Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 430, 2014 г.

А. Л. Смирнов

О ПОЛЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Введение

Теорема Белого (см. [1]) утверждает, что комплексная компактная гладкая алгебраическая кривая X может быть определена над полем алгебраических чисел тогда и только тогда, когда существует отображение X в проективную прямую, разветвленное не более, чем над тремя точками.

Цель данной заметки – вовлечь эту теорему в несколько более широкий контекст, а именно обсудить связь между минимальной степенью трансцендентности $t(X)$ поля определения X и минимальным числом критических значений $r(X)$ конечных отображений из X в проективную прямую. Вычисление как $t(X)$, так и $r(X)$ для индивидуальной кривой X может быть весьма трудной задачей. Однако для кривых рода $\geqslant 1$ я не знаю ни одного контрпримера к следующему простому соотношению

$$r(X) = t(X) + 3. \tag{1}$$

Основным вопросом, рассматриваемым в работе, является вопрос о верности этого соотношения.

В середине 80-х годов прошлого века автор обнаружил связь соотношения (1) для общей кривой с теоремой Брилля–Нетера, пытаясь обобщить теорему Белого. После этого вопрос о верности соотношениия (1) задавался многим математикам. К сожалению, значительного прогресса в его решении пока нет. При обсуждении этого вопроса в Институте М. Планка в 1992 году М. Концевич отметил, что положительный ответ дал бы некоторое описание циклов на многообразии модулей алгебраических кривых. Кроме того, Е. Шиндер недавно указал мне препринт [3], где рассматриваются очень близкие вопросы.

Ключевые слова: алгебраическая кривая, поле определения, теорема Белого, проективная прямая, степень трансцендентности, ветвление, критическое значение, рациональная функция.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00420).

§1. Инварианты алгебраической кривой

Мы заинтересованы в изучении вполне классических объектов, а именно комплексных алгебраических многообразий. Однако некоторые из интересующих нас многообразий определены над полями, не имеющими естественного вложения в $\mathbb{C}$. Например, такова общая кривая заданного рода.

Для аккуратной работы с интересными для нас объектами сочтено удобным навести небольшой формализм.

1.1. Поля определения. Если явно не оговорено иное, то в данной работе под полем подразумевается поле нулевой характеристики. Алгебраическим многообразием будем называть морфизм схем $p : X \to \operatorname{Spec} K$, где K – поле, а p превращает X в алгебраическое многообразие над K.

Обычно алгебраическое многообразие будет обозначаться одним символом X, а эпитет "алгебраическое" может быть опущен. Если хочется явно связать с многообразием X поле K или стрелку p, то мы можем сказать, что K – поле определения X, а p назвать структурной стрелкой.

Под морфизмом многообразий $X \to Y$ будем понимать морфизм их структурных стрелок, то есть коммутативную диаграмму схем

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r, "\bar{f}"] & \operatorname{Spec} L, \end{tikzcd}$$

где K и L – соответствующие поля определения, а p и q – соответствующие структурные стрелки.

Обычно такой морфизм многообразий обозначается одним символом f, а вместо стрелки $\bar{f}$ указывается соответствующий морфизм полей $i_f : L \to K$.

Кроме того, под алгебраической кривой (или просто кривой) подразумевается полная, гладкая, абсолютно неприводимая алгебраическая кривая.

1.2. Геометрические инварианты. Здесь приводится определение геометрического инварианта и вводятся интересующие нас геометрические инварианты алгебраических кривых.

1.2.1. Пусть V – некоторый класс алгебраических многообразий. Будем говорить, что задан инвариант многообразий из V, если задано некоторое множество I и отображение

$$i : V \to I, X \mapsto i(X) \in I,$$

принимающее одно и то же значение на изоморфных многообразиях. Иными словами, равенство $[X] = [Y]$ должно влечь за собой равенство $i(X) = i(Y)$, где $[X]$ – класс изоморфизма X.

1.2.2. Пусть X и Y – многообразия. Будем говорить, что X и Y геометрически изоморфны, если существует поле C и вложения полей $K \to C$, $L \to C$ такие, что

$$[X \otimes_K C] = [Y \otimes_L C],$$

где расширения базы соответствуют вложениям K и L в C.

