, $1<\alpha<2$ *и* $a\to\infty$, $a\lambda\to\infty$ *и выполнено условие низкой интенсивности обслуживания, то при нормировке* (7.2) *процесс* $Z_a(t)$ *сходится в смысле конечномерных распределений к процессу* $\mathcal{Y}(t)$, *где* $\mathcal{Y}(t)$ *– спектрально положительный устойчивый строго* α*-устойчивый процесс;* $\mathcal{Y}(1)\stackrel{d}{=}\mathcal{S}(1,0,\alpha)$.

Доказательство. В дальнейшем потребуется вспомогательное утверждение:

Лемма 3.1. *Если* $\mathbf{P}(UR > x) \sim \frac{C}{\alpha x^{\alpha}}$, $x \to \infty$, $1 < \alpha < 2$ *и выполнено условие низкой интенсивности обслуживания* (7.3), *то при нормировке* (7.2) *для любого* $t \in [0,1]$ *верно, что*

$$Z_a^{A,h}(t) = \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{b} \cdot \mathbb{1}_{\{u>ah\}} \mathbb{1}_A \, d\widetilde{N} \Rightarrow 0$$

для любого множества $A \subset \mathcal{R}$ *и любого* $h > 0$.

Доказательство. Оценим меру носителя подынтегральной функции. Для этого оценим длину носителя функции $\ell_{at}(\cdot, u)$ по переменной s величиной

$$u + at = u + ah\frac{t}{h} \leqslant \left(1 + \frac{t}{h}\right) u =: \mathrm{const} \cdot u.$$

Поэтому

$$\mu\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, u > ah, A\} \leqslant \mu\{\ell_{at}(s,u) > 0, u > ah, r > 0\}$$
$$\leqslant \lambda \cdot \mathrm{const} \cdot \iint\limits_{\{u \geqslant ah\}} u \mathbb{1}_{\{r>0\}} \, dP_{UR}(u,r) \to 0.$$

Представим $Z_a^{A,h}(t)$ в виде

$$Z_a^{A,h}(t) = \overline{Z}_a^{A,h}(t) - \mathbf{E}\overline{Z}_a^{A,h}(t),$$

где

$$\overline{Z}_a^{A,h}(t) = \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} \cdot \mathbb{1}_{\{u>ah\}} \mathbb{1}_A dN.$$

В первую очередь заметим, что $\overline{Z}_a^{A,h}(t) \Rightarrow 0$, поскольку

$$\mathbf{P}(\overline{Z}_a^{A,h}(t) \neq 0) = 1 - e^{-\mu\{\ell_{at}(s,u)>0,\ u>ah,\ A,\ r>0\}} \to 0.$$

Для оценки $\mathbf{E}\overline{Z}_a^{A,h}(t)$ воспользуемся тем, что $\ell_{at}(s,u) < at$, а длину носителя функции $\ell_{at}(\cdot, u)$ по переменной s вновь оценим величиной

$\mathrm{const}\cdot u$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\overline{Z}_a^{A,h}(t) &= \lambda \iiint \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} \cdot \mathbb{1}_{\{u>ah\}} \cdot \mathbb{1}_A \, ds\, dP_{UR}(u,r) \\
&\leqslant \frac{\lambda at}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} \iiint r \cdot \mathbb{1}_{\{\ell_{at}(s,u)>0, u>ah\}} \, ds\, dP_{UR}(u,r) \\
&\leqslant \mathrm{const}_2 \cdot \frac{\lambda a}{(\lambda a)^{1/\alpha}} \iint ur \cdot \mathbb{1}_{\{u>ah\}} \, dP_{UR}(u,r) \\
&= \mathrm{const}_2 \cdot \frac{\lambda a}{(\lambda a)^{1/\alpha}} \iint ur \cdot \mathbb{1}_{\{u>ah,\ r>0\}} \, dP_{UR}(u,r).
\end{aligned}$$

