Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 431, 2014 г.

Я. И. Белопольская

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ЛОТКА–ВОЛЬТЕРРА С КРОСС-ДИФФУЗИЕЙ

Введение

Системы квазилинейных параболических уравнений возникают при выводе математических моделей различных процессов в физике пористых сред, в биологии, как модели, описывающие рост популяций клеток при контактном ингибировании, а также как модели, описывающие динамику эволюции плотностей взаимодействующих популяций типа хищник – жертва [1–3].

Приведем несколько вариантов таких моделей. Пусть $u(t)$ – плотность популяции одного типа, например, жертв в однородной многомерной среде. Скорость изменения плотности этой популяции определяется разностью между интенсивностями рождения и гибели особей в популяции, и соответствующее дифференциальное уравнение вида $u_t = au$ было предложено Мальтусом. Здесь a – положительное число, определяющее эффективный рост популяции. Если среда неоднородна (например, ограничены запасы пищи или других естественных ресурсов окружающей среды), то эти ограничения могут быть учтены с помощью дополнительного члена в правой части дифференциального уравнения, которое в этом случае приобретает вид

$$u_t = u(a - bu), \quad u(0) = u_0,$$

где $b > 0$ зависит от запаса ресурсов. Это уравнение назывется уравнением логистического роста популяции.

Рассмотрим далее динамику плотностей $u(t), v(t)$ двух сосуществующих популяций. Если популяции не взаимодействуют, то динамика их плотностей описывается системой независимых уравнений вида

$$u_t = u(a_1 - b_1 u), \quad v_t = v(a_2 - c_2 v).$$

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, стохастические потоки, системы квазилинейных параболических уравнений, обобщенные решения задачи Коши.

Работа поддержана проектом Минобрнауки N 2074, грантом РФФИ 12-01-00457 и грантом НШ 2504.2014.1.

Коффициенты $b_1 \geqslant 0$ и $c_2 \geqslant 0$ называют константами внутривидовой конкуренции. Если же популяции взаимодействуют, то соответствующие уравнения приобретают вид

$$u_t = u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \quad v_t = v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \quad t > 0.$$

При этом коэффициенты c_1 и b_2 могут иметь разные знаки. Различают три варианта таких моделей:

а) модель хищник – жертва, если $c_1 > 0$, $b_2 < 0$. При этом u представляет плотность популяции хищников, а v – плотность популяции жертв. Если же $c_1 < 0$, $b_2 > 0$, то популяции меняются ролями;

б) модель конкуренции, если $c_1 > 0$, а $b_2 > 0$. В рамках этой модели члены, описывающие взаимодейтсвие, оказываются отрицательными и уменьшают скорость роста популяций. Это означает, что обе популяции состязаются за ресурсы;

в) модель симбиоза, если $c_1 < 0$ и $b_2 < 0$. При этом обе популяции выигрывают от взаимодействия.

Частный случай $b_1 = c_2 = 0$ модели хищник – жертва назывют системой уравнений Лотка–Вольтерра.

Дальнейшее изучение динамики популяций привело к необходимости учета диффузии, и рассмотрению уравнений вида

$$u_t - D\Delta u = uf(x,u), \quad u(0,x) = u_0(x),$$

где Δ – оператор Лапласа и $D > 0$. Такие уравнения называют уравнениями реакции – диффузии, и при $f(x,u) = a(x) - b(x)u$ появились в работах Колмогорова–Петровского–Пискунова и Фишера.

Описание динамики сосуществования нескольких популяций привело к рассмотрению систем уравнений вида

$$u^l_t - \sum_{q=1}^{d} D^{lq}\Delta u^q - \sum_{q=1}^{d} B^{lq}\cdot\nabla u^q = u^l f(x,u), \quad u^l(0,x) = u^l_0(x),$$
$$l, q = 1, \ldots, m,$$

и оказалось связано с новыми проблемами, что потребовало развития новых методов исследования. Отметим, что системы этого вида можно разбить на два больших подкласса в зависимости от того, является ли матрица D диагональной, т.е. имеет вид $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_m)$, или недиагональной $D = (d_{lq})^d_{l,q=1}$. В последнем случае соответствующие уравнения назывыают иногда параболическими уравнениями с кросс-диффузией.

Нас будет интересовать задача Коши для системы квазилинейных параболических уравнений последнего типа, т.е. задача Коши вида

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}\Delta[u(d_1+\alpha_{11}u+\alpha_{12}v)] + (a_1 - b_1 u - c_1 v)u, \\ v_t = \frac{1}{2}\Delta[v(d_2+\alpha_{21}u+\alpha_{22}v)] + (a_2 - b_2 u - c_2 v)v \\ u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \quad x \in R^d, \end{cases} \tag{$*$}$$

где α_{ij}, a, b, c – положительные константы. Решению этой задачи Коши посвящено большое количество работ (см., например, обзор Юнгеля [4]).

Целью этой работы является построение вероятностного представления обобщенного решения задачи Коши вида $(*)$. Для простоты мы ограничимся здесь рассмотреннием системы двух уравнений в одномерном случае, т.е. положим $x \in R$, $d = 2$ и рассмотрим задачу Коши вида

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}(u[u+v])_{xx} + (1-u-v)u, & u(0,x) = u_0(x), \\ v_t = \frac{1}{2}[v(u+v)]_{xx} + \gamma(1-\alpha u - \beta v)v, & v(0,x) = v_0(x), \end{cases} \tag{$**$}$$

где β, γ и k – положительные константы.

Построение обобщенного решения задачи Коши $(**)$ будет проведено в три этапа. На первом этапе мы построим стохастическую систему уравнений, ассоциированную с системой $(**)$, на втором этапе исследуем эту систему и докажем существование и единственность ее решения. На третьем этапе проверим, что решение стохастической системы, полученной на первом этапе, позволяет построить вероятностное представление решения исходной параболической системы $(**)$. Для реализации этой программы нам понадобится ряд обобщений результатов теории стохастических потоков Куниты [5–7], полученных нами ранее в работах [8,9]. Наряду с этим мы воспользуемся результатами работ [10,11], где были построены вероятностные представления обобщенных решений задачи Коши для некоторых систем параболических уравнений с кросс-диффузией. В отличие от систем, рассмотренных в в этих работах, система $(**)$ допускает вероятностное представление в терминах одного марковского процесса, что позволит также воспользоваться подходом, основанном на теории обратных стохастических уравнений (ОСДУ), развитой в работах Парду и Пенга [12], и применить результаты работы [16].

§1. Вероятностные подходы к построению решения параболических систем с кросс-диффузией

1.1. Многочастичный подход. Один из вероятностных подходов к изучению систем с кросс-диффузией основан на построении стохастической динамики отдельных частиц, характеризуемых типом популяции и пространственной локализацией частицы и изученем поведения системы в пределе при бесконечном росте числа частиц. Существует ряд работ, посвященных этому общему подходу, называемому теорией среднего поля, и появившемуся впервые в работах, связанных с уравнением Власова. Основные идеи этого подхода к изучению нелинейных систем с кросс-диффузией могут быть сформулированы следующим образом [13].

Рассмотрим две взаимодействующие популяции частиц и пусть динамика отдельной частицы i-й популяции описывается случайным процессом $X^i_{j_i}(t) \in R^d$, $j_i = 1, \dots, n$, $i = 1, 2$.

Лагранжев подход к описанию такой системы основан на задании динамики системы в терминах случайных процессов $X^i_{j_i}(t)$, удовлетворяющих системе стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) следующего вида

$$\begin{aligned} dX^i_j(t) &= F^i_j(X^1_1(t), \dots, X^1_n(t), X^2_1(t), \dots, X^2_n(t))dt + \sigma^i_n dw^i_j(t), \\ X^i_j(0) &= X^i_{j0}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь функции $F^i_j : R^{2n} \to R^d$ задают закон взаимодействия частиц, $w^i_j(t) \in R^d$ – независимые винеровские процессы, $i = 1, 2$.