Геометрически изоморфные многообразия называются формами друг друга.

1.2.3. Пусть задан инвариант $i : V \to I$. Будем говорить, что i – геометрический инвариант, если $i(X) = i(Y)$ для геометрически изоморфных X и Y.

Например, род – геометрический инвариант кривой, а j-инвариант – геометрический инвариант кривой рода один.

1.3. Инвариант $t(X)$. Этот инвариант определен для всех многообразий. Пусть X – алгебраическое многообразие.

1.3.1. Положим

$$t(X) = \min_{X'} \operatorname{tr.deg}(K'/\mathbb{Q}),$$

где

(1) X' пробегает все формы многообразия X,
(2) K' – поле определения X',
(3) $\operatorname{tr.deg}(K'/\mathbb{Q})$ – степень трансцендентности поля K' над $\mathbb{Q}$.

Прямо из определения видно, что $t(X)$ – геометрический инвариант.

1.3.2. Например, пусть u – независимый параметр и E – компактификация кривой, заданной уравнением

$$y^2 = x^3 + ux + 1.$$

Несложно увидеть, что $t(E) = 1$.

С другой стороны, пусть F – компактификация кривой, заданной уравнением

$$y^2 = x^3 + u.$$

Несложно увидеть, что $t(F) = 0$.

1.3.3. Было бы важно понять характер поведения инварианта $t(X)$ в семействах. Рассмотрим такое семейство $p : X \to S$, где, например, S – неприводимое многообразие, а p – гладкий морфизм.

Рассмотрим следующее утверждение о полунепрерывности.

$$\text{множество } \{s \in S | t(X_s) \leqslant d\} \text{ замкнуто для каждого } d. \tag{2}$$

Если (2) верно, то при специализации инвариант $t(X)$ может только подскакивать. Иными словами,

$$t(X_s) \leqslant t(X_\eta), \tag{3}$$

где η – общая точка S, а s – замкнутая точка.

Я не знаю, верны ли утверждения (2) и (3).

1.4. Инвариант $r(X)$. Этот инвариант определен для кривых. Пусть X – алгебраическая кривая. Положим

$$r(X) = \min r(f : X' \to \mathbb{P}^1),$$

где X' пробегает все формы X, f пробегает все конечные морфизмы из X' в $\mathbb{P}^1$, а $r(f)$ – число критических значений f. Например, $r(\mathbb{P}^1) = 0$.

Прямо из определения видно, что $t(X)$ – геометрический инвариант. Кроме того, если кривая X определена над алгебраически замкнутым полем K, то $r(X)$ – минимальное число критических значений конечных отображений $X \to \mathbb{P}^1_K$.

§2. Связь $t(X)$ и $r(X)$

Здесь X – алгебраическая кривая. Если X – форма $\mathbb{P}^1$, то $t(X) = 0$ и $r(X) = 0$. Поэтому ниже по умолчанию $g(X) \geqslant 1$.

2.1. Основной вопрос. Теорема Белого равносильна следующему утверждению

$$r(X) = 3 \text{ тогда и только тогда, когда } t(X) = 0.$$

В свое время размышления над обобщениями этой теоремы привели автора к вопросу о верности соотношения

$$r(X) = t(X) + 3. \tag{4}$$

Ниже обсуждается вопрос о том, может ли соотношение (4) быть верно для любой кривой (положительного рода). Я не знаю ни одного контрпримера к этому утверждению.

2.2. Несколько замечаний.

2.2.1. Для любой кривой верно неравенство

$$r(X) \geqslant t(X) + 3.$$

Это неравенство соответствует "простой" (то есть неудивительной) части теоремы Белого и доказывается точно так же. Здесь это доказательство не приводится.