Возьмем теперь такое x, что $\mathbf{P}(U > ah, R > 0) = \mathbf{P}(UR > x)$. Заметим, что в таком случае

$$\iint ur \cdot \mathbb{1}_{\{u>ah,\ r>0\}} \, dP_{UR}(u,r) \leqslant \iint ur \cdot \mathbb{1}_{\{ur>x\}} \, dP_{UR}(u,r),$$

так как (вычтем из обеих частей интегралы по пересечению множеств)

$$\begin{aligned}
\iint ur \cdot \mathbb{1}_{\{u>ah,\ ur<x,\ r>0\}} \, dP_{UR}(u,r) &\leqslant x \cdot \mathbf{P}(U > ah, R > 0, UR < x) \\
= x \cdot \mathbf{P}(U < ah, UR > x) &\leqslant \iint ur \cdot \mathbb{1}_{\{u<ah, ur>x\}} \, dP_{UR}(u,r).
\end{aligned}$$

Вспомним, что $\mathbf{P}(UR > x) \sim C \cdot \alpha^{-1} \cdot x^{-\alpha}$, и, значит,

$$x \sim \frac{C^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (\mathbf{P}(UR > x))^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Тогда

$$x^{1-\alpha} \sim C^{\frac{1}{\alpha}-1} \cdot \alpha^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot (\mathbf{P}(UR > x))^{1-\frac{1}{\alpha}},$$

таким образом получим

$$\int ur \cdot \mathbb{1}_{\{ru>x\}}\, dP_{UR}(u,r) = \int \mathbf{P}(UR \cdot \mathbb{1}_{\{UR>x\}} > y)\, dy$$

$$= \int \mathbf{P}(UR > y, UR > x)\, dy = \int\limits_0^x \mathbf{P}(UR > x)\, dy + \int\limits_x^\infty \mathbf{P}(UR > y)\, dy$$

$$\sim x \cdot \mathbf{P}(UR > x) + \int\limits_x^\infty C \cdot \alpha^{-1} \cdot y^{-\alpha}\, dy = x \cdot \mathbf{P}(UR > x) + \mathrm{const}_3 \cdot x^{1-\alpha}$$

$$\sim \mathrm{const}_4 \cdot (\mathbf{P}(UR > x))^{1-\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{const}_4 \cdot (\mathbf{P}(U > ah, R > 0))^{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Воспользовавшись условием низкой интенсивности, завершим доказательство утверждения:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\overline{Z}_a^{A,h}(t) \quad &\preceq \quad \mathrm{const}_5 \cdot \lambda^{1-\frac{1}{\alpha}} a^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot (\mathbf{P}(U > ah, R > 0))^{1-\frac{1}{\alpha}} \\ &= \quad \mathrm{const}_5 \cdot \left(\lambda a \cdot \iint \mathbb{1}_{\{u>ah,\, r>0\}}\, dP_{UR}(u,r)\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \\ &\leqslant \quad \mathrm{const}_6 \cdot \left(\lambda \iint\limits_{\{u \geqslant ah\}} u\mathbb{1}_{\{r>0\}}\, dP_{UR}(u,r)\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \to 0.\end{aligned}$$

□

Перейдем к непосредственному доказательству сходимости одномерных распределений.

I. *Сходимость одномерных распределений*

Покажем, что для любого $t \in [0,1]$

$$Z_a(t) \Rightarrow \mathcal{S}(t, 0, \alpha),$$

где $\mathcal{S}(t,0,\alpha)$ – строго α-устойчивая случайная величина.

Напомним, что

$$Z_a(t) = \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}}\, d\widetilde{N}.$$

Зафиксируем какое-нибудь $H > 0$ и представим $Z_a(t)$ в виде

$$Z_a(t) = Z_{a,1}(t) + Z_{a,2}(t),$$

где

$$Z_{a,1}(t) = \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} \cdot \mathbb{1}_{\{u>aH\}}\, d\widetilde{N},$$

$$Z_{a,2}(t) = \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} \cdot \mathbb{1}_{\{u\leqslant aH\}}\, d\widetilde{N}.$$

В лемме 3.1 было доказано, что $Z_{a,1}(t) \Rightarrow 0$.

Перейдем к $Z_{a,2}(t)$. Для сходимости к устойчивому распределению достаточно показать, что (см. [2])

(1) $\lim \mu \left\{ \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} \cdot \mathbb{1}_{\{u\leqslant aH\}} > x \right\} = \frac{t}{\alpha x^\alpha}$;

(2) $\lim \mu \left\{ \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} \cdot \mathbb{1}_{\{u\leqslant aH\}} < -x \right\} = 0$;

(3) верна равномерная оценка

$$\mu \left\{ \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} \cdot \mathbb{1}_{\{u\leqslant aH\}} > x \right\} \leqslant \frac{B}{x^\alpha}.$$

Второе утверждение ввиду положительности функции тривиально.

Проверим сначала первое утверждение.

Рассмотрим малое $h < H$. Отбросим зону $(u > ah)$:

$$\mu\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, u > ah\} \leqslant \mu\{\ell_{at}(s,u) > 0, u > ah, r > 0\} \tag{7.4}$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot \lambda \iint\limits_{\{u\geqslant ah\}} u \mathbb{1}_{\{r>0\}}\, dP_{UR}(u,r) \to 0. \tag{7.5}$$

Значит,

$$\mu \left\{ \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, ah < u \leqslant aH \right\} \leqslant \mu\left\{\ell_{at}(s,u) > 0, u > ah, r > 0\right\} \to 0.$$

Теперь перейдем к зоне $(u \leqslant ah)$. Начнем с верхней оценки меры. Воспользовавшись неравенством $\ell_{at}(s,u) \leqslant u$, видим, что из неравенства $\frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x$ следует $ru > x(C\lambda a)^{1/\alpha}$. С другой стороны, при фиксированном u длина носителя функции $\ell_{at}(\cdot, u)$ оценивается величиной $u + at \leqslant (t+h)a$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mu \left\{ \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, u \leqslant ah \right\} \quad &\leqslant \quad \mathbf{P}(RU \geqslant x(C\lambda a)^{1/\alpha}) \cdot \lambda \cdot (t+h)a \\ &\sim \quad \frac{C}{\alpha (x (C\lambda a)^{1/\alpha})^\alpha} \cdot \lambda \cdot (t+h)a = \frac{t+h}{\alpha x^\alpha}.\end{aligned}$$

Получим нижнюю оценку интересующей нас меры. Воспользуемся тем, что на достаточно большом множестве $\ell_{at}(s,u) = u$:

$$\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, u \leqslant ah\right\} \geqslant \mu\left\{\frac{ru}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, s \in [0, at-ah], u \leqslant ah\right\}$$
$$= \mu\left\{\frac{ru}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, s \in [0, at-ah]\right\}$$
$$-\mu\left\{\frac{ru}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, s \in [0, at-ah], u > ah\right\}$$
$$\geqslant \mu\left\{\frac{ru}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, s \in [0, at-ah]\right\} - \mu\left\{\ell_{at}(s,u) > 0, u > ah, r > 0\right\}.$$

Как мы уже показали в (7.4), второе слагаемое пренебрежимо мало, то есть начиная с некоторого момента интересующая нас мера становится больше первого слагаемого. Далее,

$$\mu\left\{\frac{ru}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, s \in [0, at-ah]\right\} = \mathbf{P}\left(\frac{RU}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x\right) \cdot \lambda \cdot (t-h)a$$
$$\sim \frac{C}{x^\alpha C\lambda a} \cdot \lambda \cdot (t-h)a = \frac{t-h}{\alpha x^\alpha}.$$

Устремив h к нулю, окончательно докажем первое утверждение.

Докажем теперь равномерную оценку. Из условия $\mathbf{P}(UR > x) \sim \frac{C}{\alpha x^\alpha}$ следует, что для некоторых C_1, x_1 верно

$$\mathbf{P}(UR > x) \leqslant \frac{C_1}{\alpha x^\alpha}, \qquad x > x_1.$$

Отсюда следует равномерная оценка

$$\mathbf{P}(UR > x) \leqslant \frac{C_1 + x_1^\alpha}{\alpha x^\alpha} =: \frac{C_2}{\alpha x^\alpha} \qquad \forall x > 0.$$

Следовательно

$$\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{(C\lambda a)^{1/\alpha}} > x, u \leqslant Ha\right\} \leqslant \mathbf{P}(RU \geqslant x(C\lambda a)^{1/\alpha}) \cdot \lambda \cdot (t+H)a$$
$$\leqslant \frac{C_2}{\alpha(x(C\lambda a)^{1/\alpha})^\alpha} \cdot \lambda \cdot (t+H)a = \frac{C_2}{C} \cdot \frac{t+H}{\alpha x^\alpha} =: \frac{B}{\alpha x^\alpha}. \quad (7.6)$$

II. *Сходимость конечномерных распределений*
Доказательство проведем по следующей схеме:

(1) Сведем доказательство к сходимости вектора, состоящего из приращений:
$\mathcal{Z}_a = (Z_a(t_1), Z_a(t_2) - Z_a(t_1), \ldots, Z_a(t_m) - Z_a(t_{m-1}))$.
(2) Разобьем вектор $\mathcal{Z}_a$ на сумму векторов $\mathcal{Z}'_a$ и $\mathcal{Z}''_a$. В первый вектор будут входить все процессы обслуживания с большой длительностью. Компоненты второго вектора окажутся независимыми.
(3) Затем докажем, что $\mathcal{Z}'_a$ слабо сходится к нулю. И, воспользовавшись одномерной сходимостью, покажем сходимость $\mathcal{Z}''_a$ к интересующему нас распределению.

Достаточно для любого $m \geqslant 1$ и любых $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m$ проверить сходимость

$$\begin{aligned}(Z_a(t_1), Z_a(t_2) - Z_a(t_1), \ldots, Z_a(t_m) - Z_a(t_{m-1}))\\ \Rightarrow (\mathcal{Y}(t_1), \mathcal{Y}(t_2) - \mathcal{Y}(t_1), \ldots, \mathcal{Y}(t_m) - \mathcal{Y}(t_{m-1}).\end{aligned}$$

Зададим множество

$$A = \{(s,u,r) \in \mathcal{R} \mid \exists j : s \leqslant t_j \leqslant s+u\}$$

и представим $Z_a(t_k)$, где $k = 1 \ldots m$ в виде суммы

$$Z_a(t_k) = Z'_a(t_k) + Z''_a(t_k),$$

где

$$Z'_a(t_k) = \int\limits_A \frac{r\ell_{at_k}(s,u)}{b}\, d\widetilde{N},$$

$$Z''_a(t_k) = \int\limits_{\mathcal{R}\setminus A} \frac{r\ell_{at_k}(s,u)}{b}\, d\widetilde{N}.$$

Покажем, что $Z'_a(t_k)$ стремится к нулю.

Разделим область интегрирования на две: область с достаточно большой длительностью и область с моментом начала процесса обслуживания, близким к at_j. А именно, фиксируем маленькое h, разобьем $\mathcal{R}$ на множества

$$C = \{(s,u,r) \in A \mid u > ah\}$$

и

$$D = \{(s,u,r) \in A \mid u \leqslant ah\}.$$

Из леммы 3.1 напрямую следует, что

$$\int\limits_C \frac{r\ell_{at_k}(s,u)}{b}\,d\widetilde{N} = \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at_k}(s,u)}{b}\cdot \mathbb{1}_{\{u>ah\}}\mathbb{1}_A d\widetilde{N} \Rightarrow 0.$$

Рассмотрим интеграл по множеству D. Предположим теперь, что мы взяли настолько небольшое h, что

$$h < \min_j (t_{j+1} - t_j).$$

В таком случае множество D можно разделить на непересекающиеся множества

$$\begin{aligned} D_j &= \{(s,u,r)\in\mathcal{R} \mid u \leqslant ah,\ s < at_j < s+u\} \\ &= \{(s,u,r)\in\mathcal{R} \mid u \leqslant ah,\ s < at_j < s+u,\ at_j - ah < s < at_j\}. \end{aligned}$$

Затем

$$\int\limits_D \frac{r\ell_{at_k}(s,u)}{b}\,d\widetilde{N} = \sum_{j=1}^m \int\limits_{D_j} \frac{r\ell_{at_k}(s,u)}{b}\,d\widetilde{N}.$$

Будем рассматривать каждое слагаемое в отдельности.

$$\int\limits_{D_j} \frac{r\ell_{at_k}(s,u)}{b}\,d\widetilde{N} =: \widehat{V}^j_{a,h}(t_k).$$

Ввиду стационарности

$$\begin{aligned} \widehat{V}^j_{a,h}(t_k) &\overset{d}{=} \widehat{V}^j_{a,h}(t_k + (at_j - ah)) - \widehat{V}^j_{a,h}(at_j - ah) \\ &= \int\limits_D \frac{r\cdot |[at_j - ah, t_k + (at_j - ah)] \cap [s, s+u]|}{b}\,d\widetilde{N} \\ &= \left| \begin{matrix} s := s + ah - at_j \\ B := \{(s,u,r)\in\mathcal{R} \mid 0 \leqslant s \leqslant ah \leqslant s+u \leqslant 2ah\} \end{matrix} \right| \\ &= \int\limits_B \frac{r\ell_{at_k}(s,u)}{b}\,d\widetilde{N} =: V^j_{a,h}(t_k). \end{aligned}$$

Покажем, что $V^j_{a,h}(t_k)$ представляет собой часть нормированной нагрузки $Z_a(2h)$.

Поскольку h мало, а s и u таковы, что $s + u < 2ah$, то

$$\ell_{at_k}(s,u) = |[0, at_k] \cap [s, s+u]| = |[0, 2ah] \cap [s, s+u]| = \ell_{2ah}(s,u),$$

и, значит,

$$\int\limits_B \frac{r\ell_{at_k}(s,u)}{b}\, d\widetilde{N} = \int\limits_B \frac{r\ell_{2ah}(s,u)}{b}\, d\widetilde{N},$$

то есть

$$\begin{aligned} Z_a(2h) &= \int\limits_B \frac{r\ell_{2ah}(s,u)}{b}\, d\widetilde{N} + \int\limits_{\mathcal{R}\setminus B} \frac{r\ell_{2ah}(s,u)}{b}\, d\widetilde{N} \\ &= V^j_{a,h}(t) + \int\limits_{\mathcal{R}\setminus B} \frac{r\ell_{2ah}(s,u)}{b}\, d\widetilde{N}, \end{aligned}$$

причем второе слагаемое не зависит от первого. Следовательно, мера Леви $V^j_{a,h}(t_k)$ меньше меры Леви $Z_a(2h)$.

Вспомним, что в первой части доказательства была получена оценку для меры Леви $Z_a(2h)$:

$$\mu\{\frac{r\ell_{2ah}(s,u)}{b} > x\} \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot h}{x^\alpha}.$$

Далее,

$$\mathbf{E}e^{i\tau V^j_{a,h}(t_k)} = \exp\Big\{\int\limits_0^\infty (e^{i\tau u} - 1 - i\tau u)\nu_h(du)\Big\},$$

причем

$$\nu_h\{u > x\} \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot h}{x^\alpha}.$$

Заметим, что $\int\limits_0^\infty (e^{i\tau u} - 1 - i\tau u)\nu_h(du) = \mathrm{O}(h)$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\Big|\int\limits_0^\infty (e^{i\tau u} - 1 - i\tau u)\, d\nu_h(du)\Big| \leqslant \int\limits_{\{\tau u \geqslant 1\}} \big|(e^{i\tau u} - 1 - i\tau u)\big|\, d\nu_h(du) \\ &+ \int\limits_{\{\tau u \leqslant 1\}} \big|(e^{i\tau u} - 1 - i\tau u)\big|\, d\nu_h(du) =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим каждый интеграл в отдельности.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{\{\tau u \geqslant 1\}} \left|(e^{i\tau u} - 1 - i\tau u)\right| \nu_h(du) \leqslant \int\limits_{\{\tau u \geqslant 1\}} (2 + \tau u)\, d\nu_h(du) \\
&= \int\limits_0^\infty \nu_h\left((2+\tau u)\cdot \mathbb{1}_{\{\tau u \geqslant 1\}} > y\right)\, dy = \int\limits_0^\infty \nu_h\left(2 + \tau u > y, \tau u \geqslant 1\right)\, dy \\
&= \int\limits_0^3 \nu_h(\tau u > 1)\, dy + \int\limits_3^\infty \nu_h(\tau u > y - 2)\, dy \\
&\leqslant \mathrm{const} \cdot h \cdot \tau^\alpha.
\end{aligned}$$

Затем

$$\begin{aligned}
I_2 = \int\limits_{\{\tau u \leqslant 1\}} \left|(e^{i\tau u} - 1 - i\tau u)\right| d\nu_h(du) \leqslant \mathrm{const} \int\limits_{\{\tau u \leqslant 1\}} \tau^2 u^2 d\nu_h(du) \\
\leqslant \mathrm{const} \cdot \nu_h\left(u \leqslant \frac{1}{\tau}\right) \leqslant \mathrm{const} \cdot h \cdot \tau^\alpha.
\end{aligned}$$

Таким образом, $V^j_{a,h}(t_k) \Rightarrow 0$.

Итак, мы показали, что $Z'_a(t_k) \Rightarrow 0$ и, значит,

$$(Z'_a(t_1), Z'_a(t_2) - Z'_a(t_1), \ldots, Z'_a(t_m) - Z'_a(t_{m-1})) \Rightarrow 0.$$

Для доказательства теоремы осталось показать, что

$$\begin{aligned}
(Z''_a(t_1), Z''_a(t_2) - Z''_a(t_1), \ldots, Z''_a(t_m) - Z''_a(t_{m-1})) \\
\Rightarrow (\mathcal{Y}(t_1), \mathcal{Y}(t_2) - \mathcal{Y}(t_1), \ldots, \mathcal{Y}(t_m) - \mathcal{Y}(t_{m-1})).
\end{aligned}$$

Покажем это. Во-первых, для любых t_k, t_{k-1} (при $k = 1, \ldots, m$) верно, что

$$(Z''_a(t_k) - Z''_a(t_{k-1})) \Rightarrow \mathcal{Y}(t_k) - \mathcal{Y}(t_{k-1}),$$

поскольку (воспользуемся стационарностью приращений процесса $Z_a(t)$, показанной в разделе 3, и стационарностью приращений винеровского процесса)

$$(Z_a(t_k) - Z_a(t_{k-1})) \overset{d}{=} (Z_a(t_k - t_{k-1}) - 0) \Rightarrow \mathcal{Y}(t_k - t_{k-1}) \overset{d}{=} \mathcal{Y}(t_k) - \mathcal{Y}(t_{k-1})$$

и

$$(Z''_a(t_k) - Z''_a(t_{k-1})) = (Z_a(t_k) - Z_a(t_{k-1})) - (Z'_a(t_k) - Z'_a(t_{k-1})).$$

Во-вторых, то, что компоненты вектора

$$(Z''_a(t_1), Z''_a(t_2) - Z''_a(t_1), \ldots, Z''_a(t_m) - Z''_a(t_{m-1}))$$

независимы, следует из следующего соображения: для любого $k = 1, \ldots, m$ верно, что

$$\begin{aligned}
Z''_a(t_k) - Z''_a(t_{k-1}) &= \int\limits_{\mathcal{R}\setminus A} \frac{r\left(\ell_{at_k}(s,u) - \ell_{at_{k-1}}(s,u)\right)}{b}\, d\widetilde{N} \\
&= \int\limits_{\mathcal{R}\setminus A} \frac{r\,|[at_{k-1}, at_k] \cap [s, s+u]|}{b}\, d\widetilde{N} \\
&= \int\limits_{\{at_{k-1}<s\leqslant s+u<at_k\}} \frac{r\,|[at_{k-1}, at_k] \cap [s, s+u]|}{b}\, d\widetilde{N} \\
&= \int\limits_{\{at_{k-1}<s\leqslant s+u<at_k\}} \frac{r\ell_{at_m}(s,u)}{b}\, d\widetilde{N}.
\end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned}
&(Z''_a(t_1), Z''_a(t_2) - Z''_a(t_1), \ldots, Z''_a(t_m) - Z''_a(T_{m-1})) \\
&\qquad\Rightarrow (\mathcal{Y}(t_1), \mathcal{Y}(t_2) - \mathcal{Y}(t_1\mathcal{Y}), \ldots, \mathcal{Y}(t_m) - \mathcal{Y}(t_{m-1})),
\end{aligned}$$

а, значит,

$$\begin{aligned}
&(Z_a(t_1), Z_a(t_2) - Z_a(t_1), \ldots, Z_a(t_m) - Z_a(T_{m-1})) \\
&\qquad\Rightarrow (\mathcal{Y}(t_1), \mathcal{Y}(t_2) - \mathcal{Y}(t_1), \ldots, \mathcal{Y}(t_m) - \mathcal{Y}(t_{m-1})). \quad \square
\end{aligned}$$

§8. Один пример использования результатов

Рассмотрим следующий пример. Он иллюстрирует возможные режимы работы системы и предельные теоремы для них.

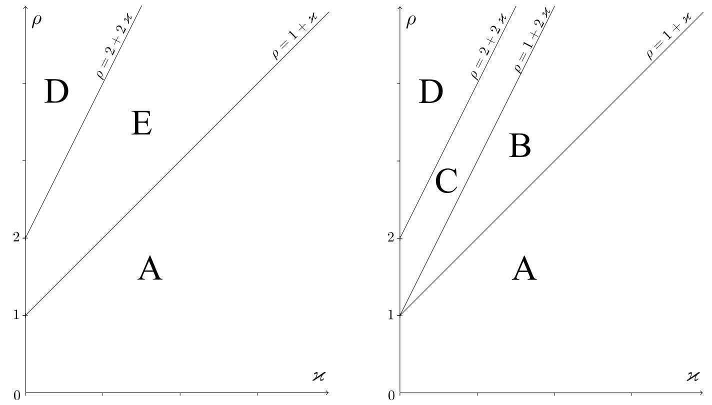
Пусть длительность процесса обслуживания U имеет плотность $p(u)$, такую что

$$p(u) \sim \frac{c_U}{u^{1+\rho}}, \quad u \to \infty, \tag{8.1}$$

а расход ресурса $R = U^{\varkappa}$.

Чтобы определение случайных величин U и R было корректным, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\rho > 0$. Предположим также, что выполнено неравенство $\varkappa > 0$.

Интерес представляет предельное поведение центрированной и нормированной суммарной нагрузки $Z_a(t)$ при различных параметрах ρ и $\varkappa$. Опишем его с помощью диаграммы.



(a) Низкая интенсивность (b) Высокая интенсивность

Рис. 1. Диаграмма предельных теорем для случая $R = U^{\varkappa}$.

Для получения осмысленных результатов необходимо предположить, что конечно математическое ожидание величины UR, что выполняется, когда $\rho > 1 + \varkappa$. Таким образом, в области A на обоих графиках осмысленных результатов нет.

Применение теорем, представленных в разделах 5, 6 и 7, приводит к следующему утверждению.

Утверждение 8.1. (1) *При* $2 + 2\varkappa < \rho$ (*область* D *на обоих графиках*) *процесс* $Z_a(t)$ *с нормировкой*

$$b = (c_U \int u^{2+2\varkappa} p(u) du)^{\frac{1}{2}} (\lambda a)^{\frac{1}{2}}$$

сходится к винеровскому процессу.

(2) *При* $\frac{\lambda}{a^{\rho-1}} \to 0$ (*Рис.* 1(a)) *система работает в режиме низкой интенсивности обслуживания.*
Если $1 + \varkappa < \rho < 2 + 2\varkappa$ (*область* E *на Рис.* 1(a)) *то при нормировке* $b = (c_U \lambda a)^{\frac{1+\varkappa}{\rho}}$ *процесс* $Z_a(t)$ *сходится к строго* $\frac{\rho}{1+\varkappa}$*-устойчивому процессу.*

(3) *При* $\frac{\lambda}{a^{\rho-1}} \to \infty$ *(Рис.* 1(b)*) система работает в режиме высокой интенсивности обслуживания.*
Если $1 + 2\varkappa < \rho < 2 + 2\varkappa$ *(область* C *на Рис.* 1(b)*) то при нормировке*

$$b = \left(\frac{2}{(2-\rho+2\varkappa)(3-\rho+2\varkappa)(\rho-2\varkappa)}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3-\rho+2\varkappa}{2}}$$

процесс $Z_a(t)$ *сходится к процессу дробного броуновского движения с индексом* $H = \frac{3-\rho+2\varkappa}{2}$.

Доказательство этого результата будет приведено в другой работе.

Заметим, что при низкой интенсивности обслуживания представленные в данной работе предельные теоремы покрывают все возможные соотношения между $\varkappa$ и ρ, а при высокой интенсивности обслуживания остается нерассмотренной зона $1+\varkappa < \rho < 1+2\varkappa$ (область B на Рис. 1(b)).

Оказывается что для этой зоны верна следующая предельная теорема (приведем ее без доказательства).

Теорема 4. *Если* $1 + \varkappa < \rho < 1 + 2\varkappa$ *и выполнено условие высокой интенсивности обслуживания* $\frac{a^{\rho-1}}{\lambda} \to 0$, *то при нормировке* $b = (c_U/\varkappa)^{\frac{1}{\delta}} a \lambda^{\frac{1}{\delta}}$ *процесс* $Z_a(t)$, $t \in [0,1]$, *с длительностью обслуживания и расходом ресурса, определенными в начале раздела, сходится к случайной прямой* $t \cdot \mathcal{S}(1,0,\delta)$, *где* $\mathcal{S}(1,0,\delta)$ *– односторонняя строго* δ*-устойчивая случайная величина.*

Литература

1. I. Kaj, M. S. Taqqu, *Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach.* — In and Out of Equilibrium 2, Ser. Progress in Probability **60** (2008), 383–427. Birkhäuser Basel.
2. M. Lifshits, *Random Processes by Example.* World Scientific, Sigapure, 2014.
3. К. А. Аксенова, *О стохастических моделях телетрафика с тяжёлыми хвостами распределений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **384** (2010).
4. Е. С. Гарай, *О предельной теореме в некоторых системах обслуживания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **431** (2014), 56–71.
5. Д. В. Астахова, *Вероятности больших уклонений в стохастических моделях телетрафика.* Дипломная работа, СПбГУ, 2011.

Kosarevskaya E. S. On stochastic models of service system with dependent process characteristics.

We consider a generalization of a service system model introduced by I. Kaj and M. Taqqu. Unlike their setting, we drop the unnatural assumption of independence between the duration and required resources quantity of a service process. We present a number of limit theorems for the process of integral workload. Wiener process, Fractional Brownian motion, or Stable Lévy process may show up as the limits.

С.-Петербургский
государственный университет
ул. Ульяновская 3,
Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kosarevskaja@gmail.com

Поступило 20 октября 2014 г.