Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СПЕЦИАЛЬНЫХ ДИФФУЗИЙ СО СКАЧКАМИ

В работе рассматривается специальный класс диффузий со скачками. Для традиционного класса таких диффузий скачки наступают в моменты времени, соответствующие моментам скачков процесса Пуассона. При этом положение в момент скачка может быть произвольным. Описание традиционного класса диффузий со скачками можно найти, например, в [1, гл. VI]. Там же представлено естественное обобщение этого класса и различные результаты.

В настоящей работе изучаются диффузии со скачками, которые наступают через такие моменты времени, в которые диффузия может иметь лишь заданное конечное число значений. К таким моментам, например, относятся моменты выхода диффузии из интервала, моменты обратные к локальному времени диффузии или минимумы из обратных локальных времен. Нас интересуют результаты, позволяющие вычислять распределения различных функционалов от диффузии со скачками. Для диффузий, в частности, для броуновского движения, основополагающее значение для развития теории распределения интегральных функционалов имеет работа М. Каца [2].

1. Специальные диффузии со скачками. Пусть Y_k, $k = 1, 2, \dots,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины.

Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$ – процесс броуновского движения, не зависящий от величин Y_k, $k = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим однородный диффузионный процесс X, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения: с вероятностью единица для любого $t \geqslant 0$

$$X(t) = x + \int\limits_0^t \mu(X(u))\, du + \int\limits_0^t \sigma(X(u))\, dW(u). \tag{1.1}$$

Ключевые слова: распределение функционалов, диффузия со скачками, случайные моменты времени.

Настоящая работа частично поддерживалась грантами НШ 2504.2014.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Пусть $\mu(x)$ и $\sigma(x)$, $x \in \mathbf{R}$ – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию ограниченности на линейный рост:

$$|\mu(x)| + |\sigma(x)| \leqslant C(1 + |x|) \quad \text{для всех } x \in \mathbf{R}.$$

Тогда, согласно [1, теореме 7.3 гл. II], существует единственное сильное решение уравнения (1.1). Предположим, что $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} \sigma(x) > 0$ и что производная $\left(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right)'$ ограничена. Рассмотрим условия, при которых можно гарантировать существование локального времени у однородного диффузионного процесса X. Процесс $X(t)$ имеет локальное время, если с вероятностью единица для всех $(t, y) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}$ существует предел (см. (5.3) гл. II из [1])

$$\ell_X(t, y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[y, y+\varepsilon)}(X(v))\, dv.$$

Для броуновского движения W локальное время ℓ_W существует (см., например, § 5 гл. II из [1]). Для диффузий, которые получаются с помощью трансформации из броуновского движения, локальное время тоже существует. Оно явно выражается через броуновское локальное время. Это хорошо известный факт (см., например, § 5.3 из [3]). Для того, чтобы это описать, рассмотрим шкалу процесса $X(t)$:

$$S(x) := \int_0^x \exp\Big(-2 \int_0^y \frac{\mu(v)}{\sigma^2(v)}\, dv \Big)\, dy, \quad x \in \mathbf{R},$$

и плотность меры скорости

$$m(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)} \exp\Big(2 \int_0^y \frac{\mu(v)}{\sigma^2(v)}\, dv \Big).$$

Пусть

$$\liminf_{y \to \infty} \frac{1}{y} \int_0^y \exp\Big(-4 \int_0^z \frac{\mu(v)}{\sigma^2(v)}\, dv \Big) dz > 0,$$

$$\liminf_{y \to \infty} \frac{1}{y} \int_{-y}^0 \exp\Big(4 \int_z^0 \frac{\mu(v)}{\sigma^2(v)}\, dv \Big) dz > 0,$$

тогда для интегрального функционала

$$A(t) := \int_0^t \sigma^2(X(s))\big(S'(X(s))\big)^2\,ds, \quad t \in [0,\infty),$$

выполняется (см. (5.3) гл. IV из [1]) равенство $A(\infty) = \infty$ п.н. В этих условиях случайный момент

$$a_t := \min\big\{s : A(s) = t\big\}, \quad t \in [0,\infty),$$

всегда конечен, и, согласно замечанию 13.1 гл. IV из [1], процесс $\widetilde{W}(t) := S(X(\alpha_t))$, $t \geqslant 0$, – броуновское движение. Следовательно,

$$X(t) = S^{(-1)}(\widetilde{W}(A(t))),$$

а это влечет, что

$$\ell_X(t,y) = \frac{m(y)}{2}\ell_{\widetilde{W}}(A(t), S(y)).$$

Один из наиболее интересных моментов остановки диффузии – это *момент, обратный к локальному времени*

$$\varrho_X(v,z) = \min\{s \geqslant 0 : \ell_X(s,z) = v\}, \quad v \geqslant 0, \quad z \in \mathbf{R}.$$

Для распределений функционалов от диффузий, остановленных в этот момент времени, удается получить явные формулы (см. [4]). Поскольку, когда диффузия X находится вне уровня z, локальное время $\ell_X(s,z)$, $s \geqslant 0$, не меняется, то выполняется равенство $X(\varrho_X(v,z)) = z$.

К первому специальному классу диффузий со скачками относятся диффузии, у которых скачки наступают через независимые одинаково распределенные моменты времени, являющиеся обратными к локальному времени диффузии в точке z. Каждый раз диффузия осуществляет скачки только из состояния z, и значения скачков распределены в соответствии со случайными величинами Y_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Формальное определение таково: диффузия со скачками (обозначим ее $J^{(1)}$) определяется рекуррентно следующим образом. Положим $\varkappa_1 := \varrho_X(v,z)$. При $\varkappa_0 := 0 \leqslant t < \varkappa_1$, полагаем $J^{(1)}(t) := X(t)$, где X – решение уравнения (1.1). Предположим, что при некотором $l = 1, 2, \ldots$ определены момент остановки $\varkappa_l$ и процесс $J^{(1)}$ до этого момента. При фиксированном $l = 1, 2, \ldots$ процесс $\widetilde{W}_l(s) := W(s + \varkappa_l) - W(\varkappa_l)$, $s \geqslant 0$, является броуновским движением. Рассмотрим решение уравнения

$$\widetilde{X}_x^{(l)}(s) = x + \int_0^s \mu(\widetilde{X}_x^{(l)}(v))\,dv + \int_0^s \sigma(\widetilde{X}_x^{(l)}(v))\,d\widetilde{W}_l(v). \tag{1.2}$$

Диффузия $\widetilde{X}_x^{(l)}(s)$ имеет, такие же конечномерные распределения, как и исходная диффузия X. Далее полагаем

$$\begin{aligned} J^{(1)}(s+\varkappa_l) &:= \widetilde{X}_{z+Y_l}^{(l)}(s), \qquad 0 \leqslant s < \varkappa_{l+1} - \varkappa_l, \\ \varkappa_{l+1} &:= \varkappa_l + \min\bigl\{s \geqslant 0 : \ell_{\widetilde{X}_{z+Y_l}^{(l)}}(s,z) = v\bigr\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

В любой момент $\varkappa_l$ скачкообразная диффузия $\widetilde{J}_l^{(1)}(s) := J^{(1)}(s+\varkappa_l)$, $s \geqslant 0$, начинается заново как обычная диффузия X, выходящая из точки $z+Y_l$, а далее продолжается как исходная скачкообразная диффузия $J^{(1)}$. При этом она не зависит от σ-алгебры событий, порожденных процессом $J^{(1)}$ до момента времени $\varkappa_l$.

Ко второму рассмотренному классу диффузий относятся диффузии со скачкообразным отражением от границ интервала (a,b) во внутреннюю его часть. Пусть $(Y_{a,k}, Y_{b,k})$, $k = 1,2,\dots,$ – независимые одинаково распределенные двумерные случайные величины со значениями в $[0, b-a]^2$. Эти величины будут характеризовать значения скачков от границ a и b соответственно во внутреннюю часть интервала. Положим $H_{a,b} := \min\{s : X(s) \notin (a,b)\}$ – момент первого выхода из интервала (a,b). Диффузия со скачками (обозначим ее $J^{(2)}$) определяется рекуррентно следующим образом. При $\varkappa_0 := 0 \leqslant t < \varkappa_1 := H_{a,b}$, полагаем $J^{(2)}(t) := X(t)$, где X – решение уравнения (1.1). Положим

$$\begin{aligned} &R_1 := (a + Y_{a,1})\mathbb{1}_{\{a\}}(X(\varkappa_1)) + (b - Y_{b,1})\mathbb{1}_{\{b\}}(X(\varkappa_1)), \\ &J^{(1)}(s+\varkappa_1) := \widetilde{X}_{R_1}^{(1)}(s), \qquad 0 \leqslant s < \varkappa_2 - \varkappa_1, \\ &\varkappa_2 := \varkappa_1 + \min\bigl\{s \geqslant 0 : \widetilde{X}_{R_1}^{(1)}(s) \notin (a,b)\bigr\}. \end{aligned}$$

Далее полагаем, что при некотором $l = 2,3,\dots$ определен момент остановки $\varkappa_l$ и процесс $J^{(2)}$ определен до этого момента. Тогда

$$\begin{aligned} &R_l := (a + Y_{a,l})\mathbb{1}_{\{a\}}(J^{(2)}(\varkappa_l)) + (b - Y_{b,l})\mathbb{1}_{\{b\}}(J^{(2)}(\varkappa_l)), \\ &J^{(2)}(s+\varkappa_l) := \widetilde{X}_{R_l}^{(l)}(s), \quad 0 \leqslant s < \varkappa_{l+1} - \varkappa_l, \\ &\varkappa_{l+1} := \varkappa_l + \min\bigl\{s \geqslant 0 : \widetilde{X}_{R_l}^{(l)}(s) \notin (a,b)\bigr\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

В любой момент $\varkappa_l$ скачкообразная диффузия $\widetilde{J}_l^{(2)}(s) := J^{(2)}(s+\varkappa_l)$, $s \geqslant 0$, начинается заново как обычная диффузия X, выходящая из точки R_l, а далее продолжается как исходная скачкообразная диффузия $J^{(2)}$. При этом она не зависит от σ-алгебры событий, порожденных процессом $J^{(2)}$ до момента времени $\varkappa_l$.

Рассмотрим также специальный класс диффузий со скачками, который обобщает два класса, представленные выше. Рассмотрим момент, который является минимумом из двух обраных локальных времен на разных уровнях. Фиксируем уровни $y, z \in \mathbf{R}$. Положим

$$\vartheta_X := \vartheta_X(u,v,y,z) = \min\{\varrho_X(u,y), \varrho_X(v,z)\}, \quad v,u \geqslant 0.$$

Для распределений функционалов от броуновского движения, остановленного в этот момент времени, получены результаты в работе [5]. Поскольку, когда диффузия X находится вне уровней y, z, соответствующее локальное время на уровне не меняется, то выполняются равенства $X(\vartheta_X) = y$ или $X(\vartheta_X) = z$.

При $u \to \infty$ момент ϑ_X преобразуется в момент $\varrho_X(v,z)$. При $x \in (y,z)$ и $u \downarrow 0$ и $v \downarrow 0$ момент ϑ_X преобразуется в момент $H_{y,z}$.

Пусть $(Y_{y,k}, Y_{z,k})$, $k = 1,2,\ldots$, – независимые одинаково распределенные двумерные случайные величины со значениями в $\mathbf{R}^2$. Эти величины будут характеризовать значения скачков от уровней y и z соответственно. Диффузия со скачками (обозначим ее $\widetilde{J}^{(3)}$) определяется рекуррентно следующим образом. Положим $\varkappa_1 := \vartheta_X(u,v,y,z)$. При $\varkappa_0 := 0 \leqslant t < \varkappa_1$, полагаем $\widetilde{J}^{(3)}(t) := X(t)$, где X – решение уравнения (1.1). Положим

$$\begin{aligned}
&R_1 := (y + Y_{y,1})\mathbb{1}_{\{y\}}(X(\varkappa_1)) + (z + Y_{z,1})\mathbb{1}_{\{z\}}(X(\varkappa_1)),\\
&\widetilde{J}^{(3)}(s+\varkappa_1) := \widetilde{X}^{(1)}_{R_1}(s), \qquad 0 \leqslant s < \varkappa_2 - \varkappa_1,\\
&\varkappa_2 := \varkappa_1 + \vartheta_{\widetilde{X}^{(1)}_{R_1}}(u,v,y,z).
\end{aligned}$$

Далее полагаем, что при некотором $l = 2,3,\ldots$, определены момент остановки $\varkappa_l$ и процесс $\widetilde{J}^{(3)}$ до этого момента. Тогда

$$\begin{aligned}
&R_l := (y + Y_{y,l})\mathbb{1}_{\{y\}}(\widetilde{J}^{(3)}(\varkappa_l)) + (z + Y_{z,l})\mathbb{1}_{\{z\}}(\widetilde{J}^{(3)}(\varkappa_l)),\\
&\widetilde{J}^{(3)}(s+\varkappa_l) := \widetilde{X}^{(l)}_{R_l}(s), \quad 0 \leqslant s < \varkappa_{l+1} - \varkappa_l,\\
&\varkappa_{l+1} := \varkappa_l + \vartheta_{\widetilde{X}^{(l)}_{R_l}}(u,v,y,z).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

2. Распределения функционалов от диффузии $J^{(1)}$, остановленной в экспоненциальный момент времени.

Основной интерес, несомненно, представляют распределения функционалов от процессов, заданных на фиксированном интервале времени $[0,t]$. Однако, вычисление таких распределений основывается на дифференциальных уравнениях в частных производных (см., например, § 1 гл. III из [1]). Вместо фиксированного времени t следует взять преобразование Лапласа по t с некоторым параметром $\lambda > 0$. Это позволяет дифференциальные уравнения в частных производных заменить на обыкновенные дифференциальные уравнения. Для фиксированного t результат получается из соответствующего утверждения с помощью обратного преобразования Лапласа по λ.

Пусть τ – не зависящий от процесса $\{W(s),\ s \geqslant 0\}$ и величин Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени. Замена фиксированного момента времени на τ как раз и отвечает преобразованию Лапласа по t.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание отвечающие рассматриваемому процессу при начальном значении x. Для краткости мы используем следующее обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

Нам понадобятся некоторые результаты о распределении функционалов от однородных диффузионных процессов.

Пусть $\Phi(x)$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции, $f \geqslant 0$. Тогда функция

$$\begin{aligned} U(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ &\Phi(X(\tau)) \exp\Big(-\int_0^\tau f(X(s))\,ds \Big); \\ &a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} X(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} X(s) \leqslant b \Big\}, \qquad x \in (a,b), \end{aligned}$$

является при $x \in (a,b)$ единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) - (\lambda + f(x))U(x) = -\lambda\Phi(x), \tag{2.1}$$

$$U(a) = 0, \qquad U(b) = 0. \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. В случае $a = -\infty$ или $b = \infty$ дополнительно предполагается, что Φ ограничена. Тогда соответствующее граничное условие в (2.2) должно быть заменено условием, что функция $U(x)$ ограничена, когда x стремится к $-\infty$ или ∞.

Этот результат можно найти в [1], гл. IV, теорема 4.2.

Замечание 2.2. Для кусочно непрерывных функций f и Φ уравнение (2.1) надо понимать следующим образом: оно имеет место во всех точках непрерывности функций f и Φ, а в точках разрыва f и Φ его решение непрерывно вместе с первой производной.

При фиксированном $z \in [a,b]$ положим $\varkappa_1 = \varrho_X(v,z)$, $v \geqslant 0$, и

$$d(v,x) := \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(X(s)))\,ds\Big);$$
$$a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\varkappa_1} X(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\varkappa_1} X(s) \leqslant b\Big\}, \quad x \in [a,b].$$

Тогда преобразование Лапласа

$$D(x) := \eta \int_0^\infty e^{-\eta v} d(v,x)\,dv, \quad \eta > 0,$$

является при $x \in [a,b]$ единственным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)D''(x) + \mu(x)D'(x) - (\lambda + f(x))D(x) = 0, \quad x \in (a,b)\setminus\{z\}, \tag{2.3}$$

$$D'(z+0) - D'(z-0) = 2\eta\, D(z) - 2\eta, \tag{2.4}$$

$$D(a) = 0, \quad D(b) = 0. \tag{2.5}$$

Для броуновского движения это следует из теоремы 7.2 гл. III из [1]. Для диффузионных процессов этот результат выводится из теоремы 5.1 гл. IV из [1] аналогично результату для броуновского движения.

Решение этой задачи можно выразить через фундаментальные решения однородного уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi''(x) + \mu(x)\phi'(x) - (\lambda + f(x))\phi(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2.6}$$

Замечание 2.3. Согласно предложениям 12.2 и 12.3 гл. II из [1], при сделанных предположениях на коэффициенты μ и σ, однородное уравнение для $f \geqslant 0$ имеет два неотрицательных линейно независимых строго монотонных решения $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, для которых $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$.

Монотонность будет строгой. Это следует из того, что производная $\phi'(x)$ не может обращаться в нуль. В противном случае, при $\phi'(x)=0$ в точке x будет локальный минимум, поскольку, в силу (2.6), $\phi''(x)>0$, а это противоречит монотонности решений.

В случае, когда уравнение (2.6) рассматривается на конечном интервале (a,b) с нулевыми граничными условиями, можно выбрать такие решения, что $\psi(a)=0$ и $\psi(x)$ при $x\geqslant a$ является возрастающим решением уравнения (2.6), а $\varphi(b)=0$ и $\varphi(x)$ при $x\leqslant b$ является убывающим решением уравнения (2.6).

Задача (2.3)–(2.5) имеет следующее решение

$$D(x)=\frac{2\eta}{2\eta+\frac{w(z)}{\psi(z)\varphi(z)}}\Big(\frac{\psi(x)}{\psi(z)}\mathbb{1}_{(a,z)}(x)+\frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}\mathbb{1}_{[z,b)}(x)\Big). \qquad (2.7)$$

В этом выражении несложно обратить преобразование Лапласа по η:

$$d(v,x):=\begin{cases}\frac{\psi(x)}{\psi(z)}\exp\Big(-\frac{w(z)v}{2\psi(z)\varphi(z)}\Big), & a\leqslant x\leqslant z,\\ \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}\exp\Big(-\frac{w(z)v}{2\psi(z)\varphi(z)}\Big), & z\leqslant x\leqslant b,\end{cases}$$

где величина $w(x):=\psi'(x)\varphi(x)-\varphi'(x)\psi(x)>0$ – вронскиан.

Функцию $U(x)$, $x\in(a,b)$, тоже можно выразить через фундаментальные решения φ и ψ. Имеем

$$U(x)=\int_a^b \Phi(z)\,G_z(x)\,dz,$$

где G_z – функция Грина задачи (2.1), (2.2),

$$G_z(x)=\begin{cases}\frac{2\lambda}{w(z)\sigma^2(z)}\varphi(z)\psi(x) & \text{при } a\leqslant x\leqslant z,\\ \frac{2\lambda}{w(z)\sigma^2(z)}\psi(z)\varphi(x) & \text{при } z\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi(x)$ и $f(x)$, $x\in[a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f\geqslant 0$. Тогда функция*

$$q(v,x):=\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J^{(1)}(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J^{(1)}(s))\,ds\Big);$$
$$a\leqslant\inf_{0\leqslant s\leqslant\tau}J^{(1)}(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J^{(1)}(s)\leqslant b\Big\},\quad x\in[a,b],$$

имеет вид

$$q(v,x)=U(x)-(U(z)-c_{v,z})d(v,x), \qquad (2.8)$$

где

$$c_{v,z} := \frac{\mathbf{E}\,U(z+Y_1) - U(z)\mathbf{E}\,d(v,z+Y_1)}{1-\mathbf{E}\,d(v,z+Y_1)}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Чтобы упростить формулы в дальнейших рассуждениях, будем считать, что $a=-\infty$, $b=\infty$. Это принципиального значения не имеет. Функция q представима в виде суммы двух слагаемых

$$\begin{aligned} q(v,x) &= \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(X(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(X(s))\,ds\Big); \tau < \varkappa_1\Big\} \\ &\quad + \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J^{(1)}(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J^{(1)}(s))\,ds\Big); \tau \geqslant \varkappa_1\Big\} \\ &=: q_1(v,x) + q_2(v,x). \end{aligned}$$

Событие $\{\tau<\varkappa_1\}$ эквивалентно событию $\{\ell_X(\tau,z)<v\}$. Рассмотрим преобразование Лапласа по v функции $q_1(v,x)$:

$$\begin{aligned} Q_1(x) &:= \eta\int_0^\infty e^{-\eta v} q_1(v,x)\,dv \\ &= \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(X(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(X(s))\,ds - \eta\ell_X(\tau,z)\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Функция $Q_1(x)$, $x\in\mathbf{R}$, является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)Q''(x) + \mu(x)Q'(x) - (\lambda + f(x))Q(x) = -\lambda\varPhi(x), \quad x\neq z, \tag{2.10}$$

$$Q'(z+0) - Q'(z-0) = 2\eta Q(z). \tag{2.11}$$

Для броуновского движения это следует из теоремы 3.1 гл. III из [1]. Для диффузионных процессов этот результат выводится из теоремы 4.1 гл. IV из [1] аналогично результату для броуновского движения.

Решение задачи (2.10), (2.11) несложно выразить через функцию U, которая является единственным ограниченным на всей прямой решением уравнения (2.1), и функцию D. Очевидно, что

$$Q_1(x) = U(x) - U(z)\,D(x), \qquad x\in\mathbf{R}, \tag{2.12}$$

поскольку такая функция удовлетворяет задаче (2.10), (2.11). Обратное преобразование Лапласа по η от этой функции, деленной на η, в силу (2.7) имеет вид

$$q_1(v,x) = U(x) - U(z)\,d(v,x), \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{2.13}$$

Рассмотрим функцию $q_2(v,x)$, $x \in \mathbf{R}$. По теореме Фубини имеем

$$q_2(v,x) = \lambda \mathbf{E}_x \int_{\varkappa_1}^{\infty} e^{-\lambda t}\Big\{ \exp\Big(- \int_0^{\varkappa_1} f(X(s))\,ds\Big)\varPhi(J^{(1)}(t)) \\ \times \exp\Big(- \int_{\varkappa_1}^{t} f(J^{(1)}(s))\,ds\Big)\Big\}dt.$$

В этом выражении сделаем замену переменной $t = u + \varkappa_1$. Тогда

$$q_2(v,x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda u}\mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(- \int_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(X(s)))\,ds\Big)\varPhi(\widetilde{J}^{(1)}_{z+Y_1}(u)) \\ \times \exp\Big(- \int_0^{u} f(\widetilde{J}^{(1)}_{z+Y_1}(v))\,dv\Big)\Big\}du,$$

где $\widetilde{J}^{(1)}_x(s) := J^{(1)}(s+\varkappa_1)$ имеет такие же конечномерные распределения как и исходная диффузия $J^{(1)}$ при $J^{(1)}(0) = x$. При этом $\widetilde{J}^{(1)}_x$ не зависит от σ-алгебры событий $\widetilde{\mathcal{G}} = \sigma\Big(\mathcal{G}_0^{\varkappa_1} \bigcup \sigma\big(Y_1\big)\Big)$, где $\mathcal{G}_0^{\varkappa_1}$ – σ-алгебра событий, порожденных процессом X до момента $\varkappa_1$ (см. определение в § 4 гл. I из [1]), а $\sigma\big(Y_1\big)$ – σ-алгебра, порожденная случайной величиной Y_1.

По теореме Фубини интеграл по параметру u с весом $\lambda\, e^{-\lambda u}$ можно заменить на подынтегральное выражение с $\widetilde{\tau}$ вместо u, где $\widetilde{\tau}$ – экспоненциально распределенная с параметром λ случайная величина, не зависящая от других процессов и величин. Тем самым для $q_2(v,x)$

получим следующее выражение:

$$q_2(v,x) = \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(X(s)))\,ds\Big)\mathbf{E}\Big\{\varPhi(\widetilde{J}^{(1)}_{z+Y_1}(\widetilde{\tau}))$$

$$\times \exp\Big(-\int\limits_0^{\widetilde{\tau}} f(\widetilde{J}^{(1)}_{z+Y_1}(s))ds\Big)\Big|\widetilde{\mathcal{G}}\Big\}\Big\}.$$

Применяя лемму 2.1 гл. I из [1], получим

$$q_2(v,x) = \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(X(s)))\,ds\Big)q(v,z+Y_1)\Big\}.$$

Используя независимость σ-алгебры $\mathcal{G}_0^{\varkappa_1}$ от величины Y_1, имеем

$$\begin{aligned} q_2(v,x) &= \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(X(s)))\,ds\Big)\mathbf{E}q(v,z+Y_1) \\ &= d(v,x)\mathbf{E}q(v,z+Y_1). \end{aligned}$$

В результате получено следующее уравнение

$$q(v,x) = U(x) - U(z)d(v,x) + d(v,x)\mathbf{E}q(v,z+Y_1). \tag{2.14}$$

Обозначим $c_{v,z} := \mathbf{E}q(v,z+Y_1)$. Тогда (2.14) преобразуется в (2.8). Подставляя в (2.14) вместо x величину $z+Y_1$ и вычисляя от обеих частей равенства математическое ожидание, получаем, что

$$c_{v,z} = \mathbf{E}U(z+Y_1) + (c_{v,z} - U(z))\mathbf{E}d(v,z+Y_1).$$

Отсюда следует (2.9). Теорема доказана. □

3. Распределения функционалов от диффузии $J^{(2)}$, остановленной в экспоненциальный момент времени. Нам понадобится следующий результат из [1], гл. IV, теорема 7.2.

Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция. Тогда функция

$$M_b(x) := \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} (f(X(s)))\,ds\Big); X(H_{a,b}) = b\Big\}, \quad x \in [a,b], \tag{3.1}$$

является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x) + \mu(x)M'(x) - f(x)M(x) = 0, \quad x \in (a,b), \tag{3.2}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 1. \tag{3.3}$$

Если в аналогичном результате рассматривается сужение математического ожидания на событие $X(H_{a,b}) = a$, то функция $M_a(x)$, $x \in [a,b]$, удовлетворяет (3.2) и граничным условиям

$$M(a) = 1, \qquad M(b) = 0. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\Phi(x)$ и $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$. Тогда функция*

$$r(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J^{(2)}(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(J^{(2)}(s))\,ds\Big)\Big\}, \qquad x \in [a,b], \tag{3.5}$$

имеет вид

$$r(x) = U(x) + c_a M_a(x) + c_b M_b(x), \tag{3.6}$$

где U является решением задачи (2.1), (2.2), *а c_a и c_b являются решениями системы алгебраических уравнений*

$$c_a\big(1 - \mathbf{E}\,M_a(a + Y_{a,1})\big) - c_b\,\mathbf{E}\,M_b(a + Y_{a,1}) = \mathbf{E}\,U(a + Y_{a,1}), \tag{3.7}$$

$$-c_a\,\mathbf{E}\,M_a(b - Y_{b,1}) + c_b\big(1 - \mathbf{E}\,M_b(b - Y_{b,1})\big) = \mathbf{E}\,U(b - Y_{b,1}). \tag{3.8}$$

Замечание 3.1. Если в определении процесса $J^{(2)}$ распределения величин $a + Y_{a,1}$ и $b - Y_{b,1}$ совпадают, то функция $r(x)$, $x \in (a,b)$, имеет вид

$$r(x) = U(x) + \frac{M(x)\,\mathbf{E}U(a + Y_{a,1})}{1 - M(a + Y_{a,1})}, \tag{3.9}$$

где $M(x)$ удовлетворяет уравнению (3.2) и граничным условиям

$$M(a) = 1, \qquad M(b) = 1. \tag{3.10}$$

Действительно, в этом случае $c_a = c_b = c$ и $M_a(x) + M_b(x) = M(x)$.

Доказательство теоремы 3.1. Функция r представима в виде суммы двух слагаемых

$$r(x)=\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(X(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau}f(X(s))\,ds\Big);\tau\leqslant\varkappa_1\Big\}$$

$$+\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J^{(2)}(\tau))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau}f(J^{(2)}(s))\,ds\Big);\tau>\varkappa_1\Big\}=:r_1(x)+r_2(x).$$

Событие $\{\tau\leqslant\varkappa_1\}$ эквивалентно событию

$$\Big\{a\leqslant\inf_{0\leqslant s\leqslant\tau}X(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}X(s)\leqslant b\Big\},$$

поэтому $r_1(x)=U(x)$.

Функция $r_1(x)$, $x\in[a,b]$, является единственным решением задачи (2.1), (2.2).

Рассмотрим функцию $r_2(x)$, $x\in[a,b]$. По теореме Фубини имеем

$$r_2(x)=\lambda\mathbf{E}_x\int\limits_{H_{a,b}}^{\infty}e^{-\lambda t}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}}f(X(s))\,ds\Big)\varPhi(J^{(2)}(t))$$

$$\times\exp\Big(-\int\limits_{\varkappa_1}^{t}f(J^{(2)}(s))\,ds\Big)\Big\}dt.$$

В этом выражении сделаем замену переменной $t=u+\varkappa_1$ и рассмотрим сужения математического ожидания на события $X(H_{a,b})=a$ и $X(H_{a,b})=b$. Тогда аналогично предыдущему результату, используя тот факт, что процесс $J^{(2)}$ в момент $\varkappa_1=H_{a,b}$ начинается заново и $\widetilde{J}^{(2)}_x(s):=J^{(2)}(s+\varkappa_1)$ не зависит от $\widetilde{\mathcal{G}}=\sigma\Big(\mathcal{G}_0^{\varkappa_1}\bigcup\sigma\big(Y_{a,1},Y_{b,1}\big)\Big)$, получим

$$r_2(x)=\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}}(\lambda+f(X(s)))\,ds\Big)\mathbb{1}_{\{a\}}(X(H_{a,b}))$$

$$\times\mathbf{E}\Big\{\varPhi(\widetilde{J}^{(2)}_{a+Y_{a,1}}(\widetilde{\tau}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\widetilde{\tau}}f(\widetilde{J}^{(2)}_{a+Y_{a,1}}(s))ds\Big)\Big|\widetilde{\mathcal{G}}\Big\}\Big\}$$

$$+ \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(- \int\limits_0^{H_{a,b}} (\lambda + f(X(s)))\, ds \Big) \mathbb{1}_{\{b\}}(X(H_{a,b}))$$

$$\times \mathbf{E}\Big\{ \varPhi(\widetilde{J}^{(2)}_{b-Y_{b,1}}(\widetilde{\tau})) \exp\Big(- \int\limits_0^{\widetilde{\tau}} f(\widetilde{J}^{(2)}_{b-Y_{b,1}}(s)) ds \Big) \Big| \widetilde{\mathcal{G}} \Big\} \Big\}$$

$$= \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(- \int\limits_0^{H_{a,b}} (\lambda + f(X(s)))\, ds \Big); X(H_{a,b}) = a \Big\} \mathbf{E} r(a + Y_{a,1})$$

$$+ \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(- \int\limits_0^{H_{a,b}} (\lambda + f(X(s)))\, ds \Big); X(H_{a,b}) = b \Big\} \mathbf{E} r(b - Y_{b,1})$$

$$= M_a(x)\, \mathbf{E}\, r(a + Y_{a,1}) + M_b(x)\, \mathbf{E}\, r(b - Y_{b,1}). \tag{3.11}$$

В результате имеем

$$r(x) = U(x) + M_a(x)\, \mathbf{E} r(a + Y_{a,1}) + M_b(x)\, \mathbf{E} r(b - Y_{b,1}). \tag{3.12}$$

Положим $c_a := \mathbf{E}\, r(a + Y_{a,1})$, $c_b := \mathbf{E}\, r(b - Y_{b,1})$. Подставляя в (3.12) $x = a + Y_{a,1}$ и вычисляя математическое ожидание, получаем уравнение (3.7). Подставляя в (3.12) $x = b - Y_{b,1}$, получаем (3.8). $\square$

4. Распределения функционалов от диффузии $J^{(3)}$, остановленной в экспоненциальный момент времени.

В этом пункте для того, чтобы упростить формулы, мы предположим, что $\mu(x) \equiv 0$. Это влечет, что вронскиан $w := w(x) := \psi'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)\psi(x) > 0$ фундаментальных решений уравнения (2.6) является постоянной величиной. В случае, когда уравнение (2.6) рассматривается на конечном интервале (a, b) с нулевыми граничными условиями, выбираем такие решения, что $\psi(a) = 0$ и $\varphi(b) = 0$. Положим $\rho(x, y) := \psi(x)\varphi(y) - \psi(y)\varphi(x)$. При $x > y$ функция $\rho(x, y)$ является положительной.

При фиксированных $y < z$, $y, z \in [a, b]$ положим

$$\varkappa_1 := \min\{\varrho_X(u, y), \varrho_X(v, z)\}, \qquad u \geqslant 0, \qquad v \geqslant 0,$$

и

$$d_z(u,v,x) := \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(X(s)))\,ds\Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant \varkappa_1} X(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant \varkappa_1} X(s) \leqslant b, X(\varkappa_1) = z\Big\}, \quad x \in [a,b].$$

Тогда двойное преобразование Лапласа

$$D_z(x) := \mu\eta \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-\mu u - \eta v} d_z(u,v,x)\,du\,dv, \quad \mu > 0, \eta > 0,$$

является при $x \in (a,b)$ единственным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)D''(x) - (\lambda + f(x))D(x) = 0, \quad x \in (a,b) \setminus \{y,z\}, \tag{4.1}$$

$$D'(y+0) - D'(y-0) = 2\mu\, D(y), \tag{4.2}$$

$$D'(z+0) - D'(z-0) = 2\eta\, D(z) - 2\eta, \tag{4.3}$$

$$D(a) = 0, \qquad D(b) = 0. \tag{4.4}$$

Для броуновского движения это следует из теоремы 1.1 из [5]. Для диффузионных процессов этот результат выводится из теоремы 5.1 гл. IV из [1] аналогично результату для броуновского движения.

Решение задачи (4.1)–(4.4) можно выразить через фундаментальные решения φ и ψ однородного уравнения (2.6). Положим $\rho := \rho(z,y)$,

$$p := \frac{w\psi(z)}{2\rho\psi(y)}, \qquad q := \frac{w\varphi(y)}{2\rho\varphi(z)},$$

$$K := (\mu + p)(\eta + q) - \frac{w^2}{4\rho^2} = \mu\eta + \mu q + \eta p + \frac{w^2}{4\rho\psi(y)\varphi(z)}.$$

Задача (4.1)–(4.4) имеет следующее решение (см. [5])

$$D_z(x) = \begin{cases} \frac{\mu\eta}{K}\frac{w\psi(x)}{2\mu\rho\psi(y)}, & a \leqslant x \leqslant y, \\ \frac{\mu\eta}{K}\Big(\frac{w\psi(x)}{2\mu\rho\psi(y)} + \frac{\rho(x,y)}{\rho}\Big), & y \leqslant x \leqslant z, \\ \frac{\mu\eta}{K}\big(1 + \frac{p}{\mu}\big)\frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}, & z \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{4.5}$$

Функция $D_y(x)$ удовлетворяет задаче аналогичной (4.1)–(4.4), в которой (4.2) следует заменить на

$$D'(y+0) - D'(y-0) = 2\mu\, D(y) - 2\mu,$$

а (4.3) – на

$$D'(z+0)-D'(z-0)=2\eta\, D(z),$$

Для этой функции имеем

$$D_y(x)=\begin{cases}\frac{\mu\eta}{K}\big(1+\frac{q}{\eta}\big)\frac{\psi(x)}{\psi(y)}, & a\leqslant x\leqslant y,\\ \frac{\mu\eta}{K}\Big(\frac{\rho(z,x)}{\rho}+\frac{w\varphi(x)}{2\eta\rho\varphi(z)}\Big), & y\leqslant x\leqslant z,\\ \frac{\mu\eta}{K}\,\frac{w\varphi(x)}{2\eta\rho\varphi(z)}, & z\leqslant x\leqslant b.\end{cases}\tag{4.6}$$

В выражениях для $D_z(x)$ и $D_y(x)$ можно обратить двойное преобразование Лапласа по μ и η. Для этого нужно использовать (см. [6], формулу 4.16(14)) равенство

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu+p)u-(\eta+q)v}I_0\Big(\frac{w}{\rho}\sqrt{uv}\Big)\,du\,dv=\frac{1}{K}.$$

Положим

$$I_{p,q}(u,v):=e^{-pu}\int_0^v e^{-qr}I_0\Big(\frac{w}{\rho}\sqrt{ru}\Big)\,dr.$$

Тогда имеем

$$d_z(u,v,x)=\begin{cases}\frac{w\psi(x)}{2\rho\psi(y)}I_{q,p}(v,u), & a\leqslant x\leqslant y,\\ \frac{p\psi(x)}{\psi(z)}I_{q,p}(v,u)+\frac{\rho(x,y)}{\rho}e^{-pu-qv}I_0\big(\frac{w}{\rho}\sqrt{uv}\big), & y\leqslant x\leqslant z,\\ \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}\big(e^{-pu-qv}I_0\big(\frac{w}{\rho}\sqrt{uv}\big)+pI_{q,p}(v,u)\big), & z\leqslant x\leqslant b,\end{cases}$$

$$d_y(u,v,x)=\begin{cases}\frac{\psi(x)}{\psi(y)}\big(e^{-pu-qv}I_0\big(\frac{w}{\rho}\sqrt{uv}\big)+qI_{p,q}(u,v)\big), & a\leqslant x\leqslant y,\\ \frac{q\varphi(x)}{\varphi(y)}I_{p,q}(u,v)+\frac{\rho(z,x)}{\rho}e^{-pu-qv}I_0\big(\frac{w}{\rho}\sqrt{uv}\big), & y\leqslant x\leqslant z,\\ \frac{w\varphi(x)}{2\rho\varphi(z)}I_{p,q}(u,v), & z\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

Теорема 4.1. *Пусть $\varPhi(x)$ и $f(x)$, $x\in[a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f\geqslant 0$. Тогда функция*

$$q(u,v,x):=\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J^{(3)}(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J^{(3)}(s))\,ds\Big);$$
$$a\leqslant\inf_{0\leqslant s\leqslant\tau}J^{(3)}(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J^{(3)}(s)\leqslant b\Big\},\qquad x\in(a,b),$$

имеет вид

$$q(u,v,x)=U(x)+(c_y-U(y))d_y(u,v,x)+(c_z-U(z))d_z(u,v,x),\tag{4.7}$$

где U является решением задачи (2.1), (2.2), *а c_y и c_z являются решениями системы алгебраических уравнений*

$$c_y\big(1-\mathbf{E}\,d_y(u,v,y+Y_{y,1})\big)-c_z\,\mathbf{E}\,d_z(u,v,y+Y_{y,1})=\mathbf{E}\,U(y+Y_{y,1})\\ -U(y)\mathbf{E}\,d_y(u,v,y+Y_{y,1})-U(z)\mathbf{E}\,d_z(u,v,y+Y_{y,1}), \tag{4.8}$$

$$-c_y\,\mathbf{E}\,d_y(u,v,z+Y_{z,1})+c_z\big(1-\mathbf{E}\,d_z(u,v,z+Y_{z,1})\big)=\mathbf{E}\,U(z+Y_{z,1})\\ -U(y)\mathbf{E}\,d_y(u,v,z+Y_{z,1})-U(z)\mathbf{E}\,d_z(u,v,z+Y_{z,1}). \tag{4.9}$$

Доказательство. Рассуждения в значительной степени повторяют доказательство теорем 2.1 и 3.1, поэтому мы отметим лишь принципиальные моменты. Считаем для простоты, что $a=-\infty$, $b=\infty$. Функция q представима в виде суммы двух слагаемых

$$q(u,v,x)=q_1(u,v,x)+q_2(u,v,x).$$

Первое слагаемое отвечает сужению математического ожидания на событие $\{\tau<\varkappa_1\}$ эквивалентное событию $\{\ell_X(\tau,y)<u,\ell_X(\tau,z)<v\}$. Рассмотрим двойное преобразование Лапласа по u и v от функции q_1:

$$Q_1(x):=\mu\eta\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\mu u-\eta v}q_1(u,v,x)\,du\,dv\\ =\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(X(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(X(s))\,ds-\mu\ell_X(\tau,y)-\eta\ell_X(\tau,z)\Big)\Big\}.$$

Функция $Q_1(x)$, $x\in\mathbf{R}$, является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac12\sigma^2(x)Q''(x)-(\lambda+f(x))Q(x)=-\lambda\varPhi(x),\qquad x\ne y,z, \tag{4.10}$$

$$Q'(y+0)-Q'(y-0)=2\mu Q(y), \tag{4.11}$$

$$Q'(z+0)-Q'(z-0)=2\eta Q(z). \tag{4.12}$$

Для броуновского движения это следует из теоремы 3.1 гл. III из [1]. Для диффузионных процессов этот результат выводится из теоремы 4.1 гл. IV из [1] аналогично результату для броуновского движения.

Решение задачи (4.10)–(4.12) несложно выразить через функцию U, которая является единственным ограниченным на всей прямой решением уравнения (2.1), и функции D_y и D_z. Очевидно, что

$$Q_1(x) = U(x) - U(y)\,D_y(x) - U(z)\,D_z(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{4.13}$$

поскольку такая функция удовлетворяет задаче (4.10)–(4.12). Обратное преобразование Лапласа по μ и η от этой функции, деленной на $\mu\eta$, в силу (4.5), (4.6) имеет вид

$$q_1(v,x) = U(x) - U(y)\,d_y(u,v,x) - U(z)\,d_z(u,v,x). \tag{4.14}$$

Функцию $q_2(u,v,x)$, $x \in \mathbf{R}$, можно представить аналогично (3.11) в следующем виде:

$$q_2(u,v,x) = d_y(u,v,x)\,\mathbf{E}\,q(u,v,y+Y_{y,1}) + d_z(u,v,x)\,\mathbf{E}\,q(u,v,z+Y_{z,1}).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} q(u,v,x) = U(x) &+ d_y(u,v,x)(\mathbf{E}\,q(u,v,y+Y_{y,1}) - U(y)) \\ &+ d_z(u,v,x)(\mathbf{E}\,q(u,v,z+Y_{z,1}) - U(z)). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Положим $c_y := \mathbf{E}\,q(u,v,y+Y_{y,1})$, $c_z := \mathbf{E}\,q(u,v,z+Y_{z,1})$. Подставляя в (4.15) соответственно $x = y + Y_{y,1}$, $x = z + Y_{z,1}$ и вычисляя математическое ожидание, получаем уравнения (4.8), (4.9). □

Литература

1. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* С.-П., Лань, (2013).
2. M. Kac, *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65**, No. 1 (1949), 1–13.
3. К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории.* М., Мир, (1968).
4. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae.* Second edition, Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, (2002).
5. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный к локальному времени.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **184** (1990), 37–61.
6. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, I, М., Наука, (1969).

Borodin A. N. Distributions of functionals of special diffusions with jumps.

The paper deals with the methods of computations of distributions of functionals of special diffusions with jumps. For a traditional class of diffusions with jumps the moments of jumps correspond to that of the Poisson process. The position at the moment of the jump can be arbitrary. We consider diffusions with such moments of jumps at which the position of the diffusion has a particular finite set of values. Such moments, for example, are the first exit time from an interval, the moment inverse to the diffusion local time or the minimum of inverse local times at different levels.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 Санкт-Петербург

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28
Петродворец,
198504 С.-Петербург, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 15 октября 2014 г.