2.2.2. Из (4) вытекает, что $r(X) \geqslant 3$ для любой кривой положительного рода. Это и в самом деле так. Действительно, для конечного отображения $f : X \to \mathbb{P}^1$ пусть U – множество тех точек $\mathbb{P}^1$, над которыми f неразветвлено. По принципу Лефшеца можно считать, что X определена над $\mathbb{C}$. Ясно, что

$$\pi_1(U(\mathbb{C})) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } r(f) \leqslant 1; \\ \mathbb{Z}, & \text{если } r(f) = 2. \end{cases}$$

Таким образом, в случае $r(f) \leqslant 1$ отображение $f : f^{-1}(U) \to U$ – биекция и $X = \mathbb{P}^1$. В случае $r(f) = 2$ все накрытия $U = \mathbb{G}_m$ представлены отображениями $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, $z \mapsto z^n$. Таким образом, в этом случае также $X = \mathbb{P}^1$.

2.2.3. Равенство (4) верно для каждой кривой X рода $g(X) = 1$. Действительно, всякую кривую рода один можно двулистно разветвить над $\mathbb{P}^1$ с ветвлением над 4-мя точками. Пользуясь этим и результатом из 2.2.2, видим, что

$$3 \leqslant r(X) \leqslant 4.$$

Это доказывает утверждение с учетом теоремы Белого и неравенства 2.2.1.

2.2.4. Если утверждение (4) верно и инвариант $t(X)$ при специализации не может падать (см. 1.3.3), то не может падать и $r(X)$. Это не вполне очевидно. Например, если имеется одномерное семейство кривых и отображение в $\mathbb{P}^1$ из общего слоя, то это отображение может быть продолжено и в любой специальный слой за вычетом нескольких точек. Казалось бы, сужение этого отображения на специальный слой может быть распространено на весь специальный слой. При этом точки ветвления в $\mathbb{P}^1$ при специализации могут только склеиваться. Однако ограничение отображения на проколотый специальный слой может оказаться постоянным, что препятствует проведению вышеуказанного рассуждения.

Таким образом, утверждения о полунепрерывности $r(X)$ в семействах и о неуменьшаемости $r(X)$ при специализации остаются в качестве вопросов.

2.3. Инварианты $t(X)$ и $r(X)$ для общей кривой. Далее считаем, что $g \geqslant 2$.

2.3.1. Пусть X – общая кривая рода g. Это означает, что X – слой тавтологической кривой над общей точкой грубого пространства модулей M_g кривых рода g. Известно, что это пространство неприводимо.

Таким образом,

$$t(X) = \dim M_g = \begin{cases} 3g-3, & \text{если } g \geqslant 2; \\ 1, & \text{если } g = 1; \\ 0, & \text{если } g = 0. \end{cases}$$

В общем случае

$$t(X) = \dim M_g = 3g - \dim \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1) + \dim \operatorname{Aut}(X).$$

Попробуем теперь определить $r(X)$.

2.3.2. Пусть g – род X и

$$d = \left[\frac{g+1}{2}\right] + 1.$$

В качестве частного случая решения проблемы Брилля–Нетера известно (см. [4, т. 1, с. 286]), что существует конечное отображение $f : X \to \mathbb{P}^1$ степени d. Более того, если g нечетно, то существует однопараметрическое семейство таких отображений. При этом отображения, отличающиеся на автоморфизм $\mathbb{P}^1$, считаются одинаковыми.

2.3.3. Пусть $f : X \to \mathbb{P}^1$ – отображение из 2.3.2, $P_1, \ldots, P_n \in X$ – точки ветвления f и $e_1, \ldots, e_n$ – соответствующие индексы. Формула Римана–Гурвица показывает, что

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i - 1) = 2d + 2g - 2. \tag{5}$$

2.3.4. Если g четно, то формула (5) превращается в равенство

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i - 1) = 3g.$$

Отсюда вытекает, что n, то есть число e_i, не превосходит $3g$. Таким образом,

$$r(X) \leqslant n \leqslant 3g = t(X) + 3.$$

С учетом неравенства из 2.2.1 видим, что для общей кривой четного рода

$$r(X) = t(X) + 3$$

и ответ на основной вопрос (см. начало 2.1) положителен.

2.3.5. Если g нечетно, то формула (5) превращается в равенство

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i - 1) = 3g + 1.$$

Отсюда, как и в 2.3.4, вытекает неравенство

$$r(X) \leqslant 3g + 1 = t(X) + 4, \tag{6}$$

что на единицу слабее желаемой оценки.

