Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

Ю. С. Елисеева[1,2], **А. Ю. Зайцев**[1,3]

О ПРОБЛЕМЕ ЛИТТЛВУДА–ОФФОРДА

Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$, где $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kd}) \in \mathbf{R}^d$, $k = 1, \dots, n$. Под функцией концентрации случайного $\mathbf{R}^d$-значного вектора Y с распределением $F = \mathcal{L}(Y)$ будем понимать

$$Q(F, \lambda) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \mathbf{P}(Y \in x + \lambda B), \quad \lambda \geqslant 0,$$

где $B = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leqslant 1/2\}$. Нас будет интересовать поведение функции концентрации суммы $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k a_k$ в зависимости от свойств векторов a_k. В последнее время интерес к этому вопросу значительно возрос в связи с изучением распределений собственных чисел случайных матриц (см., например, [9, 13, 16–20]). Подробную историю вопроса можно найти в недавнем обзоре Нгуена и Ву [14]. Авторы упомянутых выше статей (см. также [10, 12]) называют этот вопрос проблемой Литтлвуда–Оффорда, так как впервые рассмотрением этой проблемы занимались в 1943 году Литтлвуд и Оффорд [12] в связи с изучением случайных полиномов. Они рассматривали частный случай, когда коэффициенты $a_k \in \mathbf{R}$ одномерны, а величина X принимает значения ± 1 с вероятностями $1/2$.

Введем некоторые обозначения. В дальнейшем F_a – распределение суммы $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k\, a_k$, E_y – вероятностная мера, сосредоточенная в точке y, а G – распределение случайной величины $\widetilde{X}$, где $\widetilde{X} = X_1 - X_2$ – симметризованная случайная величина.

Ключевые слова: функции концентрации, неравенства, проблема Литтлвуда–Оффорда, суммы независимых случайных величин.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 13-01-00256 и НШ-2504.2014.1.

[2]Работа поддержана Лабораторией им. П.Л. Чебышева СПбГУ (грант Правительства РФ 11.G34.31.0026) и грантом НИР СПбГУ 6.38.672.2013.

[3]Работа поддержана Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Одной и той же буквой c мы будем обозначать положительные абсолютные постоянные, которые могут быть различными даже в пределах одной формулы. Запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leqslant cB$. Будем также писать $A \asymp B$, если $A \ll B$ и $B \ll A$. Будем писать $A \ll_d B$, если $|A| \leqslant c(d)B$, где $c(d) > 0$ зависит только от d. Аналогично, $A \asymp_d B$, если $A \ll_d B$ и $B \ll_d A$. Скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$ обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В дальнейшем $\lfloor x \rfloor$ – наибольшее целое число $k < x$. Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ будут использоваться нормы $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ и $|x| = \max_j |x_j|$. Мы будем обозначать $\widehat{F}(t)$, $t \in \mathbf{R}^d$, характеристическую функцию d-мерного вероятностного распределения F.

Произведения и степени мер понимаются в смысле свертки. Для безгранично делимого распределения F через F^λ, $\lambda \geqslant 0$, будем обозначать безгранично делимое распределение с характеристической функцией $\widehat{F}^\lambda(t)$.

Простейшие свойства функций концентрации хорошо изучены (см., например, [3, 11, 15]). Известно, что

$$Q(F, \mu) \ll_d (1 + \lfloor \mu/\lambda \rfloor)^d \, Q(F, \lambda) \tag{1}$$

для любых $\mu, \lambda > 0$. Следовательно,

$$Q(F, c\lambda) \asymp_d Q(F, \lambda). \tag{2}$$

Сформулируем обобщение классического неравенства Эссеена [7] на многомерный случай [8], см. также [11]:

Лемма 1. *Пусть $\tau > 0$ и F – некоторое d-мерное вероятностное распределение. Тогда*

$$Q(F, \tau) \ll_d \tau^d \int\limits_{|t| \leqslant 1/\tau} |\widehat{F}(t)| \, dt. \tag{3}$$

В общем случае функция концентрации $Q(F, \tau)$ не может быть оценена снизу правой частью неравенства (3). Однако если дополнительно предположить, что распределение F симметрично и его характеристическая функция неотрицательна при всех $t \in \mathbf{R}$, то

$$Q(F, \tau) \gg_d \tau^d \int\limits_{|t| \leqslant 1/\tau} |\widehat{F}(t)| \, dt, \tag{4}$$

и, следовательно,

$$Q(F,\tau) \asymp_d \tau^d \int\limits_{|t|\leqslant 1/\tau} |\widehat{F}(t)|\,dt, \tag{5}$$

(см. [1] или [3], лемма 1.5 гл. II при $d = 1$). В многомерном случае соотношения (4) и (5) получены в работе [21], см. также [4]. Именно использование соотношения (5) позволило нам упростить рассуждения, которые применялись для оценивания функций концентрации при рассмотрении проблемы Литтлвуда–Оффорда в работах [9, 17] и [20] (см. [4, 5] и [6]).