Пусть $\mathcal{M}(R^d)$ – пространство мер Радона на R^d. Состояние индивидуальной частицы $X^i_j(t)$ можно описать в терминах мер $\delta_x(G), G \subset R^d$, вида

$$\delta_{X^i_j(t)}(G) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad X^i_j(t) \in G, \\ 0, & \text{если} \quad X^i_j(t) \notin G, \end{cases}$$

а пространственное распределение частиц в момент t выражается в терминах эмпирических мер

$$u^i_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{X^i_j(t)} \in \mathcal{M}(R^d), \tag{2}$$

определяющих относительную частоту частиц i-й популяции. Вводя соответствующую регуляризацию при $\epsilon > 0$,

$$\kappa_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\kappa_\epsilon(x/\epsilon), \quad \kappa \in C_0^\infty(R^d), \quad \kappa \geqslant 0, \quad \text{и} \int\limits_{R^d} \kappa(y)dy = 1,$$

можно задать суммарную силу I_j^i, воздействующую на частицу j-й популяции, расположенную в точке $X_j^i(t)$, вследствие взаимодействия с другими частицами, с помощью соотношения

$$I_j^i = \sum_{k=1}^{2} \frac{a_{ik}}{n} \sum_{m=1}^{n} \kappa_\epsilon(X_j^i(t) - X_m^k(t))$$

или, используя операцию свертки $*$,

$$I_j^i = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(u_n(t) * \kappa_\epsilon)(X_j^i(t)). \tag{3}$$

В результате лагранжево описание динамики рассматриваемой системы взаимодействующих частиц в терминах эмпирических мер имеет вид следующей системы СДУ

$$dX_j^i(t) = F^i[u_n^1(t), u_n^2(t)](X_j^i(t))dt + \sigma_n^i dw_j^i(t), j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

При этом предполагается, что $F^i = F_1^i + F_2^i$, где

$$F_1^i[u_n^1(t), u_n^2(t)](X_j^i(t)) = -\nabla I_j^i = -\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(u_n(t) * \nabla\kappa_\epsilon)(X_j^i(t)), \tag{5}$$

$$F_2^i[u_n^1(t), u_n^2(t)](X_j^i(t)) = b_i \nabla\Phi(X_j^i(t)), \tag{6}$$

$\Phi : R^d \to R$ – заданный потенциал и $b_i \in R$.

Построим соответствующее эйлерово описание. Пусть

$$\langle \mu, g \rangle = \int\limits_{R^d} g(y)\mu(dy)$$

обозначает спаривание между $\mathcal{M}(R^d)$ и пространством $C_0(R^d)$ непрерывных функций с компактными носителями и $u \cdot h = \sum\limits_{m=1}^{d} u_m h_m$ – скалярное произведение в R^d.

Из формулы Ито для $f(t) \in C_0^2(R^d)$ получим равество

$$\begin{aligned}
\langle u_n^i(t), f(t)\rangle &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(t, X_j^i(t)) \\
&= \langle u_n^i(0), f(0)\rangle - \sum_{k=1}^2 a_{ik}\int_0^t \langle u_n^i(s), [u_n^k(s) * \nabla\kappa_\epsilon]\nabla f(s) ds \\
&+ b_i \int_0^t \langle u_n^i(s), \nabla\Phi \cdot \nabla f(s)\rangle ds \qquad (7)\\
&+ \int_0^t \langle u_n^i(s), f_s(s) + \frac{1}{2}(\sigma_n^i)^2 \Delta f(s)\rangle ds \\
&+ \frac{\sigma_n^i}{n}\sum_{j=1}^n \int_0^t \nabla f(X_j^i(s)) \cdot dw_j^i(s).
\end{aligned}$$

Заметим, что последнее слагаемое в правой части (7) представляет собой единственный явный источник случайности. Это показывает, что и при эйлеровом подходе рассматриваемая система сохраняет стохастичность, присущую каждой отдельной частице, до тех пор пока число частиц большое, но конечное. Однако, в силу неравенства Дуба, для любой функции $f \in L^\infty([0,T]; W^{1,\infty}(R^d))$ величина

$$\zeta_n^i(t) = \frac{\sigma_n^i}{n}\sum_{j=1}^n \int_0^t \nabla f(X_j^i(s)) \cdot dw_j^i(s)$$

стремится к нулю по вероятности при $n \to \infty$ и, следовательно, эйлерово описание становится детерминированным, если число частиц стремится к бесконечности.

Предположим теперь, что семейство мер $u_n^i(t)$ сходится к $u_\infty^i(t)$ при $n \to \infty$ и пусть $u^i(t)$ – плотность предельной меры $u_\infty^i(t)$ по мере Лебега. Тогда для любой $f \in L^\infty([0,T]; W^{1,\infty}(R^d))$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n^i(t), f(t)\rangle = \langle u_\infty^i(t), f(t)\rangle = \int_{R^d} f(t,x) u^i(t,x) dx \qquad (8)$$

и, при $n \to \infty$, из (7) следует равенство

$$\begin{aligned}\int\limits_{R^d} f(t,x)u^i(t,x)dx = \int\limits_{R^d} f(0,x)u^i(0,x)dx \\ - \sum_{k=1}^{2} a_{ik} \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} u^i(s,x)\nabla u_k(s,x)\cdot\nabla f(s,x)dxds \\ + b_i \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} u^i(s,x)\nabla\Phi(x)\cdot\nabla f(s,x)dxds \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{R^d} u^i(s,x)[\partial_s f(s,x) + \frac{1}{2}\sigma_i^2\Delta f(s,x)]dxds.\end{aligned} \tag{9}$$

По определению, из соотношения (9) следует, что пара функций u^i, $i = 1, 2$, представляет собой слабое решение следующей задачи Коши

$$\partial_t u^i - \operatorname{div}\big(u^i[a_{i1}\nabla u^1 + a_{i2}\nabla u^2]\big) - \frac{\sigma_i^2}{2}\Delta u^i = 0, \quad u^i(0,x) = u_{i0}(x). \tag{10}$$

Замечание. Систему (10), которой удовлетворяют функции $u^i_\infty(t)$, полученные в пределе при стремлении числа взаимодействующих частиц к бесконечности, можно интерпретировать как систему уравнений среднего поля для пары популяций. В следующем параграфе мы выведем стохастические уравнения, которые естественно интерпретировать как стохастическое описание соответствующего среднего поля.

§2. Симулирование среднего поля и стохастические потоки

При рассмотрении альтернативного вероятностного подхода в этой работе мы ограничимся одномерным случаем и рассмотрим систему вида (∗∗), а именно, систему

$$u_t^1 = \frac{1}{2}(u^1[u^1 + u^2])_{xx} + (1 - u^1 - u^2)u^1, \quad u^1(0,x) = u_{01}(x) = u_0(x), \tag{1}$$

$$u_t^2 = \frac{1}{2}[u^2(u^1 + u^2)]_{xx} + \gamma(1 - \alpha u^1 - \beta u^2)u^2, \quad u^2(0,x) = u_{02}(x) = v_0(x). \tag{2}$$

Для того, чтобы построить обобщенное решение задачи Коши (1), (2) нам понадобится ряд функциональных пространств:

• пространство Шварца $\mathcal{D}$ бесконечно-дифференцируемых скалярных функций h на R с компактными носителями и двойственное к нему пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'$;

• гильбертово пространство $L^2(R)$ со скалярным произведением

$$\langle u, f\rangle = \int\limits_R u(x)f(x)dx$$

и нормой $\|u\|^2 = \int\limits_R |u(x)|^2 dx$;

• соболевское пространство $W^{k,2} = W^k$ – пополнение пространства $\mathcal{D}$ по норме

$$\|u\|_k = \left[\int\limits_R \left|\frac{\partial^k u(x)}{\partial x^k}\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $k \in \mathbf{Z}$ и двойственное к нему пространство $W^{-k,2} = W^{-k}$ с нормой $\|\cdot\|_{-k}$;

• банахово пространство $\mathcal{W}^k = C(s,T;L^2(R)) \cap L^2([s,T];W^k)$ с нормой

$$\|u\|_{\mathcal{W}} = \left(\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2 + \int\limits_0^T \|u(t)\|_k^2 dt\right)^{1/2}.$$

Говорят, что задача Коши (1), (2) имеет слабое обобщенное решение $u = (u^1, u^2)$, $u^i \in \mathcal{W}^1, i = 1,2$, если для любой дифференцируемой функции $h(t) \in C_0^\infty(R)$ выполняются интегральные тождества

$$\begin{aligned}\langle h(t), u^i(t)\rangle - \langle h(0), u^i(0)\rangle = &\int\limits_0^t \Big\langle (a_i - \beta_i u^1(s) - \gamma_i u^2(s))h(s), u^i(s)\Big\rangle ds \\ &+ \int\limits_0^t \Big\langle [\partial_s h(s) + \frac{1}{2}(u^1 + u^2)h_{xx}(s)], u^i(s)\Big\rangle ds, \\ &\qquad i = 1,2,\end{aligned} \tag{3}$$

где $a_1 = 1, a_2 = \gamma,$, $\beta_1 = \gamma_1 = -1, \beta_2 = \gamma_2 = -\frac{\gamma}{\kappa}$.

Наша ближайшая цель – найти случайные процессы, в терминах которых можно было бы представить обобщенные решения $u^i(t,x)$ системы (1), (2). Для этого нам понадобится ряд результатов теории стохастических потоков Куниты, которые будут приведены в следующем параграфе в удобном для дальнейшего виде.

Проведем вначале априорное исследование поставленной задачи, т.е. предположим, что существует единственное решение u^1, u^2 системы (1), (2), где u^1, u^2 – положительные ограниченные дифференцируемые функции, принадлежащие классу $\mathcal{W}^1$. Анализ интегральных тождеств (2) позволяет заметить, что естественно рассмотреть марковский случайный процесс $\xi(\theta) \in R^1$ и его мультипликативные функционалы, порождающие эволюционные семейства $V^i(s,t)$ в пространстве $B(R)$ измеримых ограниченных функций.

Для того, чтобы построить такие процессы, предположим, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и определенный на нем стандартный винеровский процесс $w(t) \in R^1$. Обозначим

$$M^{u^1,u^2}(\xi(\theta)) = \sqrt{u^1(\theta,\xi(\theta)) + u^2(\theta,\xi(\theta))} \tag{4}$$

и рассмотрим стохастические уравнения

$$d\xi(\theta) = M^{u^1,u^2}(\xi(\theta))dw(\theta), \quad \xi(s) = y, \tag{5}$$

$$d\eta^i(\theta) = g_i^{u^1,u^2}(\xi(\theta))\eta^i(\theta)d\theta, \quad \eta^i(s) = h^i, \quad i = 1,2. \tag{6}$$

В силу приведенного выше априорного предположения о существовании положительных функций $u^1(t,x)$, $u^2(t,x) \in \mathcal{W}^1$, из общей теории СДУ следует, что решения $\xi(\theta), \eta^i(\theta)$ СДУ (5), (6) существуют и единственны. При этом решение $\xi(\theta)$ уравнения (5) представляет собой марковский процесс, а решения $\eta^i(\theta)$ уравнений (6) определяют мультпликативные функционалы от этого процесса. С другой стороны, пару $\xi(\theta), \eta(\theta) = (\eta^1(\theta), \eta^2(\theta)) \in R^2$ можно рассматривать как марковский процесс $\zeta(\theta) = (\xi(\theta), \eta(t)) \in R^3$. Как нетрудно проверить, сужение генератора эволюционного семейства $V^i(s,t), i = 1,2$, на пространство дважды дифференцируемых функций $C_0^2(R)$ имеет вид

$$\mathcal{A}_i^{u^1,u^2} f(x) = (u^1 + u^2) f_{xx} + g_i^{u^1,u^2} f, \tag{7}$$

где

$$g_i^{u^1,u^2} = a_i - \beta_i u^1 - \gamma_i u^2. \tag{8}$$

Если при этом функции $f^i(s,y) = V^i(s,T) f_{0i}(y)$ дважды дифференцируемы, то, как нетрудно проверить, они являются классическими решениями следующей системы параболических уравнений

$$f^i_s(s,y)+\frac{1}{2}[M^{u^1,u^2}]^2(y)f^i_{yy}(s,y)+g_i^{u^1,u^2}f^i(s,y)=0, \qquad (9)$$

$f^i(t,y)=f^i_0(y)$.

Пусть случайные процессы $\xi_{s,y}(\theta),\eta^i(\theta)$ удовлетворяют СДУ (5), (6), а $\widehat{\xi}_{t,x}(\theta)=\xi(t-\theta)$ – обращенный во времени процесс. Воспользовавшись результатами работ [6–9], покажем, что функции

$$u^i(t,x)=\mathbf{E}[\eta^i(0)u_{0i}(\widehat{\xi}_{0,x}(t))] \qquad (10)$$

определяют обобщенные решения уравнений (1) и (2) соответственно.

С этой целью, наряду с уравнениями (5), (6), (10), рассмотрим стохастическое уравнение, которому удовлетворяет процесс $\widehat{\xi}_{t,x}(\theta)$, а также соотношения, определяющие вероятностные представления производных $u^i_x(t,x)$. Для этого нам понадобится ряд дополнительных утверждений.

Пусть $Z(t)\in R^1$ – заданный семимартингал и $Y(t)\in R^1$ – решение линейного СДУ

$$Y(t)=1+\int_0^t Y(\theta)dZ(\theta). \qquad (11)$$

Пусть $Y(t)=\mathcal{E}(Z(t))$ и

$$[Z,Z]=\lim_{\max|t_{k+1}-t_k|\to 0}\sum_{k=1}^n (Z(t_{k+1})-Z(t_k))^2$$

– квадратичная вариация процесса Z, $0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n=t$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть Z – мартингал и $Z(0)=0$. Тогда случайные величины $\mathcal{E}(Z)$ и $\mathcal{E}(-Z+[Z,Z])$ обратимы, т.е.*

$$\mathcal{E}(Z)\mathcal{E}(-Z+[Z,Z])=1.$$

Пусть u^1,u^2 – заданные строго положительные ограниченные и дифференцируемые функции. Рассмотрим стохастическое уравнение

$$d\xi(\theta)=-\sqrt{u^1(\theta,\xi(\theta))+u^2(\theta,\xi(\theta))}dw(\theta), \quad \xi(0)=y \qquad (12)$$

и пусть $\widehat{\xi}(\theta)=\xi(t-\theta)$ – обращенный по времени процесс. Обозначим $J_{0,\theta}(y)=\frac{\partial\xi_{0,y}(\theta)}{\partial y}$ – якобиан отображения $\phi_{s,t}$, порожденного процессом $\xi_{0,y}(\theta)$, удовлетворяющим (12), по формуле $\phi_{0,\theta}(y)=\xi_{0,y}(\theta)$, и пусть

$\widehat{J}_{t,\theta}(x) = \frac{\partial \widehat{\xi}_{0,x}(\theta)}{\partial x}$ – якобиан отображения $\psi_{t,\theta}$, порожденного процессом $\widehat{\xi}_{0,x}(\theta)$ по формуле $\psi_{t,\theta}(x) = \widehat{\xi}_{0,x}(\theta)$.

Теорема 2.2. *Пусть $\xi(\theta)$ удовлетворяет (12) и $\widehat{\xi}(\theta) = \xi(t-\theta)$. Тогда якобианы $J_{0,\theta}(y)$ и $\widehat{J}_{t,\theta}(x)$ удовлетворяют соответственно СДУ*

$$dJ(\theta) = -M_y^{u^1,u^2}(\xi(\theta))J(\theta)dw(\theta), \quad J(0) = I, \tag{13}$$

$$d\widehat{J}(\theta) = \widehat{J}(\theta)M_x^{u^1,u^2}(\widehat{\xi}(\theta))dw(\theta) + \widehat{J}(\theta)[M_x^{u^1,u^2}(\widehat{\xi}(\theta))]^2 d\theta, \ \widehat{J}(0) = I, \tag{14}$$

Доказательство. Результат немедленно вытекает из леммы 2.1. □

Ряд вычислений, которые нам придется проводить ниже, будет существенно упрощен, если рассмотреть СДУ (12) в форме Стратоновича. Пусть $g = u^1 = u^2$ и $M^g(x) = \sqrt{g(x)}$. Напомним, что стохастические дифференциалы в форме Ито $M^g(\xi(t))dw(t)$ и в форме Стратоновича $M^g(\xi(t)) \circ dw(t)$ связаны соотношением

$$M^g(\xi(t)) \circ dw(t) = \frac{1}{2}M_x^g(\xi(t))M^g(\xi(t))dt + M^g(\xi(t))dw(t).$$

Перепишем уравнение (12) в виде

$$d\xi(\theta) = m^g(\xi(\theta))d\theta - M^g(\xi(\theta)) \circ dw(\theta), \quad \xi(s) = y, \tag{15}$$

где $m^g(y) = \frac{1}{2}M_y^g(y)M^g(y)$.

Из теоремы 4.2.2 [5] вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть $\phi_{s,t}(y) = \xi(t)$ удовлетворяет СДУ (12), коэффициент диффузии которого принадлежат классу C^k при $(k \geqslant 1)$. Тогда обратный поток $[\phi_{s,t}]^{-1} = \psi_{t,s}$ удовлетворяет СДУ*

$$d\psi_{t,x}(\theta) = \widehat{J}_{t,\theta}(\psi_{t,x}(\theta))m^g(x))d\theta + \widehat{J}_{t,\theta}(\psi_{t,x}(\theta))M^g(x) \circ dw(\theta), \tag{16}$$

где $\widehat{J}_{t,\theta}(x) = [\frac{\partial \phi_{\theta,t}}{\partial y}]^{-1}(x)$ и $J_{\theta,t}(y) = \frac{\partial \phi_{\theta,t}(y)}{\partial y}$ – якобиан отображения $\phi_{\theta,t}$. При этом отображение $\psi_{t,\theta} : x \to \psi_{t,\theta}(x)$ является C^k-диффеоморфизмом.

Случайный процесс $\xi_{s,y}(t)$, удовлетворяющий уравнению (12), обладает марковским свойством и, как известно, порождает как эволюционное семейство $U(s,t)$, действующее в пространстве измеримых ограниченных функций $B(R)$, так и эволюционное семейство $Z(s,t)$, действующее в пространстве $L^2(R)$ квадратично интегрируемых функций. Действие этих отображений задается соотношениями

$$\begin{aligned} U(s,t)f(y) &= \mathbf{E}[f(\xi_{s,y}(T))], \text{ если } f \in B(R) \text{ и} \\ Z(s,t)h(y) &= \mathbf{E}[f(\xi_{s,y}(T))], \text{ если } f \in L^2(R). \end{aligned}$$

Рассмотрим сопряженное к Z эволюционное семейство Z^+, действующее в $L^2(R)$ и заданное соотношением

$$\begin{aligned} \int\limits_R Z(t,0)f(x)h(x)dx &= \int\limits_R \mathbf{E}[f(\widehat{\xi}_{0,x}(t))]h(x)dx \\ &= \int\limits_R f(y)\mathbf{E}[h(\xi_{0,y}(t))J_{0,t}(y)]dy \\ &= \int\limits_R f(y)Z^+(0,t)h(y)dy \end{aligned} \tag{17}$$

для любых $f, h \in L^2(R)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int\limits_R f(y)Z^+(t,0)h(y)dy &= \int\limits_R \mathbf{E}[f(\widehat{\xi}_{0,x}(t))]h(x)dx \\ &= \int\limits_R f(y)\mathbf{E}[h(\xi_{0,y}(t))J_{t,0}(y)]dy \end{aligned}$$

и справедливы соотношения

$$Z^+(t,0)h(y) = \mathbf{E}[h(\xi_{0,y}(t))J_{t,0}(y)].$$

Заметим, что процесс $\xi_{0,y}(t)$ – это однородный по времени марковский процесс, так что рассматриваемые эволюционные семейства $Z(\theta,t) = Z(t-\theta)$ и $Z^+(t,\theta) = Z^+(\theta - t)$ представляют собой полугруппы.

Аналогичные рассуждения верны и в том случае, когда

$$\int\limits_R Z(0,t)f(x)h(x)dx = \int\limits_R \mathbf{E}[f(\xi_{0,x}(t))]h(x)dx \tag{18}$$

$$= \int\limits_R f(y)E[h(\widehat{\xi}_{0,y}(t))\widehat{J}_{t,0}(y)dy] = \int\limits_R f(y)Z^+(t,0)h(y)dy$$

для любых $f, h \in L^2(R)$.

Сужение производящего оператора $\mathcal{A}^+$ эволюционного семейства $Z^+(t,s)$ на соболевское пространство W^2 можно вычислить с использованием классической формулы Ито. Производящий оператор $\mathcal{A}$ исходной полугруппы $Z(t)$ – это двойственный оператор по отношению к $\mathcal{A}^+$ в смысле спаривания соболевских пространств W^k и W^{-k} или скалярного произведения в $L^2(R)$. При этом для вычисления генератора полугруппы Z_t^+, используя ее вероятностное представление, удобно воспользоваться соответствующим обобщением формулы Ито (см. [7]).

Пусть $\mathcal{A}(u)$ – оператор, сопряженный к оператору

$$\mathcal{A}^+(u) = \frac{1}{2}[M^u]^2\Delta, \tag{19}$$

т.е. оператор, заданный соотношением $\langle \mathcal{A}^u v, h\rangle = \langle v, [\mathcal{A}^u]^+ h\rangle$ для любой $h \in W^2$. Обобщенная формула Ито, позволяющая вычислять вид этих операторов, имеет следующий вид.

Лемма 2.2. *Пусть $f(t)$ – непрерывная функция со значениями в W^k для некоторого $k \in \{-2,-1,0,1,2\}$, стохастический поток $\phi_{s,t}$ задан соотношением вида (7) и $\psi_{t,s}$ – это соответствующий обращенный по времени стохастический поток. Тогда справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} f(t)\circ\phi^i_{s,t} = f(s) + \int\limits_s^t \frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}\circ\phi_{s,\theta}d\theta + \int\limits_s^t \frac{\partial f(\theta)}{\partial x}\circ\phi_{s,\theta}\cdot d\phi_{s,\theta} \\ + \int\limits_s^t [\mathcal{A}^u f(\theta)]\circ\phi_{s,\theta}d\theta, \end{aligned} \tag{20}$$

и

$$\begin{aligned} f(t)\circ\psi_{t,s} = f(t) + \int\limits_s^t \frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}\circ\psi_{t,\theta}d\theta - \int\limits_s^t \frac{\partial f(\theta)\circ\psi_{\theta,s}}{\partial x}\cdot d\psi_{\theta,s} \\ + \int\limits_s^t \mathcal{A}^u[f(t)\circ\psi_{\theta,s}]d\theta. \end{aligned} \tag{21}$$

При этом для обобщенной функции f действие операторов $\mathcal{A}^u$ понимается в смысле теории обобщенных функций.

В наших предыдущих работах [10], [11] было показано что вероятностное представление обобщенного решения задачи Коши вида (1), (2) можно построить с использованием результатов теории стохастических потоков следующим образом.

Рассмотрим систему стохастических соотношений

$$\begin{aligned} d\widehat{\xi}_{0,x}(\theta) &= \widehat{J}_{\theta,0}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))m^{u^1,u^2}(x))d\theta \\ &\quad + \widehat{J}_{\theta,0}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))M^{u^1,u^2}(x)\circ dw(\theta), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} d\widehat{J}(\theta) &= \widehat{J}(\theta)M_x^{u^1,u^2}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))\circ dw(\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2}\widehat{J}(\theta)[M_x^{u^1,u^2}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))]^2 d\theta, \quad \widehat{J}(0) = I, \end{aligned} \tag{23}$$

$$u^i(t,x) = \mathbf{E}\Big[\exp\Big\{\int_0^t g_i^{u^1,u^2}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))d\theta\Big\}u_{0i}(\widehat{\xi}_{0,x}(t))\Big], \ i = 1,2. \tag{24}$$

Если мы дополним полученную систему соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i(t,x)}{\partial x} &= \mathbf{E}\Big[\int_0^t \frac{\partial g^{u^1,u^2}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))}{\partial x}\widehat{J}(\theta)d\theta \\ &\quad \times \exp\Big\{\int_0^t g^{u^1,u^2}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))d\theta\Big\}u_{0i}(\widehat{\xi}_{0,x}(t))\Big] \\ &\quad + \mathbf{E}\Big[\exp\Big\{\int_0^t g^{u^1,u^2}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))d\theta\Big\}\frac{\partial u_{0i}(\widehat{\xi}_{0,x}(t))}{\partial x}\widehat{J}(t)\Big], \ i=1,2, \end{aligned} \tag{25}$$

то в результате получим замкнутую систему уравнений.

Таким образом, мы свели исходную задачу (1), (2) к некоторой стохастической задаче, и из результатов работ [6, 7] и следует, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Если u^1, u^2 – ограниченные регулярные обобщенные решения системы* (1), (2), *то решение системы* (22)–(25) *существует и единственно. При этом случайные процессы $\xi(t)$ и $\widehat{\xi}(t)$ обладают* *марковским свойством и справедливы оценки*

$$\mathbf{E}\|\widehat{\xi}(t)\|^2 < \infty, \quad \mathbf{E}\|\widehat{J}_{t,0}\|^2 < \infty.$$

§3. Существование и единственность решения стохастической системы

Для того, чтобы доказать существование и единственность решения системы (22)–(25), не опираясь на сделанное выше априорное предположение о существовании регулярных обобщенных решений системы (1)–(2), заметим, что уравнения (24), (25) – это нелинейные интегральные уравнения. Для того, чтобы построить их решения, рассмотрим следующую систему последовательных приближений

$$d\widehat{\xi}^n_{0,x}(\theta) = \widehat{J}^n_{\theta,0}(\widehat{\xi}^n_{0,x}(\theta))m^{u^1_n,u^2_n}(x))d\theta + \widehat{J}^n_{\theta,0}(\widehat{\xi}^n_{0,x}(\theta))M^{u^1,u^2}(x)\circ dw(\theta), \quad (1)$$

$$d\widehat{J}^n(\theta) = \widehat{J}(\theta)M^{u^1_n,u^2_n}_x(\widehat{\xi}^n(\theta))\circ dw(\theta) + \frac{1}{2}\widehat{J}(\theta)[M^{u^1_n,u^2_n}_x(\widehat{\xi}^n(\theta))]^2 d\theta, \qquad \widehat{J}^n(0) = I, \quad (2)$$

$$u^i_{n+1}(t,x) = \mathbf{E}\Big[\exp\Big\{\int\limits_0^t g^{u^1_n,u^2_n}(\widehat{\xi}^n_{0,x}(\theta))d\theta\Big\}u_{0i}(\widehat{\xi}^{n1}_{0,x}(t))\Big], \ i = 1,2. \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^i_{n+1}(t,x)}{\partial x} &= \mathbf{E}\Big[\int\limits_0^t \frac{\partial g^{u^1_n,u^2_n}(\widehat{\xi}^n_{0,x}(\theta))}{\partial x}\widehat{J}^n(\theta)d\theta \\ &\quad \times \exp\Big\{\int\limits_0^t g^{u^1_n,u^2_n}(\widehat{\xi}^n_{0,x}(\theta))d\theta\Big\}u_{0i}(\widehat{\xi}^n_{0,x}(t))\Big] \\ &\quad + \mathbf{E}\Big[\exp\Big\{\int\limits_0^t g^{u^1_n,u^2_n}(\widehat{\xi}^n_{0,x}(\theta))d\theta\Big\}\frac{\partial u_{0i}(\widehat{\xi}^n_{0,x}(t))}{\partial x}\widehat{J}(t)\Big], \ i = 1,2,\end{aligned} \quad (4)$$

и докажем существование предельных процессов

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{\xi}^n_{0,x}(\theta) = \widehat{\xi}_{0,x}(\theta), \quad \lim_{n\to\infty}\widehat{J}^n(\theta) = \widehat{J}(\theta)$$

и предельных функций

$$\lim_{n\to\infty}u^i_n(t,x) = u^i(t,x), \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\partial u^i_n(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial u^i(t,x)}{\partial x}.$$

Однако, для того, чтобы реализовать эту программу, уравнение (1) удобно заменить альтернативным стохастическим уравнением, которому удовлетворяет процесс $\widehat{\xi}(\theta)$ (см. [14]).

Пусть $w(\theta)$ – стандартный винеровский процесс и

$$\widetilde{w}(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta = 0, \\ w(t-\theta) - w(t) & \text{если } 0 < \theta < t, \\ -w(t), & \text{если } \theta = t. \end{cases}$$

Обозначим $\mathcal{F}_\theta$ естественную фильтрацию для $w(\theta)$ и $\mathcal{F}^\theta$ – естественную фильтрацию для $\widetilde{w}(\theta)$. При этом процесс $\widetilde{w}(\theta)$ является винеровским процессом относительно своей естественной фильтрации $\mathcal{F}^\theta$.

Говорят, что процесс $\xi(\theta)$ является обратимым $(\mathcal{F}_\theta, \mathcal{F}^\theta)$ семимартингалом, если $\xi(\theta)$ является $\mathcal{F}_\theta$-семимартингалом на $[0,t]$ и $\widetilde{\xi}(\theta)$ является $\mathcal{F}^\theta$-семимартингалом на $[0,t)$. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ – разбиение интервала $[0,t]$. Пусть $X(\theta)$ и $Y(\theta)$ – два семимартингала. Тогда величина

$$[X,Y](t) = X(0)Y(0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (X(t_{k+1}) - X(t_k))(Y(t_{k+1}) - Y(t_k))$$

называется квадратичной ковариацией пары X, Y, если предел в правой части последнего равенства существует.

Теорема 3.1. *Пусть $X(\theta)$ – $(\mathcal{F}_\theta, \mathcal{F}^{t-\theta})$-обратимый семимартингал и семимартингал $Y(\theta)$ обладает свойствами $Y(\theta) \in \mathcal{F}_\theta$ и $Y(\theta) \in \mathcal{F}^{t-\theta}$. Пусть существует квадратичная ковариация $[Y,X](\theta)$. Тогда два процесса $[Y,X](\theta)$ и $N(\theta) = \int_0^\theta Y(\theta)dX(\theta)$ являются обратимыми семимартингалами и при этом*

$$\widetilde{N}(\theta) + \widetilde{[Y,X]}(\theta) = \int_0^\theta Y(t-s)d\widetilde{X}(s).$$

Воспользовавшись результатами теоремы 3.1 и полагая

$$Y(\theta) = -M(\xi(\theta)), \quad X(\theta) = w(\theta), \quad N(\theta) = -\int_0^\theta M(\xi(s))dw(s),$$

нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.2. *Пусть* $\xi(\theta)$ *– решение СДУ*

$$d\xi(\theta) = -M^u(\xi(\theta))dw(\theta), \quad \xi(0) = x$$

для $0 \leqslant \theta \leqslant t$. *Поскольку* $w(\theta)$ *– обратимый* $(\mathcal{F}_\theta, \mathcal{F}^\theta)$*-семимартингал, то* $\widehat{\xi}(\theta) = \xi(t-\theta)$ *удовлетворяет следующему СДУ*

$$\widehat{\xi}(\theta) = \xi(t) - \int\limits_0^\theta M^u(\widehat{\xi}(s))d\widetilde{w}(s) + \int\limits_0^\theta M^u_x(\widehat{\xi}(s))M^u(\widehat{\xi}(s))ds, \qquad (5)$$

$0 \leqslant \theta \leqslant t$ *и* $\xi(\theta)$ *– обратимый* $(\mathcal{F}_\theta, \mathcal{F}^\theta)$*-семимартингал.*

Доказательство. Поскольку w – $(\mathcal{F}_\theta, \mathcal{F}^\theta)$-обратимый семимартингал, то $[-M^u(\xi), w](\theta) = -\int\limits_0^\theta M^u_x(\xi(s))M^u(\xi(s))ds$. При этом $M^u(\xi(\theta))$ $\mathcal{F}^{t-\theta}$-измерим, и, конечно, случайный процесс $M^u(\xi(\theta))$ $\mathcal{F}_\theta$-измерим. Таким образом, из теоремы 3.1 следует соотношение

$$\widetilde{\xi}(\theta) = \xi(t-\theta) - \xi(t) = -\int\limits_0^\theta M^u(\xi(t-s))d\widetilde{w}(s) - \int\limits_{t-\theta}^t M^u_x(\xi(\tau))M(\xi(\tau))d\tau.$$

Произведя замену переменных $\tau = t - s$ в последнем интеграле, получим

$$\xi(t-\theta) = \xi(t) - \int\limits_0^\theta M^u(\xi(t-s))d\widetilde{w}(s) + \int\limits_0^\theta M^u_x(\xi(t-s))M(\xi(t-s))ds,$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Возвращаясь к исследуемой задаче, заметим, что поскольку

$$M^u(x) = M(u^1(t,x), u^2(t,x)) = \sqrt{u^1(t,x) + u^2(t,x)},$$

последнее слагаемое в (5) имеет вид

$$M(u^1(t,x), u^2(t,x))\frac{\partial M(u^1(t,x), u^2(t,x))}{\partial x} = \frac{1}{2}\big[u^1_x(t,x) + u^2_x(t,x)\big].$$

Таким образом, полученные результаты позволяют заменить в системе (22)–(25) уравнение (22) уравнением (5) и исследовать новую систему СДУ, состоящую из уравнений (23)–(25) и уравнения

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}(\theta) = x - \int\limits_0^\theta \sqrt{u^1(s,\widehat{\xi}(s)) + u^2(s,\widehat{\xi}(s))}\,d\widetilde{w}(s) \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^\theta [u^1_x(s,\widehat{\xi}(s)) + u^2_x(s,\widehat{\xi}(s))]ds. \end{aligned} \tag{6}$$

Для того, чтобы доказать сходимость соответствующих последовательных приближений, нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

Пусть $v^1, v^2 \in \mathcal{W}^1$ – пара дифференцируемых ограниченных функций. Рассмотрим стохастические уравнения

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}(\theta) = x - \int\limits_0^\theta \sqrt{v^1(s,\widehat{\xi}(s)) + v^2(s,\widehat{\xi}(s))}\,d\widetilde{w}(s) \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^\theta [v^1_x(s,\widehat{\xi}(s)) + v^2_x(s,\widehat{\xi}(s))]ds, \end{aligned} \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned} d\widehat{J}(\theta) = \frac{1}{2}\widehat{J}(\theta)\frac{v^1_x(\theta,\widehat{\xi}(\theta)) + v^2_x(\theta,\widehat{\xi}(\theta))}{\sqrt{v^1(\theta,\widehat{\xi}(\theta)) + v^2(\theta,\widehat{\xi}(\theta))}}d\widetilde{w}(\theta) \\ + \widehat{J}(\theta)[\frac{[v^1_x(\theta,\widehat{\xi}(\theta)) + v^2_x(\theta,\widehat{\xi}(\theta))]^2}{v^1(\theta,\widehat{\xi}(\theta)) + v^2(s,\widehat{\xi}(\theta))}]d\theta, \quad \widehat{J}(t) = I, \end{aligned} \tag{8}$$

а также функции

$$U^i(t,x) = \mathbf{E}\Big[\exp\Big\{\int\limits_0^t g^{v^1,v^2}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))d\theta\Big\}u_{0i}(\widehat{\xi}_{0,x}(t))\Big], \quad i = 1,2, \tag{9}$$

и

$$\frac{\partial U^i(t,x)}{\partial x} = \mathbf{E}\Big[\int\limits_0^t \frac{\partial g^{v^1,v^2}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))}{\partial x}\widehat{J}(\theta)d\theta$$
$$\times \exp\Big\{\int\limits_0^t g^{v^1,v^2}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))d\theta\Big\}u_{0i}(\widehat{\xi}_{0,x}(t))\Big]$$
$$+\,\mathbf{E}\Big[\exp\Big\{\int\limits_0^t g^{v^1,v^2}(\widehat{\xi}_{0,x}(\theta))d\theta\Big\}\frac{\partial u_{0i}(\widehat{\xi}_{0,x}(t))}{\partial x}\widehat{J}(t)\Big],\ i=1,2. \tag{10}$$

Обозначим

$$K^u(t) = \sup_x u(t,x), \quad K_1^u(t) = \sup_x |u_x(t,x)|$$

и выведем необходимые априорные оценки.

Лемма 3.3. *Пусть v^1, v^2 – ограниченные дифференциируемые функции, подчиняющиеся оценкам*

$$\sum_{i=1}^2 [K^{v^i}(t)]^2 \leqslant \chi(t), \quad \sum_{i=1}^2 [K_1^{v^i}(t)]^2 \leqslant \varrho(t),$$

где $\chi(t)$, $\varrho(t)$ – ограниченные функции на некотором интервале $[0,T_1]$. Тогда функции $U^i(t), U_x^i(t)$, заданные соотношениями $(9), (10)$, также подчиняются оценкам

$$\sum_{i=1}^2 \left[K^{U^i}(t)\right]^2 \leqslant \chi(t), \quad \Big[\sum_{i=1}^2 [K_1^{U^i}(t)\Big]^2 \leqslant \varrho(t)$$

на этом интервале.

Доказательство. Используя явный вид функции $g_i(v^1,v^2) = a_i - b_i v^1 - c_i v^2$, нетрудно проверить, что, если $u_{0i} \geqslant \lambda > 0$, то функция U^i вида (9) подчиняется оценкам

$$\lambda e^{\int\limits_0^t [a_i - b_i K^{v^1}(\theta) - c_i K^{v^1}(\theta)]d\theta} \leqslant U^i(t,x) \leqslant K^{u_{0i}} e^{a_i t}$$

и $\sup_x |U^i(t,x)| \leqslant K_{u_{0i}} e^{a_i t}$. Для того, чтобы оценить функцию $U_x^i(t,x)$, оценим предварительно якобиан $\widehat{J}(t)$. Воспользуемся формулой Ито и соотношением (8), чтобы получить оценку

$$\mathbf{E}|\widehat{J}(t)|^2 \leqslant 1 + \int_0^t \mathbf{E}|\widehat{J}(\theta)|^2 \frac{5}{4} \frac{[K_1^{v^1}(\theta) + N^{v^2}(\theta)]^2}{K^{v^1}(\theta) + K^{v^2}(\theta)} d\theta,$$

из которой следует, что

$$\mathbf{E}|\widehat{J}(t)|^2 \leqslant \exp\Big\{C \int_0^t \kappa^2(\theta) d\theta\Big\}, \quad \text{где } \kappa(\theta) = K_1^{v^1}(\theta) + K_1^{v^2}(\theta), \quad C = \frac{5}{4}. \tag{11}$$

Таким образом, с учетом (10) и (11) получим

$$\Big|\frac{\partial U^i(t,x)}{\partial x}\Big|^2 \leqslant [K^{i0}]^2 \int_0^t [-\vartheta\kappa(\theta)] d\theta + [K_1^{i0}]^2 \exp\Big\{\int_0^t [a_i\theta + C\kappa^2(\theta)] d\theta\Big\} \tag{12}$$

и, если $a = \max(a_1, a_2)$, то $\kappa(t)$ подчиняется оценке

$$\kappa^2(t) \leqslant \kappa^2(0) \exp\Big\{\int_0^t [a\theta + C\kappa^2(\theta)] d\theta\Big\}. \tag{13}$$

Пусть $\upsilon(t)$ – решение интегрального уравнения

$$\upsilon(t) = \kappa^2(0) \exp\Big\{\int_0^t [a\theta + C\upsilon(\theta)] d\theta\Big\}.$$

Тогда функция $\upsilon(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{d\upsilon}{dt} = [at + C\upsilon(t)]\upsilon(t), \quad \upsilon(0) = \kappa^2(0).$$

Полученное ОДУ является уравнением Бернулли и его решение может быть найдено в явном виде

$$\upsilon(t) = \frac{\exp\{\frac{at^2}{2}\}\kappa^2(0)}{1 - C\frac{\kappa^2(0)}{a}\int_0^t e^{\frac{-a\tau^2}{2}} a d\tau} \tag{14}$$

Поскольку $\int\limits_0^t e^{\frac{-a\tau^2}{2}} a d\tau < \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$, то, если $\kappa^2(0) < a\sqrt{2\pi}$, то функция $v(t)$ ограничена на любом ограниченном интервале, если же эта оценка не имеет места, то функция $v(t)$ ограничена на интервале $[0, T_1]$, для которого справедлива оценка

$$C\frac{\kappa^2(0)}{a}\int\limits_0^{T_1} e^{\frac{-a\tau^2}{2}} a d\tau < 1. \tag{15}$$

В заключение заметим, что если $[K_1^{v^1}(t) + K_1^{v^2}(r)]^2 \leqslant v(t)$, то из (12), (13) следует, что и $[K_1^{U^1}(t) + K_1^{U^2}(t)]^2 \leqslant v(t)$ на соответствующем временном интервале и лемма доказана. □

Предложение 3.4. *Пусть функции $v^i \in \mathcal{W}^k \cap C^k$ и $u_{i0} \in \mathcal{W}^k$, $k \geqslant 1$ и $\psi_{t,s}$ – стохастический поток, порожденный решением СДУ* (6). *Тогда $u_{0i} \circ \psi_{t,s} \in \mathcal{W}^k$ и справедливы оценки*

$$\mathbf{E}\|u_{0i} \circ \psi_{t,s}\|_1^2 \leqslant C_{k,t_0}\|u_{0i}\|_1^2$$

и

$$\|U^i(t)\|_1^2 \leqslant C_{k,t_0}\|u_{0i}\|_1^2.$$

Доказательство этого предложения является непосредственным следствием теоремы 2.1 из [6].

Пусть Λ – пространство непрерывных ограниченных функций, заданных на R со значениями в R^2 с нормой $\|u\|_\Lambda = \sup_x |u(x)|$ и $\mathcal{M}$ – простраснство непрерывных ограниченных отображений интервала $[0, T_1]$ в Λ с нормой $\|u\|_{\mathcal{M}} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\|u(t)\|_\Lambda$. Рассмотрим отображение $\Phi(s, x, u)$, заданное соотношением $u(t, x) = \Phi(s, x, u)$, где $u = (u^1, u^2)$ и

$$u^i(t, x) = \mathbf{E}\Big[\exp\Big\{\int\limits_0^t g_i^{u^1,u^2}(\widehat{\xi}(\theta))d\theta\Big\}u_{0i}(\widehat{\xi}_{0,x}(t))\Big].$$

Теорема 3.5. *Пусть $u_{01}, u_{02} \in W^1$ – положительные функции и справедлива оценка $u_{01} + u_{02} > 0$. Тогда существует единственное решение стохастической системы* (23)–(25) *и* (4).

Доказательство. Из полученных в лемме 3.3 априорных оценок следует, что отображение Φ действует в пространстве $\mathcal{M}$. Покажем, что существует $N > 0$, такое что для любого $n > N$ отображение Φ^n является сжимающим отображением. Обозначим

$$l_n(s,x) = \|\Phi^n(s,x,u_1(s)) - \Phi^{n-1}(s,x,u_2(s))\|_\Lambda.$$

Из полученных выше оценок следует, что

$$l_1(s) \leqslant N_u \int\limits_0^t v(\theta)\|u_1(\theta) - u_2(\theta)\|_\Lambda d\theta$$

и, ввиду ограниченности $v(t) \leqslant G < \infty$ при $t \in [0, T_1]$, получим

$$l^n(s) \leqslant \frac{N_u^n G^n (t-s)^n}{n!}\|u_{01} - u_{02}\|_{\mathcal{M}}.$$

При этом для любых N_u, G и $|t-s|$ существует такое N, что при $n > N$ справедливо неравенство

$$\frac{N_u^n G^n (t-s)^n}{n!} < 1$$

и, следовательно, Φ – сжимающее отображение. Таким образом, теорема о сжимающих отображениях завершает доказательство существования предельных функций

$$u(s,x) = \lim u_n(s,x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n(s,x)}{\partial x}.$$

Существование предельных процессов

$$\widehat{\xi}(t) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(t) \;\; \text{и} \;\; \widehat{J}(t) = \lim_{n\to\infty} \widehat{J}^n(t)$$

вытекает из непрерывной зависимости решений рассматриваемых СДУ (7), (8) от своих коэффициентов.

На последнем этапе мы покажем, что функции $u^1(t,x), u^2(t,x)$, заданные соотношениями (23), (24), являются обобщенными решениями задачи Коши для исходной системы (1), (2).

С этой целью мы вновь заметим, что решение системы (23)–(25) определяет марковский процесс $\widehat{\xi}(t)$, который порождает эволюционное семейство $Q(t)$, действующее в пространстве $L^2(R) \times L^2(R)$ по правилу $Q(t)u_0 = \mathbf{E}[\gamma(t) \circ \psi_{t,0}]$, или эквивалентно $[Q(t)u_0]^i = \mathbf{E}[\gamma_i(t) \circ \psi_{t,0}]$. Покажем, наконец, что функции $u^i(t,x)$, заданные соотношениями (24), являются обобщенными решениями системы (1), (2). $\square$

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5. *Тогда соотношения* (24) *определяют обобщенные решения системы* (1), (2).

Доказательство. Пусть

$$\gamma^i(t) = \exp\Big\{ \int\limits_0^t g_i^{u^1,u^2}(\phi_{0,\theta})d\theta \Big\} u_{0i}. \tag{16}$$

Тогда

$$\frac{d\gamma^i(t)}{dt} = g^{u^1,u^2}(\phi_{0,t})\gamma_i(t), \quad \gamma_i(0) = u_{0i}.$$

Воспользовавшись обобщенной формулой Ито и вычисляя математическое ожидание, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\gamma_i(t) \circ \psi_{t,0}] = u_{i0} + \mathbf{E}\Big[\int\limits_0^t [g^{u^1,u^2}(\phi_{0,\theta})\gamma_i(\theta)] \circ \psi_{\theta,0} d\theta \Big] \\ + \mathbf{E}\Big[\int\limits_0^t \mathcal{A}^{u^1,u^2}(\gamma_i(\theta) \circ \psi_{\theta,0}) d\theta \Big], \end{aligned} \tag{17}$$

где действие оператора $\mathcal{A}^{u^1,u^2}$ понимается в обобщенном смысле, т.е.

$$\langle \mathcal{A}^{u^1,u^2} v, h \rangle = \langle v, [\mathcal{A}^{u^1,u^2}]^+ h \rangle.$$

Как следует из результатов работы [6], если $u_{0i} \in W^2$, то существуют положительные константы C_i, такие что

$$\mathbf{E}\|\gamma(t) \circ \psi_{t,0}\|_1^2 \leqslant \|u_{0i}\|_1^2,$$

следовательно, $u_i(t) \in W^1$.

Воспользовавшись обобщенной формулой Ито, и вычисляя математическое ожидание, получим равенство

$$E[\gamma_i(t) \circ \psi_{t,0}] = u_{0i} + \mathbf{E}\Big[\int\limits_0^t d\gamma_i(\theta) \circ \psi_{t,\theta}(\theta) d\theta + \int\limits_0^t \mathcal{A}^{u^1,u^2}(\gamma_i(\theta) \circ \psi_{t,\theta}(\theta)) d\theta \Big],$$

где действие оператора $\mathcal{A}^{u^1,u^2}$ понимается в обобщенном смысле.

Вычисляя производную по t от обеих частей последнего равенства, получим, что $U_i(t) = \mathbf{E}[\gamma_i(t) \circ \psi_{t,0}]$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\langle U_i(t), h \rangle = \langle U_i(t), [\mathcal{A}^{u^1,u^2}]^+ h \rangle.$$

С другой стороны, как было показано выше, любое обобщенное решение $u^1(t), u^2(t) \in W^1$ допускает представление вида (24) и, в силу единственности решения стохастической системы, отсюда следует, что обобщенное решение задачи Коши (1), (2) единственно в классе $\mathcal{W}^1$. $\square$

§4. ОСДУ и система параболических уравнений

В этом параграфе мы обсудим альтернативный вероятностный подход к системе (1), (2), основанный на теории прямых-обратных СДУ. Другими словами, мы построим систему ПОСДУ, ассоциированную с исходной задачей Коши. Точнее говоря, поскольку теория ПОСДУ ориентирована на обратную задачу Коши, то вначале мы сведем рассматриваемую задачу (1), (2) к соответствующей обратной задаче Коши. Для этого введем в рассмотрение функции $v^i(\theta, x) = u^i(t-\theta, x)$ и заметим, что, если u^1, u^2 удовлетворяют (1), (2), то v^1, v^2 удовлетворяют задаче Коши, которая, очевидно, имеет вид

$$v_s^1+\frac{1}{2}(v^1[v^1+v^2])_{xx}+(1-v^1-v^2)v^1 = 0, \quad v^1(t,x) = v_{01}(x) = u_0(x), \tag{1}$$

$$v_s^2+\frac{1}{2}[v^2(v^1+v^2)]_{xx}+\gamma(1-\alpha v^1-\beta v^2)v^2=0, \quad v^2(t,x)=v_{02}(x)=v_0(x). \tag{2}$$

Говорят, что задача Коши (1), (2) имеет слабое обобщенное решение $v = (v^1, v^2)$, $v^i \in \mathcal{W}^1, i = 1, 2$, если для любой дифференцируемой функции $h(t) \in C_0^\infty(R)$ выполняются интегральные тождества

$$\begin{aligned}\langle h(t), v^i(t)\rangle - \langle h(s), v^i(s)\rangle = \int_s^t \langle (a_i-\beta_i v^1(\theta)-\gamma_i v^2(\theta))h(\theta), v^i(\theta)\rangle d\theta \\ + \int_s^t \left\langle [\partial_\theta h(\theta) + \frac{1}{2}(v^1(\theta)+v^2(\theta))h_{xx}(\theta)], v^i(\theta)\right\rangle d\theta, \ i = 1, 2,\end{aligned} \tag{3}$$

где $a_1 = 1, a_2 = \gamma,, \beta_1 = \gamma_1 = -1, \beta_2 = \gamma_2 = -\frac{\gamma}{\kappa}$.

Ниже мы сохраним все обозначения предыдущих параграфов, однако будем считать, что процесс $\widehat{\xi}(\theta)$ удовлетворяет СДУ

$$d\widehat{\xi}(\theta) = \sqrt{v^1(\theta, \widehat{\xi}(\theta)) + v^2(\theta, \widehat{\xi}(\theta))}dw(\theta), \quad \widehat{\xi}(s) = x. \tag{4}$$

Заметим, что в предыдущих параграфвх этому СДУ подчинялся процесс $\xi(\theta)$.

Предположив, что v^1, v^2 – известные ограниченные дифференцируемые функции, удовлетворяющие в обобщенном смысле системе (1), (2), мы, как и выше, находимся в условиях работ [6,7] и, следовательно, можем воспользоваться полученными там результатами.

При этом для того, чтобы избежать возникновения ОСДУ с квадратичным по y генератором, наряду с процессом $\widehat{\xi}(\theta)$, удовлетворяющим (3), рассмотрим случайный процесс

$$\varrho_s^i(t) = \exp\left(\int_s^t g_i^{v^1,v^2}(\phi_{s,\theta})d\theta\right)u_0 \tag{5}$$

и функцию $U^i(t) = \mathbf{E}[\varrho_s^i(t)]$.

Предложение 4.1. *Пусть функции* $v^i \in \mathcal{W}^1 \cap C^k$ *и* $u_{i0} \in \mathcal{W}^k$, $k = 1, 2$. *Тогда* $u_{0i} \circ \phi_{s,t} \in \mathcal{W}^1$ *и справедливы оценки*

$$\mathbf{E}\|u_{0i} \circ \phi_{s,t}\|_1^2 \leqslant C_{k,t_0}\|u_{0i}\|_1^2$$

и

$$\|U^i(t)\|_1^2 \leqslant C_{k,t_0}\|u_{0i}\|_1^2.$$

Для любой функции $h \in \mathcal{D}$ можно определить случайный процесс

$$h_t(s,x) = h(\widehat{\xi}_{t,x}(s))\widehat{J}(\widehat{\xi}_{t,x}(s)). \tag{6}$$

Композицию элемента $v \in L^2(R)$ со стохастическим потоком $\phi_{s,t}$ зададим по формуле

$$\langle v \circ \widehat{\xi}_{s,\cdot}(t), h\rangle = \langle v, h_t(s,\cdot)\rangle, \tag{7}$$

вытекающей, как и в предыдущем параграфе, из формулы замены переменной под знаком интеграла

$$\langle v \circ \widehat{\xi}_{s,\cdot}(t), h\rangle = \int_R v(y)h(\xi_{s,y}(t))J(\xi_{,y}(s))dy = \int_R v(\widehat{\xi}_{t,x}(s))h(x)dx.$$

Отметим, что случайный процесс $h_t(s,x)$ можно использовать как случайную пробную функцию, если заменить в выражении (3) величину $\frac{\partial_\theta h(\theta)}{\partial\theta}d\theta$ на $d_\theta h(\theta, \xi(\theta)$. При этом из формулы Ито следует, что справедливо следующее утверждение [15].

Лемма 4.2. *Для любой тестовой функции $h \in \mathcal{D}$ случайный процесс $h_s(t,x)$ удовлетворяет соотношению*

$$h_s(t,x) = h(x) + \int\limits_s^t \mathcal{A}^{v^1,v^2}[h_s(\theta,x)]d\theta - \int\limits_s^t \frac{\partial[M^{v^1,v^2}(x)h_s(\theta,x)]}{\partial x}dw(\theta), \quad (8)$$

где $\mathcal{A}^{v^1,v^2}$ имеет вид (5).

Нетрудно проверить, что если $u_0^i \in \mathcal{W}^1$, и $v^i(s) \in \mathcal{W}^1$ – слабые решения системы (1), (2), то для любой $h \in \mathcal{D}$ справедливы равенства

$$\int\limits_\theta^t \langle dh_s(\tau,x), v^i(\tau)\rangle - \langle h_s(t), v_0^i\rangle + \langle h_s(s), v^i(s)\rangle + \int\limits_\theta^t \mathcal{E}_i(v(\theta), h_s(\theta))d\theta$$

$$= \int\limits_\theta^t \langle (a_i - \beta_i v^1(\theta) - \gamma_i v^2(\theta))h(\theta), v^i(\theta)\rangle d\theta, \quad i = 1,2, \quad (9)$$

где $\mathcal{E}_i(v(\theta),h) = \frac{1}{2}\langle([v^1+v^2]v^i)_x, h_x\rangle$. Из соотношений (8), (9) вытекает, что справедливо равенство

$$d_t h_s(t,x) - \mathcal{A}^{v^1,v^2}[h_s(t,x)]dt + \frac{\partial[M^{v^1,v^2}(x)h_s(t,x)]}{\partial x}dw(t) = 0. \quad (10)$$

Введем в рассмотрение случайные процессы

$$\begin{aligned} \zeta_i(\theta) &= e^{\int_s^\theta g_i^{v^1,v^2}(\xi_{s,x}(\tau))d\tau}, \\ y_{s,x}^i(\theta) &= \zeta_i(\theta)v^i(\theta, \xi_{s,x}(\theta)), \\ z_{s,x}^i(\theta) &= \zeta_i(\theta)M^{v^1,v^2}v_x^i(\theta,\xi(\theta)). \end{aligned} \quad (11)$$

Из интегрального тождества (3) с помощью стандартных рассуждений, основанных на использовании теоремы Ито о представлении квадратично интегрируемой случайной величины, согласованной с потоком σ-алгебр, порожденных винеровским процессом $\widetilde{w}(t)$, вытекает соотношение

$$dy^i(\theta) = z^i(\theta)d\widetilde{w}(\theta), y^i(t) = \zeta_s^i(t)u_{0i}(\xi_{s,x}(t)), \quad (12)$$

где процесс $\xi_{s,x}(t)$ – это случайный процесс, соответствующий стохастическому потоку $\phi_{s,t}$ обратному к стохастическому потоку $\psi_{t,s}$, порожденному процессом $\widehat{\xi}(\theta)$, удовлетворяющим СДУ (4). Как нетрудно вывести из результатов п.2, процесс $\xi_{s,x}(t)$ удовлетворяет прямому стохастическому уравнению

$$d\xi(\theta) = -\sqrt{v^1(\theta,\xi(\theta)) + v^2(\theta,\xi(\theta))}\,d\widetilde{w}(s) + [v^1_x(\theta,\xi(\theta)) + v^2_x(\theta,\xi(\theta))]d\theta \quad (13)$$

и соотношению $\xi_{s,x}(s) = x$.

Воспользовавшись соотношениями (12), перепишем уравнение (13) в виде

$$\begin{aligned} d\xi(\theta) &= -\sqrt{[\zeta^1(\theta)]^{-1}y^1(\theta)) + [\zeta^2(\theta)]^{-1}y^2(\theta))}\,d\widetilde{w}(\theta) \\ &+ \left[[\zeta^1(\theta)]^{-1}z^1(\theta) + [\zeta^2(\theta)]^{-1}z^2(\theta)\right] \\ &\times \left[\sqrt{[\zeta^1(\theta)]^{-1}y^1(\theta) + [\zeta^2(\theta)]^{-1}y^2(\theta)}\right]^{-1} d\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Полученная система ПОСДУ может быть исследована с помощью стандартной техники теории ПОСДУ [16].

Из приведенных выше результатов вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть* $u_0 \in \mathcal{H}^1$ *и существует единственное обобщенное решение* $(v^1, v^2) \in \mathcal{W}^1$ *системы* (1)–(2). *Тогда справедллива следующая вероятностная интерпретация этого решения*

$$v^i(s,x) = y^i_{s,x}(s), \quad (M^{v^1,v^2}v^i_x)(s,x) = z^i_{s,x}(s), \quad i = 1,2,$$

$ds \otimes dP \otimes dx$*-п.в.*, $\forall\theta \in [s,t]$. *Здесь процессы* $y^i_{s,x}(t), z^i_{s,x}(t), \xi_{s,x}(t)$ *удовлетворяют системе ПОСДУ* (12), (14), *а* $\zeta^i(t)$ *заданы соотношениями* (11).

Литература

1. L. Chen, A. Jüngel, *Analysis of a multi-dimensional parabolic population model with strong cross-diffusion.* — SIAM J. Math. Anal. **36** (2004), 301–322.
2. G. Galiano, M. Garzron, A. Jüngel, *Analysis and numerical solution of a nonlinear cross-diffusion model arising in population dynamics.*— Rev. Real Acad. Ciencias, Serie A. Mat. **95** (2001), 281–295.
3. S. Xu, *Existence of global solutions for a predator-prey model with cross-diffusion.* — Electron. J. Diff. Equations, **6** (2008), 1–14.
4. A. Jüngel, *Diffusive and nondiffusive population models.* In book "Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences" (2010), 397–425.
5. H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations.* Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).
6. H. Kunita, *Stochastic flows acting on Schwartz distributions.* — J. Theor. Probab. **7**, No. 2 (1994) 247–278.

7. H. Kunita, *Generalized solutions of stochastic partial differential equations.* — J. Theor. Probab. **7**, No. 2, (1994), 279–308.
8. Ya. Belopolskaya, W. Woyczynski, *Generalized solutions of nonlinear parabolic equations and diffusion processes.* — Acta Appl. Math. **96** (2007), 55–69.
9. Ya. Belopolskaya, W. Woyczynski, *Generalized solutions of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations and diffusion processes.* — Stochast. Dynam. **12**, No. 1 (2012), 1–31.
10. Ya. Belopolskaya, *Markov processes associated with fully nondiagonal systems of parabolic equations.* — Markov Process. Rel. Fields, No. 3 (2014), 452–478.
11. Ya. Belopolskaya, *Probabilistic counterparts for strongly coupled parabolic systems.* — Springer Proc. Math. Stat. Topics in Statistical Simulation. **114** (2014), 33–42.
12. E. Pardoux, S. Peng, *Backward Stochastic Differential Equations and Quasilinear Parabolic Partial Differential Equations.* — Lect. Notes CIS, **176**. Springer-Verlag (1992), 200–217.
13. J. Fontbona, S. Meleard, *Non local Lotka-Volterra system with cross-diffusion in an heterogeneous medium.* — J. Math. Biology (2014) 20–39.
14. P. Protter, Stochastic Integration and Differential Equations. Springer (2010).
15. A. Matoussi, M. Xu, *Sobolev solution for semi-linear PDE with obstacle under monotonicity condition.* — Electron. J. Probab. **13** (2008) 1035–1067.
16. Я. И. Белопольская, *Прямые-обратные стохастические уравнения, связанные с системами квазилинейных параболических уравнений и теоремы сравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **412** (2013), 15–46.

Belopolskaya Ya. I. A stochastic model for the Lotka–Volterra system with cross-diffusion.

We propose two approaches that allow to construct a probabilistic representation of a generalized solution of the Cauchy problem for a system of quasilinear parabolic equations. The system under consideration presents a population dynamics model for a prey-predator population. We construct two types of stochastic problem associated with this parabolic system that give the way to derive the required probabilistic representation.

С.-Петербургский Государственный
Архитектурно-Строительный Университет,
ул. 2-я Красноармейская 4,
Санкт-Петербург 190005, Россия
E-mail: yana.belopolskaya@gmail.com

Поступило 11 ноября 2014 г.