Однако в рассматриваемом случае нечетного рода имеющийся результат по проблеме Брилля–Нетера (см. 2.3.2) гарантирует существование не одного отображения, а нетривиального семейства отображений $f_t : X \to \mathbb{P}^1$, для каждого из которых верна оценка (6). Поэтому можно попытаться улучшить оценку (6), надеясь, что при некотором специальном выборе t пара точек ветвления в $\mathbb{P}^1$ склеится.

2.3.6. Рассмотрим первый случай, когда инвариант $r(X)$ для общей кривой рода g не известен, то есть случай $g = 3$. Пока мы знаем, что $r(X) = 9$ или 10. Если думать, что ответ на основной вопрос положителен, то должно быть верным равенство $r(X) = 9$. Приведем набросок доказательства того, что это действительно так.

Рассмотрим семейство всех гладких кривых степени 4 в $\mathbb{P}^2$. Каждая из них имеет род три. Рассматриваемое семейство таких кривых по модулю действия группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ имеет размерность 6, что совпадает с рамерностью пространства модулей M_3. Поэтому можно надеяться, что мы имеем дело с достаточно общим случаем. Это действительно так. Известно [5, 5.2], что каноническая линейная система на кривой рода три индуцирует вложение тогда и только тогда, когда кривая не гиперэллиптична. Счет параметров показывает, что общая кривая X не гиперэллиптична. Поэтому можно считать, что X – гладкая кривая степени 4 в $\mathbb{P}^2$.

Имеется хотя бы одна точка перегиба $P \in X$, то есть точка, касательная в которой имеет повышенный порядок касания. Действительно, точки перегиба представляют собой точки пересечения X с нулями гессиана уравнения, задающего X. Для кривой 4-й степени гессиан имеет степень 8 и его нули заведомо пересекаются с X.

Проекция из точки $\mathbb{P}^2 - \{P\} \to \mathbb{P}^1$ индуцирует отображение $f : X \to \mathbb{P}^1$ степени 3. Если P – точка перегиба, то индекс ветвления f в точке P не меньше 3. Отсюда можно вывести, что число критических точек f не больше 9.

2.4. Методы Белого. Случай общей кривой, рассмотренный выше, и случай кривой, определенной над $\bar{\mathbb{Q}}$, рассмотренный в теореме Белого, представляют собой крайние случаи поведения поля определения. Методы, используемые для нахождения функций с малым числом критических значений, являются чисто геометрическими для общей кривой и чисто арифметическими для кривой, определенной над $\bar{\mathbb{Q}}$. Видимо, для работы с произвольной кривой нужна комбинация как геометрических, так и арифметических приемов. Я не представляю, как могла бы выглядеть такая комбинация. Поэтому начнем использовать методы Белого (см. [1] и [2]) и попробуем увидеть границы их применимости.

2.4.1. Пусть $K = \bar{\mathbb{Q}}(t)$, где t – свободный параметр, $\bar{K}$ – алгебраическое замыкание K, X – кривая, определенная над $\bar{K}$, g – род X.

Считаем, что $g \geqslant 2$. Следуя Белому, начнем с произвольной непостоянной функции

$$f : X \to \mathbb{P}^1_{\bar{K}} .$$

Пусть $S \subset \mathbb{P}^1(\bar{K})$ – множество критических значений f. Считаем, что $\infty, 0, 1 \in S$ и, таким образом,

$$S = \{\infty, 0, 1, v_1, \ldots, v_n\}, \qquad (v_i \in \bar{K}).$$

Сначала Белый модифицирует f так, чтобы все критические значения были рациональны над K. При этом число критических значений может вырасти. Этот шаг без всяких изменений проходит и в нашем случае. Поэтому далее считаем, что

$$v_1, \ldots, v_n \in K.$$

2.4.2. В рассматриваемом случае $\mathrm{tr.deg}\, \bar{K}/\mathbb{Q} = 1$, и мы стремимся найти такую f, что $n = 1$. Предположим, что нам удалось найти f, для которой

$$S = \{\infty, 0, 1, v_1, \ldots, v_n, u\},$$

где $u \in \bar{K}$, а $v_i \in \bar{\mathbb{Q}}$ для $i = 1, \ldots, n$. Этого будет достаточно для решения исходной задачи, так как метод Белого позволяет избавиться от лишних алгебраичностей, не наращивая число трансцендентных точек.

Таким образом, при дальнейшей модификации f можно не опасаться возможного роста числа алгебраических критических значений.

2.4.3. При построении требуемой функции на алгебраической кривой $X/\bar{\mathbb{Q}}$ специфика кривой используется только для построения произвольной непостоянной функции на ней. Все последующие модификации происходят с помощью функций на $\mathbb{P}^1$. Попробуем аналогичным образом действовать и для X, определенной над произвольным алгебраически замкнутым полем L нулевой характеристики. Рассмотрим следующее утверждение.

Пусть $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$, где $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{P}^1(L)$. Тогда существует непостоянное отображение $f : \mathbb{P}^1_L \to \mathbb{P}^1_L$, такое, что множество $f(R \cup S)$ содержит не больше $(d+3)$-х точек, где R – множество критических точек f, а d – степень трансцендентности поля $\bar{\mathbb{Q}}(u_1, \ldots, u_m)$ над $\mathbb{Q}$.

Мне неизвестны контрпримеры к этому утверждению. Если это утверждение верно, то ответ на основной вопрос (см. (4)) положителен.

2.4.4. Попробуем проверить утверждение из 2.4.3 в простейшем неизвестном случае. А именно, рассмотрим 5-ку точек $\infty, 0, 1, v, u \in \mathbb{P}^1(K)$. Надо найти такое непостоянное отображение $f : \mathbb{P}^1_{\bar{K}} \to \mathbb{P}^1_{\bar{K}}$, для которого образ множества $R \cup \{\infty, 0, 1, v, u\}$ содержит не более 4-х точек. Здесь R – множество критических точек f. Если мы умеем решать эту задачу, то будем говорить, что мы умеем склеивать v и u.

Специализируем задачу еще сильнее и будем считать, что $v = t$. Приведем несколько примеров, найденных с помощью детального анализа отображений второй степени.

$$\begin{array}{ll} u & f \\ & \\ -t & z^2 \\ t^{-1} & (z+z^{-1})/2 \\ -t^{-1} & z-z^{-1} \\ 1-t & z(1-z) \\ \lambda - t \quad (\lambda \in \bar{\mathbb{Q}}, \lambda \neq 1) & z(\lambda - z)/(\lambda - 1) \end{array} \tag{7}$$

В этих примерах u получается применением инволюции к t. Вот несколько более сложных примеров.

$$\begin{array}{ll} u & f \\ & \\ t(t-1)^{-1} & z^2/(z-2)^2 \\ t(1+t)^{-1} & a^2z^2/(z-1-a)^2 \quad (a = (1-t)/(1+t)) \\ 2t & (1-t)^2/(z-t)^2 \\ t-1 & (2-t)^2/(2z-t)^2 \\ (t+1)/2 & (z-1)^2/(z-t)^2 \\ 2t/(t+1) & (z-1)^2/(z-t)^2 \\ (2t-1)/t & (z-1)^2/(z-2t+1)^2 \end{array} \tag{8}$$

Отметим, что если мы умеем склеивать t и $\varphi(t)$, где φ – автоморфизм $\mathbb{P}^1$ над $\bar{\mathbb{Q}}$, то мы умеем склеивать и t с $\varphi^{-1}(t)$. Действительно, мы просто может взять $\varphi(t)$ в качестве независимого параметра и переобозначить его тем же символом t. Поэтому, умея склеивать t и $t-1$, мы умеем склеивать t и $t+1$. Аналогично, мы умеем склеивать t и $t/2$ и т. д.

2.4.5. Композиции склеек. Предположим, что мы умеем склеивать t и $\varphi(t)$. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$, для которой $f(T) = \{\infty, 0, 1, u\}$, где T состоит из точек ∞, 0, 1, t, $\varphi(t)$ и всех критических точек f. Тогда мы можем склеить t с прообразом $f^{-1}\varphi(u)$. Это делает композиция gf, где g склеивает u и $\varphi(u)$.

Например, покажем, как можно склеить t и

$$\frac{2t^2 - 2t + 1}{t}.$$

Этот пример интересен тем, что в предыдущих примерах мы умели склеивать t только с его образами при автоморфизмах $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$.

Пусть $f = (1-t)^2/(z-t)^2$ и $u = f(0) = (1-t)^2/t^2$. Легко видеть, что f склеивает t и $2t$. Так как мы уже умеем склеивать u и $1/u$, то мы умеем склеивать и t с прообразом $f^{-1}(1/u)$. Один из двух прообразов как раз и равен $(2t^2 - 2t + 1)/t$.

§3. Заключение

Прежде всего отметим простейшие нерешенные случаи рассмотренных проблем. Для общей кривой первый неизвестный случай $g = 5$. В этом случае $t(X) = 12$, а $r(X) \leqslant 16$. Требуется проверить, что на самом деле $r(X) \leqslant 15$. Для специальных кривых первые неизвестные случаи связаны с $g = 2$ и $t(X) = 1$ или $t(X) = 2$. В вопросе про склейку пары алгебраически зависимых параметров (см. 2.4.4) было бы интересно разобраться со случаем t и t^2.

В данной работе мы имели дело исключительно с полями нулевой характеристики. В ненулевой характеристике основной вопрос требует модификации. Это связано с тем, что в положительной характеристике каждая кривая, независимо от степени трансцендентности поля определения, может быть разветвлена всего над одной точкой проективной прямой (см. [6]). Возможная модификация вопроса состоит в том, чтобы изучать рациональные функции без дикого ветвления.

После того, как препринт [7] был написан, В. Куликов сообщил мне следующее простое доказательство неравенства $r(X) \leqslant 3g$ для произвольной кривой X рода $g \geqslant 2$. А именно, пусть P – точка Вейерштрасса на X. По определению это означает, что функция $n \mapsto h^0(nP)$ имеет нестандартное поведение. Это условие равносильно тому, что $h^0(X, gP) > 1$. Таким образом, найдется $f \in k(X)$ с единственным полюсом порядка g в точке P. Рассмотрим отображение $f : X \to \mathbb{P}^1$. Так как $\deg f = g$, то формула Гурвица принимает вид

$$2 - 2g = 2g - \sum(e_Q - 1).$$

Учитывая, что $e_P = g$ и $e_Q \geqslant 1$ получаем отсюда, что число точек ветвления f не превосходит $3g$. Таким образом, $r(X) \leqslant 3g$ и для общей кривой на вопрос из 2.1 дан утвердительный ответ.

Литература

1. Г. В. Белый, *О расширениях Галуа максимального кругового поля.* — Изв. АН СССР, Сер. матем., **43** (1979), No. 2, 269–276.
2. Г. В. Белый, *Новое доказательство теоремы о трех точках.* — Матем. сборник, **193** (2002), No. 3, 21–24.
3. F. Bogomolov, D. Husemoller, *Geometric properties of curves defined over number fields.* Bonn MPI, **1** (2000).
4. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии.* М., Мир, (1982).
5. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* М., Мир, (1981).
6. N. Katz, *Travaux de Laumon.* — Sém. Bourbaki, (1987–1988), No. 691, Astérisque **161–162** (1988), 105–132.
7. А. Л. Смирнов, *О полях определения алгебраической кривой.* — Препринт ПОМИ РАН 2/2013.

Smirnov A. L. On definition fields of an algebraic curve.

It is considered such geometric invariants of an algebraic curve as the minimal number of crucial values of the rational functions and the minimal transcendence degree of the definition fields. The question is if the difference of these two invariants is always equal to 3 for any curve with the genus $g > 0$. For curves defined over an algebraic number field the positive answer is given by Belyi's theorem. In the paper the positive answer is given for some other cases.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург, Россия

Поступило 30 сентября 2014 г.

E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru