Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

Е. С. Гарай

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ

§1. Введение

В последнее десятилетие стало актуальным математическое моделирование работы компьютерных систем на базе высокоскоростного соединения, таких как интернет. В статье рассматривается обобщение одного результата из работы [6], посвященного математическим моделям, которые описывают динамику во времени системы нагрузок, создаваемой потоком вызовов. Наиболее интересные результаты об изучаемых моделях можно найти в работах [4–12].

Предполагается, что ресурс системы обслуживания бесконечен, т.е. при ее функционировании не возникает очередей и отказов. Начальные моменты обслуживания поступающих вызовов (заявок) представляют собой пуассоновский поток на временной оси. Каждое обслуживание длится случайный отрезок времени и включается в общую нагрузку. В компьютерных системах обслуживание может происходить в разных скоростных режимах. Для учета этого обстоятельства вводится случайная величина, характеризующая ресурс, потребляемый в течение периода обслуживания.

Модель, в которой в течение обслуживания вызова происходит потребление ресурса дискретными квантами, называется дискретной. Нас интересует именно такая модель. В дискретной модели сумма потребленных ресурсов в ходе обслуживания одного вызова имеет сложное распределение Пуассона. Отметим, что длительность и потребляемый ресурс независимы как при обслуживании одного вызова, так и при обслуживании разных вызовов. Объектом нашего изучения будет суммарная нагрузка на систему, которая выражается в терминах интеграла по пуассоновской мере. Интегральный подход позволяет понять предельное поведение модели на больших интервалах времени и приводит к удачному представлению предельных процессов.

Ключевые слова: системы обслуживания, предельная теорема, дробное броуновское движение.

Предельные теоремы для процессов нагрузки естественно доказывать в соответствующих функциональных пространствах. Для этого требуется установить сходимость конечномерных распределений процесса нагрузки (это уже сделано для рассматриваемого нами процесса в работе [6]) и обосновать плотность семейства распределений.

§2. Описание математической модели

Рассмотрим систему потока вызовов с одним типом ресурса. Будем считать, что ресурс бесконечен. Также полагаем, что время нахождения абонента в системе и занимаемый им ресурс независимы. Введем следующие обозначения: S – момент поступления вызова; U – длительность обслуживания вызова; R – ресурс, занимаемый вызовом.

Процесс поступления вызовов описывается пуассоновским случайным потоком интенсивности $\lambda > 0$ на всей вещественной прямой. Моменты поступления вызова будем обозначать $\dots S_j, S_{j+1}, \dots$.

Продолжительность обслуживания вызова будем представлять как случайную величину $U > 0$ с функцией распределения $F_U(u)$ и математическим ожиданием $\mathbf{E}U < \infty$. Далее полагаем, что $\mathbf{E}U^2 < \infty$ или $P(U \geqslant u) \sim\ L_U(u)u^{-\gamma}/\gamma$ при $u \to \infty$, где $\gamma \in (1; 2)$, L_U – медленно меняющаяся функция. Запись $\gamma = 2$ формально означает, что $\mathbf{E}U^2 < \infty$.

Обозначим ресурс, потребляемый в течение обслуживания одного вызова, с помощью случайной величины $R > 0$ с функцией распределения $F_R(r)$ и $\mathbf{E}R < \infty$. Имеем $\mathbf{E}R^2 < \infty$ или $P(R \geqslant r) \sim\ L_R(r)r^{-\delta}/\delta$ при $r \to \infty$, где $\delta \in (1; 2)$, L_R – медленно меняющаяся функция. Запись $\delta = 2$ формально означает, что $\mathbf{E}R^2 < \infty$. Заметим, что суммарная нагрузка на систему от одного вызова равна произведению UR.

В дискретной модели потребление ресурса на интервале обслуживания происходит дискретными порциями, в моменты скачков стандартного пуассоновского процесса $\{M(v), v \geqslant 0\}$ интенсивности 1. Нагрузка на систему от одного процесса обслуживания в этой модели есть сложный пуассоновский процесс $\xi(v) := \sum\limits_{i=1}^{M(v)} R_i$, $v \geqslant 0$, где R_i – независимые одинаково распределенные величины с функцией распределения $F_R(dr)$. Для простоты изложения в дальнейшем положим $L_U = L_R = 1$.

Эта модель описывает результаты, получающиеся при композиции двух пуассоновских мер. Ее отличительной особенностью является дискретный режим потребления ресурса.

Траектории процесса ξ представляют собой функции $v \mapsto \xi(v)$, $v \geqslant 0$, которые мы будем рассматривать как элементы пространства Скорохода $D = D[0, \infty)$.

Пусть μ – распределение ξ в D, а $N_\sharp(ds, du, d\xi)$ – пуассоновская мера на $R \times R_+ \times D$ с интенсивностью

$$n_\sharp(ds, du, d\xi) = \lambda\, ds F_U(du)\mu(d\xi).$$

Пуассоновское точечное событие (s, u, ξ) соответствует обслуживанию вызова, поступившего в момент времени s, длительности u и общей нагрузкой ξ. Длина отрезка времени на интервале $[0, t]$, в течение которого производится обслуживание вызова, задается с помощью функции

$$K_t(s,u) := \big|[s, s+u] \cap [0,t]\big| = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad s+u \leqslant 0 \\ s+u, & \text{при} \quad 0 < s+u \leqslant t, \ s \leqslant 0 \\ t, & \text{при} \quad s+u > t, \ s \leqslant 0 \\ u, & \text{при} \quad u < t-s, \ s > 0 \\ t-s, & \text{при} \quad t-s < u, \ s > 0 \end{cases}$$
$$= (t-s)_+ \wedge (u - (-s)_+) \wedge u. \tag{1}$$

Следовательно, результирующая нагрузка будет равна $\xi(K_t(s,u))$. Таким образом, интегральная нагрузка W^*_λ в дискретной модели имеет следующее представление:

$$W^*_{\sharp,\lambda}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_D \xi(K_t(s,u))\, N_\sharp(ds, du, d\xi). \tag{2}$$

Очевидно,

$$\mathbf{E}\xi(t) = \mathbf{E}M(t)\, \mathbf{E}R = t\, \mathbf{E}R, \tag{3}$$

и

$$\mathbf{E}W^*_{\sharp,\lambda}(t) = \lambda\, t\, \mathbf{E}U\mathbf{E}R. \tag{4}$$

Тогда

$$W^*_{\sharp,\lambda}(t) = \lambda\, t\, \mathbf{E}U\mathbf{E}R + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_D \xi(K_t(s,u))\, \widetilde{N}_\sharp(ds, du, d\xi), \tag{5}$$

где $\widetilde{N}_\sharp(ds, du, d\xi) = N_\sharp(ds, du, d\xi) - n_\sharp(ds, du, d\xi)$ – центрированная пуассоновская мера.

Имеет место следующий результат.

Лемма 2.1. *В дискретной модели процесс* $\{W^*_{\sharp,\lambda}(t),\ t \geqslant 0\}$ *имеет стационарные приращения.*

§3. Предельная теорема

Будем рассматривать нагрузку, которая появляется при увеличении времени работы системы в a раз и изменении интенсивности потока вызовов.

Колебания нагрузки в системе выражается через нагрузку, центрированную около среднего значения. Мы расширим временную шкалу, введя множитель a, и одновременно нормируем нагрузку множителем b. Такое масштабирование для дискретной модели приводит к процессу

$$V_{a,b,\lambda}(t) := \frac{1}{b}\left(W^*_{\sharp,\lambda}(at) - \lambda\, at\, \mathbf{E}U\mathbf{E}R\right)$$

$$= \frac{1}{b}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{D} \xi(K_{at}(s,u))\, \widetilde{N}_\sharp(ds,du,d\xi), \qquad t \geqslant 0. \tag{6}$$

Функция $K_t(s,u)$ обладает следующим свойством самоподобия:

$$K_{at}(as,au) = a\,K_t(s,u), \tag{7}$$

которое приводит к следующему выражению:

$$\frac{1}{b}(W^*_{\sharp,\lambda}(at) - \lambda\, at\mathbf{E}U\mathbf{E}R) \overset{d}{=} \frac{1}{b}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{D}\xi(aK_t(s,u))\, \widetilde{N}_\sharp(ads,adu,d\xi). \tag{8}$$

Рассматривается поведение процесса нагрузки при $a \to \infty$, $b \to \infty$ и $\lambda \to \infty$.

Рассмотрим вызовы, находящиеся на обслуживании в системе в момент времени 0 (или любой другой фиксированный момент). Можно показать, что количество таких вызовов имеет пуассоновское распределение с математическим ожиданием $\lambda\,\mathbf{E}U$. При этом моменты времени, оставшиеся до окончания обслуживания этих вызовов, можно считать независимыми величинами $\widetilde{U}$, каждая из которых имеет распределение с хвостом

$$P(\widetilde{U} > u) = \frac{1}{\mathbf{E}U} \int\limits_u^\infty P(U > v)dv.$$

Пусть

$$\sharp(\lambda, a) := \sum_{i=1}^M 1_{\{\widetilde{U}_i > a\}}$$

– число вызовов, находящихся в системе на интервале $[0, a]$. Математическое ожидание

$$\mathbf{E}(\sharp(\lambda, a)) = \lambda\, \mathbf{E}UP(\widetilde{U} > a) \sim \frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \tag{9}$$

характеризует количество очень продолжительных вызовов и дает представление об их вкладе в общую нагрузку. Рассмотрим режим работы системы, когда $\lambda/a^{\gamma-1} \to \infty$.

Теорема 3.1. *Пусть* $1 < \gamma < 2$, $b = \lambda^{1/2}a^{(3-\gamma)/2}$ *и*

$$\lambda \to \infty, \quad a \to \infty, \quad \lambda/a^{\gamma-1} \to \infty. \tag{10}$$

Пусть распределение потребляемого ресурса R *имеет конечную дисперсию.*

Тогда случайный процесс $V_{a,b,\lambda}$, *определенный в* (6), *слабо сходится в пространстве Скорохода* $D[0,1]$ *к дробному броуновскому движению*

$$\mathbf{E}^{1/2}R^2\, \sigma\, B_H(t), \quad t \geqslant 0,$$

с параметром

$$H = (3-\gamma)/2 \in\ (1/2, 1)$$

и масштабным множителем

$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_0^\infty K_t^2(s,u)\ ds\, u^{-(\gamma+1)}du = \frac{1}{(2-\gamma)(3-\gamma)}. \tag{11}$$

Доказательство. Сходимость конечномерных распределений процесса $X_{a,b,\lambda}$ доказана в теореме 2 работы [6].

Таким образом, достаточно доказать плотность семейства процессов $X_{a,b,\lambda}$ в пространстве Скорохода $D[0,1]$. Для этого достаточно (см. [1], с. 179) доказать, что

$$\mathbf{E}\, |V_{a,b,\lambda}(t) - V_{a,b,\lambda}(t_1)|^q\, |V_{a,b,\lambda}(t_2) - V_{a,b,\lambda}(t)|^q \leqslant |F(t_2) - F(t_1)|^\alpha \tag{12}$$

при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, где $\{V_{a,b,\lambda}\}$ – семейство случайных элементов в $D[0,1]$, а $F(t)$ – неубывающая непрерывная функция на $[0,1]$, $q \geqslant 0$, $\alpha > 1$. Проверим выполнение условия (12) для рассматриваемого семейства процессов и $F(t) = t$. Зафиксируем $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ на интервале $[0;1]$ и положим $\Delta := t_2 - t_1$, $\Delta_1 := t - t_1$, $\Delta_2 := t_2 - t$. Представим нагрузку, приходящуюся на интервал $a\Delta$, в виде суммы нагрузок на интервалах $a\Delta_1$ и $a\Delta_2$. Отметим, что нагрузки, приходящиеся на интервалы $a\Delta_1$ и $a\Delta_2$, зависимы, так как присутствуют обслуживания, начинающиеся в одном интервале и заканчивающиеся в другом. В связи с этим, представим суммарную нагрузку на каждом интервале в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&b(V_{a,b,\lambda}(at) - V_{a,b,\lambda}(at_1)) \\
&= \int\limits_{at_1-u}^{at-u} \int\limits_0^\infty \int\limits_D (\xi(K_{at}(s,u)) - \xi(K_{at_1}(s,u)))\ \widetilde{N}_\sharp(ds,du,d\xi) \\
&+ \int\limits_{at-u}^{at} \int\limits_0^\infty \int\limits_D (\xi(K_{at}(s,u)) - \xi(K_{at_1}(s,u)))\ \widetilde{N}_\sharp(ds,du,d\xi) \\
&:= X_1 + X_2,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&b(V_{a,b,\lambda}(at_2) - V_{a,b,\lambda}(at)) \\
&= \int\limits_{at-u}^{at} \int\limits_0^\infty \int\limits_D (\xi(K_{at_2}(s,u)) - \xi(K_{at}(s,u)))\ \widetilde{N}_\sharp(ds,du,d\xi) \\
&+ \int\limits_{at}^{at_2} \int\limits_0^\infty \int\limits_D (\xi(K_{at_2}(s,u)) - \xi(K_{at}(s,u)))\ \widetilde{N}_\sharp(ds,du,d\xi) \\
&:= Y_1 + Y_2.
\end{aligned} \tag{14}$$

При таком представлении зависимыми оказываются только второе слагаемое в (13) и первое слагаемое в (14) как интегралы по пересекающимся множествам пуассоновской меры.

Теперь скажем несколько слов об аргументе подынтегральной функции. Как и ранее, рассмотрим выражения

$$K_{at}(s,u) - K_{av}(s,u) = |[s,s+u] \cap [av,at]|, \qquad v < t,$$
$$K_{at}(s,u) - K_{av}(s,u) = |[s,s+u] \cap [at,av]|, \qquad t < v,$$

которые не равны нулю при $s \in [av-u, at]$ или $s \in [at-u, av]$ соответственно, и длины указанных интервалов не превосходят $2\max(u, a|t-v|)$. Очевидно, что

$$|K_{at}(s,u) - K_{av}(s,u)| \leqslant \min(u, a|t-v|),$$

и распределение F_U удовлетворяет условию

$$F_U(du) \leqslant Cu^{-(1+\gamma)}du.$$

Для проверки условия (12) возьмем $q = 2$. С учетом представления (13) и (14) и центрированности меры $\widetilde{N}_\sharp$ получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\ \frac{1}{b^4}\ |V_{a,b,\lambda}(at) - V_{a,b,\lambda}(at_1)|^2\, |V_{a,b,\lambda}(at_2) - V_{a,b,\lambda}(at)|^2 \\
&= \frac{1}{b^4}\,\mathbf{E}(X_1+X_2)^2(Y_1+Y_2)^2 \\
&\leqslant \frac{1}{b^4}\ \bigl(\mathbf{E}(X_1^2+X_2^2)\,\mathbf{E}(Y_1^2+Y_2^2) + \mathbf{E}X_2^2Y_1^2\bigr)\,. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в (15). Положим

$$\Delta_{a,t,v}(s,u) := \xi(K_{at}(s,u)) - \xi(K_{av}(s,u)).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X_1^2 &= \mathbf{E}\left(\int\limits_{at_1-u}^{at-u}\int\limits_0^\infty\int\limits_D \Delta_{a,t,t_1}(s,u)\,\widetilde{N}_\sharp(ds,du,d\xi)\right)^2 \\
&= \int\limits_{at_1-u}^{at-u}\int\limits_0^\infty\int\limits_D \Delta^2_{a,t,t_1}(s,u)\,n_\sharp(ds,du,d\xi) \\
&= \int\limits_{at_1-u}^{at-u}\lambda ds\int\limits_0^\infty F_U(du)\int\limits_D \Delta^2_{a,t,t_1}(s,u)\,\mu(d\xi) \\
&= \mathbf{E}\Delta^2_{a,t,t_1}(s,u)\int\limits_{at_1-u}^{at-u}\lambda ds\int\limits_0^\infty F_U(du) \\
&= \mathbf{E}\xi^2\bigl(K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u)\bigr)\int\limits_{at_1-u}^{at-u}\lambda ds\int\limits_0^\infty F_U(du). \qquad (16)
\end{aligned}$$

Воспользовавшись определением процесса $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, и свойствами условного математического ожидания, придем к равенству

$$\mathbf{E}\xi^2(t) = \mathbf{E}R^2\, t + (\mathbf{E}R)^2\, t^2. \tag{17}$$

Продолжим вычисление, принимая во внимание (17).

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X_1^2 = &\int\limits_{at_1-u}^{at-u} \lambda ds \int\limits_0^{\infty} \Big(\mathbf{E}R^2\,(K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u)) \\
&+ \mathbf{E}^2 R\,(K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u))^2\Big)\, F_U(du) \\
&= \mathbf{E}R^2 \int\limits_{at_1-u}^{at-u} \lambda ds \int\limits_0^{\infty} (K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u))\; F_U(du) \\
&+ \mathbf{E}^2 R \int\limits_{at_1-u}^{at-u} \lambda ds \int\limits_0^{\infty} (K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u))^2\; F_U(du).
\end{aligned} \tag{18}$$

Оценим первое слагаемое в (18):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}R^2 \int\limits_{at_1-u}^{at-u} \lambda ds \int\limits_0^{\infty} (K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u))\; F_U(du) \\
&\leqslant 2\lambda\, \mathbf{E}R^2 \int\limits_0^{\infty} \max(u, a\Delta_1)\, \min(u, a\Delta_1)\, F_U(du) \\
&= 2\lambda\, \mathbf{E}R^2\, (a\Delta_1) \int\limits_0^{\infty} u\, F_U(du) = 2\lambda\, \mathbf{E}R^2\, \mathbf{E}U\, (a\Delta_1) \leqslant C_1 \lambda\, (a\Delta).
\end{aligned} \tag{19}$$

Оценим второе слагаемое в (18):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^2 R \int\limits_{at_1-u}^{at-u} \lambda ds \int\limits_0^{\infty} (K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u))^2\; F_U(du) \\
&\qquad \leqslant 2\lambda\, \mathbf{E}^2 R \int\limits_0^{\infty} \max(u, a\Delta_1)\, \min(u^2, (a\Delta_1)^2)\, F_U(du)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\lambda\, \mathbf{E}^2 R \left(\int\limits_0^{a\Delta_1} (a\Delta_1)\, u^2\, F_U(du) + \int\limits_{a\Delta_1}^{\infty} u\, (a\Delta_1)^2\, F_U(du) \right) \\
&\leqslant 2C\lambda\, \mathbf{E}^2 R \left((a\Delta_1) \int\limits_0^{a\Delta_1} u^{1-\gamma}\, du + (a\Delta_1)^2 \int\limits_{a\Delta_1}^{\infty} u^{-\gamma}\, du \right) \\
&= 2C_2\lambda\, \mathbf{E}^2 R\, \left((a\Delta_1)(a\Delta_1)^{2-\gamma} + (a\Delta_1)^2 (a\Delta_1)^{1-\gamma} \right) \\
&= 4C_2\lambda\, \mathbf{E}^2 R\, (a\Delta_1)^{3-\gamma} \leqslant C_3\lambda\, (a\Delta)^{3-\gamma}. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\mathbf{E}X_1^2 \leqslant C_1\lambda\, (a\Delta) + C_3\lambda\, (a\Delta)^{3-\gamma}. \qquad (21)
$$

Если учесть, что $a \to \infty,\ 0 < \Delta < 1,\ 1 < \gamma < 2$, то можно продолжить оценку в (21) и получить следующее:

$$
\mathbf{E}X_1^2 \leqslant C_4\lambda\, a^{3-\gamma}\, \Delta. \qquad (22)
$$

Далее

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X_2^2 &= \mathbf{E} \left(\int\limits_{at-u}^{at} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_D \Delta_{a,t,t_1}(s,u)\, \widetilde{N}_\sharp(ds, du, d\xi) \right)^2 \\
&= \int\limits_{at-u}^{at} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_D \Delta^2_{a,t,t_1}(s,u)\, \lambda ds\, F_U(du) \mu(d\xi).
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание (17), получим

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X_2^2 = &\int\limits_{at-u}^{at} \lambda ds \int\limits_0^{\infty} \Big(\mathbf{E}R^2\, (K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u)) \\
&+ \mathbf{E}^2 R\, (K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u))^2 \Big)\, F_U(du) \\
&= \mathbf{E}R^2 \int\limits_{at-u}^{at} \lambda ds \int\limits_0^{\infty} (K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u))\ F_U(du) \\
&+\ \mathbf{E}^2 R \int\limits_{at-u}^{at} \lambda ds \int\limits_0^{\infty} (K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u))^2\ F_U(du). \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Оценим отдельно каждое слагаемое в (23). Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}R^2 \int\limits_{at-u}^{at} \lambda ds \int\limits_0^\infty \left(K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u)\right) F_U(du) \\
&\leqslant \lambda\,\mathbf{E}R^2 \int\limits_0^\infty u\, \min(u,(a\Delta_1))\, F_U(du) \\
&\leqslant \lambda\,\mathbf{E}R^2 \left((a\Delta_1) \int\limits_0^{a\Delta_1} u\, F_U(du) + (a\Delta_1) \int\limits_{a\Delta_1}^\infty u\, F_U(du) \right) \\
&= \lambda\,\mathbf{E}R^2\,(a\Delta_1) \int\limits_0^\infty u\, F_U(du) = \lambda\,\mathbf{E}R^2\,\mathbf{E}U\,(a\Delta_1) \leqslant C_5\lambda\,(a\Delta) \qquad (24)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^2R \int\limits_{at-u}^{at} \lambda ds \int\limits_0^\infty \left(K_{at}(s,u) - K_{at_1}(s,u)\right)^2 F_U(du) \\
&\leqslant \lambda\,\mathbf{E}^2R \int\limits_0^\infty u\, \min(u^2,(a\Delta_1)^2)\, F_U(du) \\
&= \lambda\,\mathbf{E}^2R \left(\int\limits_0^{a\Delta_1} u\, u^2\, F_U(du) + \int\limits_{a\Delta_1}^\infty u\,(a\Delta_1)^2\, F_U(du) \right) \\
&\leqslant C\lambda\,\mathbf{E}^2R \left((a\Delta_1) \int\limits_0^{a\Delta_1} u^{1-\gamma}\, du + (a\Delta_1)^2 \int\limits_{a\Delta_1}^\infty u^{-\gamma}\, du \right) \\
&= C_6\lambda\,\mathbf{E}^2R\,\left((a\Delta_1)(a\Delta_1)^{2-\gamma} + (a\Delta_1)^2(a\Delta_1)^{1-\gamma}\right) \\
&= 2C_6\lambda\,\mathbf{E}^2R\,(a\Delta_1)^{3-\gamma} \leqslant C_7\lambda\,(a\Delta)^{3-\gamma}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Учтем, что $a \to \infty,\ 0 < \Delta < 1,\ 1 < \gamma < 2$. Тогда

$$\mathbf{E}X_2^2 \leqslant C_5\lambda\,(a\Delta) + C_7\lambda\,(a\Delta)^{3-\gamma} \leqslant C_8\lambda\, a^{3-\gamma}\,\Delta. \qquad (26)$$

Следовательно, с учетом (22) и (26)

$$\mathbf{E}(X_1^2 + X_2^2) = \mathbf{E}X_1^2 + \mathbf{E}X_2^2 \leqslant C_4\lambda\, a^{3-\gamma}\,\Delta + C_8\lambda\, a^{3-\gamma}\,\Delta = C_9\lambda\, a^{3-\gamma}\,\Delta.$$

Аналогично получаем, что

$$\mathbf{E}(Y_1^2 + Y_2^2) = \mathbf{E}Y_1^2 + \mathbf{E}Y_2^2 \leqslant C_{10}\lambda\, a^{3-\gamma}\,\Delta.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}(X_1^2 + X_2^2)\mathbf{E}(Y_1^2 + Y_2^2) \leqslant C_{11}\lambda^2\, a^{2(3-\gamma)}\,\Delta^2. \tag{27}$$

Для оценки второго слагаемого в (15), в котором присутствуют зависимые множители под знаком математического ожидания, нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Пусть* $Z := \int f(x)\,\widetilde{N}(dx)$, $G := \int g(x)\,\widetilde{N}(dx)$, *где* $\widetilde{N}(dx)$ – *центрированная пуассоновская мера с непрерывной мерой контроля* $n(dx)$. *Тогда*

$$\mathbf{E}Z^2G^2 \leqslant 3\int f^2(x)\,n(dx)\int g^2(x)\,n(dx) + \int f^2(x)\,g^2(x)\,n(dx). \tag{28}$$

Доказательство леммы. Рассмотрим центрированные случайные величины с дискретным спектром $Z_n := \sum\limits_{i=1}^m f(x_i)\,\widetilde{N}_i, G_n := \sum\limits_{i=1}^m g(x_i)\,\widetilde{N}_i$, где независимые центрированные пуассоновские величины $\widetilde{N}_i$ имеют интенсивности n_i. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}Z_n^2G_n^2 = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^m f(x_i)\,\widetilde{N}_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^m g(x_i)\,\widetilde{N}_i\right)^2\\
&= \mathbf{E}\left(2\sum_{i<j} f(x_i)\,f(x_j)\,\widetilde{N}_i\,\widetilde{N}_j + \sum_{i=1}^m f^2(x_i)\,\widetilde{N}_i^2\right)\\
&\times\left(2\sum_{i<j} g(x_i)\,g(x_j)\,\widetilde{N}_i\,\widetilde{N}_j + \sum_{i=1}^m g^2(x_i)\,\widetilde{N}_i^2\right)\\
&= 4\sum_{i<j} f(x_i)\,f(x_j)\,g(x_i)\,g(x_j)\,\mathbf{E}\widetilde{N}_i^2\,\mathbf{E}\widetilde{N}_j^2\\
&+\sum_{i\neq j} f^2(x_i)\,g^2(x_j)\,\mathbf{E}\widetilde{N}_i^2\,\mathbf{E}\widetilde{N}_j^2 + \sum_{i=1}^m f^2(x_i)\,g^2(x_i)\,\mathbf{E}\widetilde{N}_i^4\\
&\leqslant 2\left(\sum_{i=1}^m f(x_i)\,g(x_i)\,n_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m f^2(x_i)\,n_i\right)\left(\sum_{i=1}^m g^2(x_i)\,n_i\right)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{m} f^2(x_i)\, g^2(x_i)\, \mathbf{E}\widetilde{N}_i^4. \tag{29}$$

Очевидно, что $\mathbf{E}\widetilde{N}_i^4 = n_i + 3n_i^2 \approx n_i$, так как в силу непрерывности спектральной меры $n_i^2 = o(n_i)$ при $n \to 0$ равномерно по i. Осуществим предельный переход и применим неравенство Гёльдера к первому слагаемому. Получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}Z^2G^2 \leqslant 2\left(\int f(x)\, g(x)\, n(dx)\right)^2 \\
&+\int f^2(x)\, n(dx) \int g^2(x)\, n(dx) + \int f^2(x)\, g^2(x)\, n(dx) \\
&\leqslant 3\int f^2(x)\, n(dx) \int g^2(x)\, n(dx) + \int f^2(x)\, g^2(x)\, n(dx).
\end{aligned} \tag{30}$$

$\square$

Теперь вернемся к оценке второго слагаемого в (15). Применив лемму 3.2, получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}X_2^2Y_1^2 = \mathbf{E}\left(\int\limits_{at-u}^{at}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{D} \Delta_{a,t,t_1}(s,u)\, \widetilde{N}_\sharp(ds,du,d\xi)\right)^2 \\
&\times\left(\int\limits_{at-u}^{at}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{D} \Delta_{a,t_2,t}(s,u)\, \widetilde{N}_\sharp(ds,du,d\xi)\right)^2 \\
&\leqslant 3\int\limits_{at-u}^{at}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{D} \Delta^2_{a,t,t_1}(s,u)\, n_\sharp(ds,du,d\xi) \\
&\times\int\limits_{at-u}^{at}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{D} \Delta^2_{a,t_2,t}(s,u)\, n_\sharp(ds,du,d\xi) \\
&+\int\limits_{at-u}^{at}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{D} \Delta^2_{a,t,t_1}(s,u)\, \Delta^2_{a,t_2,t}(s,u), n_\sharp(ds,du,d\xi).
\end{aligned} \tag{31}$$

В силу (26), первое слагаемое в (31) не превосходит $C_{12}\lambda^2\, a^{2(3-\gamma)}\, \Delta^2$. Займемся оценкой второго слагаемого в (31). Здесь мы также воспользуемся равенством (17).

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{at-u}^{at}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{D} \Delta^2_{a,t,t_1}(s,u)\Delta^2_{a,t_2,t}(s,u)\, n_\sharp(ds,du,d\xi)\\
&= \int\limits_{at-u}^{at} \lambda ds \int\limits_{0}^{\infty} F_U(du) \int\limits_{D} \Delta^2_{a,t,t_1}(s,u)\Delta^2_{a,t_2,t}(s,u)\, \mu(d\xi)\\
&= \int\limits_{at-u}^{at}\lambda ds\int\limits_{0}^{\infty}\big(\mathbf{E}R^2\,(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))+\mathbf{E}^2 R\,(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))^2\,\big)\\
&\times\big(\mathbf{E}R^2\,(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u))+\mathbf{E}^2 R\,(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u))^2\,\big)F_U(du)\\
&= \int\limits_{at-u}^{at}\lambda ds\int\limits_{0}^{\infty}\mathbf{E}^2 R^2\,(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u))\,F_U(du)\\
&+ \int\limits_{at-u}^{at}\lambda ds\int\limits_{0}^{\infty}\mathbf{E}R^2\,\mathbf{E}^2 R\,(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))\,\big(K_{at_2}(s,u)\\
&- K_{at}(s,u)\big)^2 F_U(du) + \int\limits_{at-u}^{at}\lambda ds\int\limits_{0}^{\infty}\mathbf{E}R^2\,\mathbf{E}^2 R\big(K_{at}(s,u)\\
&- K_{at_1}(s,u)\big)^2\,(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u))\,F_U(du)\\
&+ \int\limits_{at-u}^{at}\lambda ds\int\limits_{0}^{\infty}\mathbf{E}^4 R\,(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))^2(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u))^2\,F_U(du).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Соотношение (32) содержит четыре слагаемых. Оценим их.

Заметим, что

$$(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))\,(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u)) \leqslant \min(u^2,(a\Delta)^2).$$

Тогда рассуждения, аналогичные (25), приводят к тому, что первое слагаемое в (32) не превосходит $C_{13}\lambda\,(a\Delta)^{3-\gamma}$.

Имеем

$$(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))\,(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u))^2 \leqslant \min(u^3,(a\Delta)^3),$$
$$(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))^2\,(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u)) \leqslant \min(u^3,(a\Delta)^3).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{at-u}^{at}\lambda ds\int\limits_0^\infty \mathbf{E}R^2\mathbf{E}^2R\,(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u))^2\,F_U(du)$$
$$\leqslant \lambda\,\mathbf{E}R^2\,\mathbf{E}^2R\int\limits_0^\infty u\,\min(u^3,(a\Delta)^3)\,F_U(du)$$
$$=\lambda\,\mathbf{E}R^2\,\mathbf{E}^2R\left(\int\limits_0^{a\Delta}u\,u^3\,F_U(du)+\int\limits_{a\Delta}^\infty u\,(a\Delta)^3\,F_U(du)\right)$$
$$\leqslant C\lambda\,\mathbf{E}R^2\,\mathbf{E}^2R\left((a\Delta)^2\int\limits_0^{a\Delta}u^2\,u^{-(1+\gamma)}\,du+(a\Delta)^3\int\limits_{a\Delta}^\infty u\,u^{-(1+\gamma)}\,du\right)$$
$$=\;C_{14}\lambda\,\mathbf{E}R^2\,\mathbf{E}^2R\,\left((a\Delta)^2(a\Delta)^{2-\gamma}+(a\Delta)^3(a\Delta)^{1-\gamma}\right)$$
$$=\;2C_{14}\lambda\,\mathbf{E}R^2\,\mathbf{E}^2R\,(a\Delta)^{4-\gamma}\;=\;C_{15}\lambda\,(a\Delta)^{4-\gamma}.$$

По аналогии, третье слагаемое в (32) не превосходит $C_{16}\lambda\,(a\Delta)^{4-\gamma}$.

Оценим четвертое слагаемое в (32). Используем оценку

$$(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))^2\,(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u))^2 \leqslant \min(u^4,(a\Delta)^4).$$

Тогда

$$\int\limits_{at-u}^{at}\lambda ds\int\limits_0^\infty \mathbf{E}^4R\,(K_{at}(s,u)-K_{at_1}(s,u))^2\,(K_{at_2}(s,u)-K_{at}(s,u))^2\;F_U(du)$$
$$\leqslant \lambda\,\mathbf{E}^4R\int\limits_0^\infty u\,\min(u^4,(a\Delta)^4)\,F_U(du)$$
$$=\lambda\,\mathbf{E}^4R\left(\int\limits_0^{a\Delta}u\,u^4\,F_U(du)+\int\limits_{a\Delta}^\infty u\,(a\Delta)^4\,F_U(du)\right)$$

$$\leqslant C\lambda\,\mathbf{E}^4 R\,\left((a\Delta)^3\int\limits_0^{a\Delta} u^2\,u^{-(1+\gamma)}\,du + (a\Delta)^4\int\limits_{a\Delta}^{\infty} u\,u^{-(1+\gamma)}\,du\right)$$
$$= C_{17}\lambda\,\mathbf{E}^4 R\,\big((a\Delta)^3(a\Delta)^{2-\gamma} + (a\Delta)^4(a\Delta)^{1-\gamma}\big)$$
$$= 2C_{17}\lambda\,\mathbf{E}^4 R\,(a\Delta)^{5-\gamma} = C_{18}\lambda\,(a\Delta)^{5-\gamma}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}X_2^2Y_1^2 \leqslant C_{12}\lambda^2\,a^{2(3-\gamma)}\,\Delta^2\\
&+ C_{13}\lambda\,(a\Delta)^{3-\gamma} + C_{15}\lambda\,(a\Delta)^{4-\gamma} + C_{16}\lambda\,(a\Delta)^{4-\gamma} + C_{18}\lambda\,(a\Delta)^{5-\gamma}\\
&= C_{12}\lambda^2\,a^{2(3-\gamma)}\,\Delta^2 + C_{13}\lambda\,(a\Delta)^{3-\gamma}\\
&+ C_{19}\lambda\,(a\Delta)^{4-\gamma} + C_{18}\lambda\,(a\Delta)^{5-\gamma}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Принимая во внимание (27) и (33), в итоге получаем

$$\mathbf{E}\,\left|V_{a,b,\lambda}(t) - V_{a,b,\lambda}(t_1)\right|^2\left|V_{a,b,\lambda}(t_2) - V_{a,b,\lambda}(t)\right|^2$$
$$\leqslant \frac{1}{b^4}\,\big(\mathbf{E}(X_1^2 + X_2^2)\,\mathbf{E}(Y_1^2 + Y_2^2) + \mathbf{E}X_2^2Y_1^2\big)$$
$$\leqslant \frac{1}{(\lambda^{1/2}a^{(3-\gamma)/2})^4}\Big(C_{11}\lambda^2\,a^{2(3-\gamma)}\,\Delta^2$$
$$+ C_{12}\lambda^2\,a^{2(3-\gamma)}\,\Delta^2 + C_{13}\lambda\,(a\Delta)^{3-\gamma} + C_{19}\lambda\,(a\Delta)^{4-\gamma} + C_{18}\lambda\,(a\Delta)^{5-\gamma}\Big)$$
$$\leqslant \frac{\Delta^{3-\gamma}}{\lambda^2 a^{2(3-\gamma)}}\,\Big(C_{20}\lambda^2\,a^{2(3-\gamma)} + C_{13}\lambda\,a^{3-\gamma} + C_{19}\lambda\,a^{4-\gamma} + C_{18}\lambda\,a^{5-\gamma}\Big)$$
$$= \big(C_{20} + \frac{C_{13}}{\lambda\,a^{3-\gamma}} + \frac{C_{19}}{\lambda\,a^{2-\gamma}} + \frac{C_{18}}{\lambda\,a^{1-\gamma}}\big)\,\Delta^{3-\gamma}$$
$$= \left(C_{20} + \frac{C_{13}}{\lambda\,a^{3-\gamma}} + \frac{C_{19}}{\lambda\,a^{2-\gamma}} + \frac{C_{18}}{\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}}}\right)\,\Delta^{3-\gamma} \leqslant C_{21}\Delta^{3-\gamma}.$$

Последнее неравенство следует из того, что $\lambda \to \infty$, $a \to \infty$ и, следовательно, $a^{3-\gamma} \to \infty$, $a^{2-\gamma} \to \infty$ при $1 < \gamma < 2$, и кроме того, что $\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, $a \to \infty$. Таким образом, условие (12) выполнено при $q = 2$. □

Автор благодарна М. А. Лифшицу за поддержку и внимание к работе.

Литература

1. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, М., 1977.
2. Е. С. Гарай, *О предельных теоремах в некоторых системах обслуживания.* Дипломная работа, СПБГУ, 2008.
3. М. А. Лифшиц, *Устойчивые распределения, случайные величины и процессы.* Учебно-метод. пособие., СПб., 2007.
4. M. A. Lifshits, *Random Processes by Example.* Word Scientific, Singapure, 2014.
5. R. Gaigalas, I. Kaj, *Convergence of scaled renewal processes and a packet arrival model.* — Bernoulli **9** (2003), 671–703.
6. I. Kaj, M. S. Taqqu, *Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach.* — In and Out of Equilibium 2, Ser. Progress in Probability **60** (2008), Birkhäuser, Basel, pp. 383–427.
7. J. B. Levy, M. S. Taqqu, *Renewal reward processes with heavy-tailed interrenewal times and heavy-tailed rewards.* — Bernoulli **6** (2000), 23–44.
8. Th. Mikosch, S. Resnick, H. Rootzen, A. Stegeman, *Is network traffic approximated by stable Lévy motion or fractional Brownian motion?* — Ann. Appl. Probab. **12** (2002), 23–68.
9. V. Pipiras, M. S.Taqqu, *The limit of a renewal-reward process with heavy-tailed rewards is not a linear fractional stable motion.* — Bernoulli **6** (2000), 607–614.
10. V. Pipiras, M. S. Taqqu, J. B. Levy, *Slow, fast and arbitrary growth conditions for renewal reward processes when the renewals and the rewards are heavy-tailed.* — Bernoulli **10** (2004), 121–163.
11. M. S. Taqqu, *The modeling of Ethernet data and of signals that are heavy-tailed with infinite variance.* — Scand. J. Stat. **29** (2002), 273–295.
12. W. Willinger, V. Paxson, R. H. Riedi, M. S. Taqqu, *Long-range dependence and data network traffic.* — In: Theory and Applications of Long-Range Dependence, Eds. P. Doukhan, G. Oppenheim, M. S. Taqqu, Birkhäuser, Basel, 2003.

Garai E. S. On limit theorem in some service systems.

A service system model introduced by I. Kaj and M. Taqqu is considered. We prove a limit theorem for a process of integral workload on service system. This theorem is generalize a corresponding result of I. Kaj and M. Taqqu, since a weak convergence in Skorokhod space is established.

ГБНОУ СПбГДТЮ Аничков лицей,
Невский пр., 39, литер А,
Санкт-Петербург 198 504, Россия
E-mail: elena12578@mail.ru

Поступило 9 декабря 2014 г.