Основной результат данной работы представляет собой общее неравенство, сводящее оценивание функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда к оцениванию функций концентрации некоторых безгранично делимых распределений. Этот результат сформулирован в теореме 1.

Для $z \in \mathbf{R}$ рассмотрим зависящее от вектора a распределение H_z с характеристической функцией

$$\widehat{H}_z(t) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(1-\cos(\langle t, a_k\rangle z)\big)\Big). \tag{6}$$

Ясно, что H_z – симметричное безгранично делимое рапределение. Поэтому соответствующая ему характеристическая функция положительна при всех $t \in \mathbf{R}^d$.

Теорема 1. *Пусть V – произвольная d-мерная борелевская мера, такая что $\lambda = V\{\mathbf{R}\} > 0$ и $V \leqslant G$, то есть $V\{B\} \leqslant G\{B\}$ для любого борелевского множества B. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$ справедливо неравенство*

$$Q(F_a,\tau) \ll_d Q(H_1^\lambda,\varepsilon)\,\exp\Big(d\int\limits_{z\in\mathbf{R}} \log\big(1+\lfloor\tau(\varepsilon|z|)^{-1}\rfloor\big)\,F\{dz\}\Big), \tag{7}$$

где $F = \lambda^{-1}V$.

Заметим, что $\log\big(1+\lfloor\tau(\varepsilon|z|)^{-1}\rfloor\big) = 0$ при $|z| \geqslant \tau/\varepsilon$. Поэтому интегрирование в (7) проводится фактически только по множеству $\big\{z : |z| < \tau/\varepsilon\big\}$.

Следствие 1. *Пусть $\delta > 0$ и*

$$p(\delta) = G\big\{\{z : |z| \geqslant \delta\}\big\} > 0. \tag{8}$$

Тогда для любых $\varepsilon, \tau > 0$ *имеем*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d e^{\Delta} Q(H_1^{p(\delta)}, \varepsilon), \tag{9}$$

где

$$\Delta = \Delta(\tau, \varepsilon, \delta) = \frac{d}{p(\delta)} \int\limits_{|z| \geqslant \delta} \log\left(1 + \lfloor \tau(\varepsilon|z|)^{-1} \rfloor\right) G\{dz\}. \tag{10}$$

В частности, выбирая $\delta = \tau/\varepsilon$, получим

Следствие 2. *Для любых* $\varepsilon, \tau > 0$ *имеем*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d Q(H_1^{p(\tau/\varepsilon)}, \varepsilon). \tag{11}$$

Именно утверждение следствия 2 (обычно при $\tau = \varepsilon$) фактически является стартовой точкой почти во всех современных исследованиях по проблеме Литтлвуда–Оффорда (см., например, [9], [10], [13], [16], [17] и [20]). Точнее, в упомянутых выше работах с помощью леммы 1 или ее аналогов получаются оценки типа

$$Q(F_a, \tau) \ll_d \sup_{z \geqslant \tau/\varepsilon} \tau^d \int\limits_{|t| \leqslant 1/\tau} \widehat{H}_z^{p(\tau/\varepsilon)}(t)\, dt. \tag{12}$$

То, что из (1) и (5) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{z \geqslant \tau/\varepsilon} \tau^d \int\limits_{|t| \leqslant 1/\tau} \widehat{H}_z^{p(\tau/\varepsilon)}(t)\, dt &\asymp_d \sup_{z \geqslant \tau/\varepsilon} Q\big(H_z^{p(\tau/\varepsilon)}, \tau\big) \\ &= \sup_{z \geqslant \tau/\varepsilon} Q\big(H_1^{p(\tau/\varepsilon)}, \tau/z\big) = Q\big(H_1^{p(\tau/\varepsilon)}, \varepsilon\big), \end{aligned} \tag{13}$$

осталось, по-видимому, незамеченным авторами указанных работ, что значительно затрудняло дальнейшее оценивание правой части неравенства (12).

Выбирая V так, что

$$V\{dz\} = \big(\max\big\{1, \log\big(1 + \lfloor \tau(\varepsilon|z|)^{-1} \rfloor\big)\big\}\big)^{-1} G\{dz\}, \tag{14}$$

получим

Следствие 3. *Для любых* $\varepsilon, \tau > 0$ *имеем*

$$Q(F_a, \tau) \ll_d Q(H_1^{\lambda}, \varepsilon) \exp\big(d\lambda^{-1} G\big\{\{z : |z| < \tau/\varepsilon\}\big\}\big), \tag{15}$$

где

$$\lambda = \lambda(G, \tau/\varepsilon) = V\{\mathbf{R}\} \\ = \int\limits_{z\in\mathbf{R}} \left(\max\left\{1, \log\left(1 + \lfloor \tau(\varepsilon|z|)^{-1} \rfloor\right)\right\}\right)^{-1} G\{dz\}. \tag{16}$$

В следствиях 1–3 мы берем меру V в виде $V\{dz\} = f(z)\,G\{dz\}$ с $0 \leqslant f(z) \leqslant 1$. Выбор оптимальной функции f, минимизирующей правые части неравенств (9), (11) и (15), представляет собой сложную задачу. Ясно, что ее решение зависит от a и G. При этом достаточно рассматривать только неубывающие функции f.

Чем больше λ при фиксированном ε, тем меньше величина $Q(H_1^\lambda, \varepsilon)$. Теорему 1 можно применять при $V = G$. Тогда $\lambda = 1$. Это – максимальное возможное значение λ. Однако интеграл в правой части неравенства (7) может в этом случае разойтись. В частности, он расходится, если распределение G имеет ненулевой атом в нуле. Этот атом в любом случае должен быть исключен при построении меры V, если мы рассчитываем получить содержательную оценку для $Q(F_a, \tau)$. При фиксированной мере V и при уменьшении ε уменьшается величина $Q(H_1^\lambda, \varepsilon)$, но растет интеграл в правой части неравенства (7).

В следствии 3 мы использовали меру V, определенную в (14) таким образом, чтобы интеграл в правой части неравенства (7) сходился всегда, какова бы ни была мера G.

Доказательство теоремы 1 основано на элементарных свойствах функций концентрации, оно будет приведено ниже. Заметим, что H_1^λ – безгранично делимое распределение со спектральной мерой Леви $M_\lambda = \frac{\lambda}{4}\, M^*$, где $M^* = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(E_{a_k} + E_{-a_k}\right)$. Ясно, что утверждения теоремы 1 и следствий 1–3 сводят проблему Литтлвуда–Оффорда к изучению меры M^*, однозначно соответствующей вектору a. На самом деле почти все результаты, полученные при решении этой проблемы, формулируются в терминах коэффициентов a_j или, что эквивалентно, в терминах свойств меры M^*. Иногда это приводит к потере информации о распределении случайной величины X, которая может помочь при получении более точных оценок. В частности, если $\mathcal{L}(X)$ – стандартное нормальное распределение, то F_a – гауссовское распределение с нулевым средним и легко вычисляемым ковариационным оператором. Таким образом, бывают ситуации, в которых можно получить

оценки для $Q(F_a, \tau)$, которые не следуют из результатов, сформулированных в терминах меры M^*.

Заметим, что из теоремы 1 с использованием результатов Арака [1, 2] (см. также [3]) можно вывести оценки, аналогичные оценкам функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда, которые были получены в недавней работе Нгуена и Ву [13] (см. также [14]). Подробному обсуждению этого факта будет посвящена готовящаяся к публикации совместная статья авторов и Фридриха Гётце. В этой же статье будут даны доказательства многомерных аналогов результатов Арака [1]. Ниже, в теоремах 2 и 3, мы приведем без доказательства формулировки этих результатов и заметим, что в них демонстрируется связь между степенью малости функции концентрации суммы и арифметической структурой носителей распределений независимых случайных векторов для *произвольных* распределений слагаемых в отличие от результатов работ [9, 13, 16–20], в которых аналогичная связь была обнаружена в частном случае слагаемых с распределениями, возникающими в проблеме Литтлвуда–Оффорда.

Нам потребуются некоторые обозначения. Пусть $\mathbf{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел. Для любых $r \in \mathbf{Z}_+$ и $u = (u_1, \dots, u_r) \in (\mathbf{R}^d)^r$, $u_j \in \mathbf{R}^d$, $j = 1, \dots, r$, определим множество

$$K_1(u) = \Big\{ \sum_{j=1}^{r} n_j u_j : n_j \in \{-1, 0, 1\} \text{ при } j = 1, \dots, r \Big\}. \tag{17}$$

Далее обозначим через $[B]_\tau$ замкнутую τ-окрестность множества B в смысле нормы $|\cdot|$.

Теорема 2. *Пусть $\tau \geqslant 0$, F_j – d-мерные вероятностные распределения, $j = 1, \dots, n$. Обозначим $\rho = Q\Big(\prod\limits_{j=1}^{n} F_j, \tau\Big)$. Тогда существует $r \in \mathbf{Z}_+$ и векторы $u_1, \dots, u_r; x_1, \dots, x_r \in \mathbf{R}^d$, такие что*

$$r \ll_d |\log \rho| + 1 \tag{18}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} F_j\{\mathbf{R}^d \setminus [K_1(u)]_\tau + x_j\} \ll_d \big(|\log \rho| + 1\big)^3, \tag{19}$$

где $u = (u_1, \dots, u_r) \in (\mathbf{R}^d)^r$, а множество $K_1(u)$ определено в формуле (17).

Теорема 3. *Пусть D – d–мерное безгранично делимое распределение с характеристической функцией вида* $\exp\big\{\alpha(\widehat{M}(t)-1)\big\}$, $t\in\mathbf{R}^d$, *где $\alpha>0$ и M – вероятностное распределение. Пусть $\tau\geqslant 0$ и $\gamma=Q(D,\tau)$. Тогда существует $r\in\mathbf{Z}_+$ и векторы $u_1,\dots,u_r\in\mathbf{R}^d$, такие что*

$$r\ll_d |\log\gamma|+1 \tag{20}$$

и

$$\alpha\, M\{\mathbf{R}^d\setminus[K_1(u)]_\tau\}\ll_d \big(|\log\gamma|+1\big)^3, \tag{21}$$

где $u=(u_1,\dots,u_r)\in(\mathbf{R}^d)^r$.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что для произвольного вероятностного распределения F и $\lambda,T>0$,

$$\begin{aligned}\log\int\limits_{|t|\leqslant T}\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\big(1-\cos(\langle t,a_k\rangle z)\big)\,\lambda\,F\{dz\}\Big)\,dt\\ \leqslant\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\Big(\log\int\limits_{|t|\leqslant T}\exp\Big(-\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^n\big(1-\cos(\langle t,a_k\rangle z)\big)\Big)\,dt\Big)\,F\{dz\}\\ =\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\Big(\log\int\limits_{|t|\leqslant T}\widehat{H}_z^\lambda(t)\,dt\Big)\,F\{dz\}.\end{aligned} \tag{22}$$

Достаточно доказать (22) для дискретных распределений $F=\sum\limits_{j=1}^\infty p_jE_{z_j}$, где $0\leqslant p_j\leqslant 1$, $z_j\in\mathbf{R}$, $\sum\limits_{j=1}^\infty p_j=1$. Применяя в этом случае неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{|t|\leqslant T}\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\big(1-\cos(\langle t,a_k\rangle z)\big)\,\lambda\,F\{dz\}\Big)\,dt\\ =\int\limits_{|t|\leqslant T}\exp\Big(-\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^\infty p_j\sum_{k=1}^n\big(1-\cos(\langle t,a_k\rangle z_j)\big)\Big)\,dt\\ \leqslant\prod_{j=1}^\infty\Big(\int\limits_{|t|\leqslant T}\exp\Big(-\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^n\big(1-\cos(\langle t,a_k\rangle z_j)\big)\Big)\,dt\Big)^{p_j}.\end{aligned} \tag{23}$$

Беря логарифм от обеих частей соотношения (23), получим (22). В общем случае мы можем аппроксимировать распределение F дискретными распределениями в смысле слабой сходимости и перейти к пределу. Мы пользуемся тем, что слабая сходимость вероятностных распределений эквивалентна сходимости характеристических функций, которая равномерна на ограниченных множествах. Кроме того, слабая сходимость симметричных безгранично делимых распределений эквивалентна слабой сходимости соответствующих спектральных мер. Заметим также,что интегралы $\int\limits_{|t|\leqslant T}$ в (22) можно заменить на интегралы $\int\limits_{t\in B}$ по произвольному борелевскому множеству B.

Так как для любой характеристической функции $\widehat{W}(t)$ случайного вектора Y справедливо равенство

$$|\widehat{W}(t)|^2 = \mathbf{E}\exp(i\langle t,\widetilde{Y}\rangle) = \mathbf{E}\cos(\langle t,\widetilde{Y}\rangle),$$

где $\widetilde{Y}$ – соответствующий симметризованный случайный вектор, то

$$|\widehat{W}(t)| \leqslant \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(1-|\widehat{W}(t)|^2\big)\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathbf{E}\,\big(1-\cos(\langle t,\widetilde{Y}\rangle)\big)\Big). \quad (24)$$

В силу теоремы 1 и соотношений $V = \lambda F \leqslant G$, (22) и (24), имеем

$$\begin{aligned}
Q(F_a,\tau) &\ll_d \tau^d \int\limits_{\tau|t|\leqslant 1} |\widehat{F}_a(t)|\,dt \\
&\ll_d \tau^d \int\limits_{\tau|t|\leqslant 1} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\big(1-\cos(\langle t,a_k\rangle\,\widetilde{X})\big)\Big)\,dt \\
&= \tau^d \int\limits_{\tau|t|\leqslant 1} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\big(1-\cos(\langle t,a_k\rangle\,z)\big)\,G\{dz\}\Big)\,dt \\
&\leqslant \tau^d \int\limits_{\tau|t|\leqslant 1} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\big(1-\cos(\langle t,a_k\rangle\,z)\big)\,\lambda\,F\{dz\}\Big)\,dt \\
&\leqslant \exp\Big(\int\limits_{z\in\mathbf{R}}\log\Big(\tau^d\int\limits_{\tau|t|\leqslant 1}\widehat{H}_z^{\lambda}(t)\,dt\Big)\,F\{dz\}\Big). \qquad (25)
\end{aligned}$$

Учитывая (1) и (5), имеем

$$\tau^d \int\limits_{\tau|t|\leqslant 1} \widehat{H}_z^\lambda(t)\,dt \asymp_d Q(H_z^\lambda,\tau) = Q\big(H_1^\lambda,\tau|z|^{-1}\big)$$
$$\leqslant \big(1+\lfloor\tau(\varepsilon|z|)^{-1}\rfloor\big)^d Q(H_1^\lambda,\varepsilon). \tag{26}$$

Подставляя эту оценку в формулу (25), получим (7). □

Литература

1. Т. В. Арак, *О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами.* — Теория вероятн. и ее примен. **25** (1980), 225–246.
2. Т. В. Арак, *О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I.* — Теория вероятн. и ее примен. **26** (1981), 225–245.
3. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986), 214 с.
4. Ю. С. Елисеева, *Многомерные оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **412** (2013), 121–137.
5. Ю. С. Елисеева, Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, *Оценки функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 50–69.
6. Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев, *Оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **57** (2012), 768–777.
7. C.-G. Esséen, *On the Kolmogorov–Rogozin inequality for the concentration function.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **5** (1966), 210–216.
8. C.-G. Esséen, *On the concentration function of a sum of independent random variables.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **9** (1968), 290–308.
9. O. Friedland, S. Sodin, *Bounds on the concentration function in terms of Diophantine approximation.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345** (2007), 513–518.
10. G. Halász, *Estimates for the concentration function of combinatorial number theory and probability.* — Periodica Mathematica Hungarica **8** (1977), 197–211.
11. В. Хенгартнер, Р. Теодореску, *Функции концентрации.* Наука, М., 1980.
12. J. E. Littlewood, A. C. Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation.* — Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **12** (1943), 277–286.
13. H. Nguyen, V. Vu, *Optimal inverse Littlewood–Offord theorems.* — Adv. Math. **226** (2011), 5298–5319.
14. H. Nguyen, V. Vu, *Small probabilities, inverse theorems and applications.* — arXiv:1301.0019 (2013).
15. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М., 1972.
16. M. Rudelson, R. Vershynin, *The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices.* — Adv. Math. **218** (2008), 600–633.

17. M. Rudelson, R. Vershynin, *The smallest singular value of a random rectangular matrix.* — Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1707–1739.
18. T. Tao, V. Vu, *Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices.* — Ann. Math. **169** (2009), 595–632.
19. T. Tao, V. Vu, *From the Littlewood–Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices.* — Bull. Amer. Math. Soc. **46** (2009), 377–396.
20. R. Vershynin, *Invertibility of symmetric random matrices.* — Random Structures Algorithms **44** (2014), 135–182.
21. А. Ю. Зайцев, *К многомерному обобщению метода треугольных функций.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **158** (1987), 81–104.

Eliseeva Yu. S., Zaitsev A. Yu. On the Littlewood–Offord problem.

The paper deals with studying a connection of the Littlewood–Offord problem with estimating the concentration functions of some symmetric infinitely divisible distributions. Some multivariate generalizations of results of Arak (1980) are given. They show a connection of the concentration function of the sum with the arithmetic structure of supports of distributions of independent random vectors for arbitrary distributions of summands.

Поступило 18 ноября 2014 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
и Лаборатория им. П.Л. Чебышева СПбГУ
E-mail: pochta106@yandex.ru

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru