Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 430, 2014 г.

А. А. Осиновская

РЕГУЛЯРНЫЕ УНИПОТЕНТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ИЗ ПОДСИСТЕМНЫХ ПОДГРУПП ТИПА A_2 В ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

§1. Введение

Изучалось поведение регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа A_2 в неприводимых p-ограниченных представлениях специальных линейных групп над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$. Для указанного ниже класса представлений с локальными свойствами старших весов установлено, что образы таких элементов имеют блоки Жордана всех априори возможных нечетных размерностей.

Многие особые свойства линейных групп над полем положительной характеристики p вызваны наличием в них p-элементов, то есть элементов, порядки которых являются степенями числа p. Это в точности унипотентные элементы. Детальная информация о поведении таких элементов в представлениях может быть использована для решения задач распознавания линейных групп по присутствию отдельных унипотентных элементов. Выявление типичных свойств образов таких элементов в представлениях алгебраических групп позволяет выделить семейства "редких" элементов для разработки методов решения этих задач.

Целесообразно выделять различные классы унипотентных элементов и использовать для них разные подходы. Одним из таких классов являются малые унипотентные элементы, т.е. элементы, действие

Ключевые слова: специальные линейные группы, представления, унипотентные элементы, жорданова нормальная форма.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проекты No. Ф12Р-050 и Ф14Р-109.

которых на естественном модуле мало отличается от действия тождественного элемента (унипотентные элементы с малой коразмерностью подпространства собственных векторов). Естественно связывать понятие "малости" элемента с рангом группы. Эти элементы содержатся в подсистемных подгруппах относительно малых рангов. Подгруппа полупростой алгебраической группы называется *подсистемной*, если она порождается корневыми подгруппами, ассоциированными со всеми корнями из определенной подсистемы корней. Для выявления свойств образов таких элементов в представлениях эффективным орудием оказывается анализ ограничений представлений на подгруппы. Малые унипотентные элементы порядка p часто являются p-примарными степенями других унипотентных элементов соответствующей группы, и поэтому сведения об их поведении в представлениях дают определенную информацию и о поведении унипотентных элементов больших порядков. Подчеркнем, что нет оснований рассчитывать полностью определить нормальную форму Жордана образов произвольных унипотентных элементов в неприводимых модулярных представлениях алгебраических групп и даже найти размерности всех блоков Жордана этих образов без учета их кратностей, поскольку проблема вычисления размерностей неприводимых модулярных представлений алгебраических групп вряд ли будет решена в обозримом будущем. Даже в нулевой характеристике определение размерностей этих блоков в общем случае представляется нереальным ввиду сложности формул для вычисления кратностей весов. Здесь можно ожидать лишь получения асимптотических оценок и информации об отдельных размерностях блоков (наибольшего, следующего по размеру и т.п.), полезных для решения задач распознавания линейных групп.

Далее K – алгебраически замкнутое поле нечетной характеристики p, G – односвязная алгебраическая группа типа A_r над K, т.е. $\mathrm{SL}_{r+1}(K)$, $r \geqslant 3$. Фиксируем максимальный тор $T \subset G$ и подгруппу Бореля $B \supset T$. Обозначим через α_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, базис системы корней относительно T и B, а через ω_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, – соответствующие этим корням фундаментальные веса. Рациональное неприводимое представление группы G со старшим весом $\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$ называется p-ограниченным, если все $a_i < p$.

Рассмотрим унипотентный элемент $x \in G$, который в стандартной реализации группы имеет один блок Жордана размерности 3, а другие его блоки тривиальны. Пусть $H \subset G$ – подсистемная подгруппа типа A_2, содержащая x, φ – рациональное неприводимое p-ограниченное представление группы G, M – модуль, в котором оно реализуется, $\omega = \sum_{k=1}^{r} a_k\omega_k$ – старший вес φ, ω^* – старший вес представления, дуального к φ, $\mathrm{Jord}_\varphi(x)$ – множество размерностей блоков Жордана для $\varphi(x)$ (без учета их кратностей), $\mathrm{Jord}_M(x)$ – аналогичное множество для образа x в модуле M, $\mathbb{N}$ – множество неотрицательных целых чисел и $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Положим

$$m(\varphi) = \min_{1\leqslant i\leqslant r-1}(2a_i + 2a_{i+1}), \quad s(\varphi) = \min(\sum_{k=1}^{r} 2a_k + 1, p).$$

Доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть G, x и φ – такие, как выше, и $m(\varphi) < p$. Тогда*

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_\varphi(x),$$

за исключением следующих случаев:

(i) *$r = 3$, $\omega = a_2\omega_2$ и a_2 нечетно;*

(ii) *$r = 3$, ω или $\omega^* = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$, a_1 нечетно, $a_2 \neq 0$ и $a_2 + a_3 = p - 1$;*

(iii) *$r = 4$, ω или $\omega^* = a_1\omega_1 + \omega_2 + (p-2)\omega_3$ и a_1 нечетно;*

(iv) *$p = 5$, $r = 4$ или 5, $\omega = 3\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 3\omega_4$, $r = 5$ или 6, $\omega = 3\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + 3\omega_5$;*

(v) *$p = 3$ и $m(\varphi) = 2$;*

(vi) *$r \geqslant 3$, ω или $\omega^* = \frac{p-1}{2}\omega_2 + \frac{p-1}{2}\omega_3 + a_4\omega_4 + \ldots + a_r\omega_r$.*

В случае (i)

$$\mathrm{Jord}_\varphi(x) = \{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\},$$

в случаях (ii)–(v)

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_\varphi(x),$$

а в случае (vi)

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2), k \neq p-2\} \subset \mathrm{Jord}_\varphi(x).$$

Заметим, что при $r \geqslant 4$ и $2a_1 + \ldots + 2a_r + 1 \leqslant p$ согласно теореме 5 из [12]

$$\mathrm{Jord}_\varphi(u) = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\}.$$

Ранее изучалась блочная структура образов корневых элементов в представлениях простых алгебраических групп (И. Д. Супруненко, А. А. Осиновская [12], М. В. Величко [2] и [16]). В статье [5] (И. Д. Супруненко, А. А. Осиновская) для $p \geqslant 11$ описана блочная структура образов регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа A_3 в неприводимых представлениях групп типа A_r с локально малыми старшими весами относительно характеристики p. Как и в теореме 1, во многих случаях оказывается, что образы таких элементов имеют блоки Жордана всех априори возможных размерностей или всех возможных размерностей одной четности.

§2. Свойства H-модулей

Введем сначала обозначения. Пусть $\Lambda(M)$ – множество весов G-модуля M, M^μ – весовое пространство веса μ в модуле M, v^+ – фиксированный вектор старшего веса этого модуля и $M|P$ – ограничение модуля M на подгруппу $P \subset G$. Символом $\omega_P(v)$ обозначим вес некоторого весового вектора $v \in M$ относительно подгруппы P. Вектор v называется *примитивным* относительно P, если v – это ненулевой весовой вектор и его оставляют на месте все корневые подгруппы, связанные с положительными корнями подгруппы P.

Обозначим символом $G(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ подгруппу группы G, порожденную всеми корневыми подгруппами для корней $\pm\beta_1, \ldots, \pm\beta_k$. Положим $G(i_1, \ldots, i_k) = G(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$. Для $\pm\alpha_j$, $t \in K$ и $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $X_{\pm j}$, $x_{\pm j}(t)$, $\mathfrak{X}_{\pm j}$ и $X_{\pm j,k}$ корневой элемент алгебры Ли группы G, корневой элемент и корневую подгруппу группы G, ассоциированные с корнем $\pm\alpha_j$, и элемент гипералгебры группы G, ассоциированный с парой $(\pm\alpha_j, k)$ соответственно. При $k < p$ имеем $X_{\pm j,k} = (X_{\pm j})^k/k!$.

Для полупростой алгебраической группы S рациональный S-модуль V называется *тилтинг-модулем*, если у него есть фильтрация модулями Вейля и фильтрация комодулями Вейля. Если μ – доминантный вес этой группы, то обозначим символами $L(\mu)$, $\Delta(\mu)$ и $T(\mu)$ неприводимый модуль, модуль Вейля и неразложимый тилтинг-модуль с таким старшим весом соответственно. Напомним, что в характеристике 0 $L(\mu) = \Delta(\mu) = T(\mu)$.

Обозначим через $A \subset H$ подгруппу типа A_1, замкнутую в топологии Зарисского и содержащую элемент x. Такая подгруппа существует согласно [12, лемма 18]. Веса этой подгруппы можно отождествить с целыми числами при помощи отображения $a\omega_1 \mapsto a$.

Лемма 1 ([12, лемма 12]). *Пусть S – группа, $u \in S$ и $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_t$ – прямая сумма S-модулей. Тогда* $\mathrm{Jord}_V(u) = \cup_{l=1}^t \mathrm{Jord}_{U_l}(u)$.

Лемма 2. *Пусть для любого композиционного фактора в ограничении G-модуля M на подгруппу H модуль Вейля с тем же старшим весом неприводим. Тогда ограничение $M|H$ вполне приводимо.*

Доказательство. Будем рассуждать индукцией по числу композиционных факторов. Если у ограничения $M|H$ есть два композиционных фактора, то лемма следует из [10, часть II, предложение 2.14]. Предположим теперь, что есть k факторов в ограничении. Возьмем подмодуль $N \subset M$, у которого $k-2$ композиционных факторов, и рассмотрим естественный гомоморфизм $f : M \to \widetilde{M} = M/N$. Поскольку модуль $\widetilde{M}$ удовлетворяет условиям леммы, то по предположению индукции $\widetilde{M} = \widetilde{R} \oplus \widetilde{Q}$. Положим $R = f^{-1}(\widetilde{R})$ и $Q = f^{-1}(\widetilde{Q})$. Тогда $R \cup Q = M$, $R \cap Q = N$, модули R и Q имеют $k-1$ композиционных факторов каждый и они вполне приводимы по предположению индукции. Следовательно, модуль M также вполне приводим. □

Фиксируем индекс i, при котором достигается $\min_{1\leqslant i\leqslant r-1}(2a_i + 2a_{i+1})$. Мы можем считать, что $H = G(i, i+1)$. Обозначим через I множество всех целых чисел от 1 до r, отличных от i и $i+1$. Для набора неотрицательных целых чисел

$$C = \{c_j \in \mathbb{N} \mid j \in I\}$$

определим множество весов

$$\Lambda(C) = \{\mu \in \Lambda(M) \mid \mu = \omega - \sum\nolimits_{j\in I} c_j\alpha_j - x_i\alpha_i - x_{i+1}\alpha_{i+1},\ x_i, x_{i+1} \in \mathbb{N}\}$$

и пространство

$$M_C = \bigoplus\nolimits_{\mu\in\Lambda(C)} M^{\mu}.$$

Лемма 3. *M_C – это H-модуль и прямое слагаемое ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_{M_C}(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$.*

Доказательство. Действительно, чтобы показать, что M_C является H-модулем, достаточно установить, что $x_{\pm n}(t)M^{\mu} \subset M_C$ для $\mu \in \Lambda(C)$ и $n = i$ или $i+1$. Возьмем произвольный вектор $v \in M^{\mu}$. Согласно [6, лемма 72], $x_{\pm n}(t)v = v + \sum_{a=1}^{\infty} t^a v_a$, где $v_a \in M^{\mu \pm a\alpha_n} \subset M_C$. Следовательно, $x_{\pm n}(t)v \in M_C$ и M_C является подмодулем.

Очевидно, что $M_C \cap M_{C'} = \{0\}$ при $C' \neq C$ и $M = \oplus_C M_C$ (как векторное пространство), где сумма берется по всем наборам C. Следовательно, M_C – прямое слагаемое H-модуля M. Вложение $\mathrm{Jord}_{M_C}(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$ следует из леммы 1. □

Лемма 4. *Пусть множество* $\Lambda(C)$ *непусто и* $c_{i-1}+a_i+a_{i+1}+c_{i+2}+2 \leqslant p$ *(положим* $c_{-1}=0$ *при* $i=1$ *и* $c_{n+1}=0$ *при* $i=n-1$*). Тогда* H*-модуль* M_C *вполне приводим и для любого его композиционного фактора* N *множество* $\mathrm{Jord}_N(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$.

Доказательство. Возьмем произвольный композиционный фактор $N = L(\nu)$ из H-модуля M_C. Тогда $\nu = (c_{i-1}+a_i)\omega_1 + (a_{i+1}+c_{i+2})\omega_2 - x_i\alpha_1 - x_{i+1}\alpha_2$, где x_i и $x_{i+1} \in \mathbb{N}$. Согласно [8], $L(\nu) = \Delta(\nu)$. Из леммы 2 вытекает, что H-модуль M_C вполне приводим. Применяя леммы 1 и 3, мы завершаем доказательство. □

В следующих утверждениях ρ – неприводимое представление подгруппы H со старшим весом $\mu = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, U – H-модуль, в котором реализуется ρ, z – регулярный унипотентный элемент из H и A – подгруппа типа A_1, в которой лежит z.

Лемма 5. *Пусть* $\mu = \omega_1$ *или* ω_2. *Тогда* $U|A$ *– тилтинг-модуль.*

Доказательство. Из [12, лемма 18] следует, что $U|A \cong L(2)$. Действительно, достаточно рассмотреть ограничения весов модуля U на подгруппу A. Согласно [13, лемма 1.3], $L(2) = T(2)$. □

Лемма 6. *Пусть* $\mu = \mu_1 + \mu_2$, *где* μ_1 *и* μ_2 *– доминантные веса. Предположим, что* $U \cong \Delta(\mu)$ *и* $L(\mu_j)|A$ *– тилтинг-модули при* $j = 1$ *и* 2. *Тогда* $U|A$ *– тилтинг-модуль.*

Доказательство. Из [3, лемма 2.2.14] следует, что модуль U изоморфен прямому слагаемому тензорного произведения $L(\mu_1) \otimes L(\mu_2)$. Согласно [13, лемма 1.1] это произведение и его прямые слагаемые являются тилтинг-модулями для группы A. □

Лемма 7. *Пусть* $m_1 + m_2 + 2 \leqslant p$ *или* $\mu \in \{(p-1)\omega_1, (p-1)\omega_2\}$. *Тогда* $U|A$ *– тилтинг-модуль.*

Доказательство. Положим $m = m_1 + m_2$ и применим индукцию по m. Естественно, мы можем считать, что $m > 0$. Если $m = 1$, то наше утверждение следует из леммы 5. Пусть теперь $m > 1$. Тогда вес μ можно записать в виде $\mu = \mu_1 + \omega_j$, где μ_1 – доминантный вес подгруппы H, $\mu_1 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$, $n_1 + n_2 = m - 1$ и $j = 1$ или 2. По предположению индукции, $L(\mu_1)|A$ является тилтинг-модулем. Из [8] следует, что модуль $\Delta(\mu)$ неприводим. Остается применить лемму 6. □

Лемма 8. *Пусть* $2m_1 + 2m_2 < p$. *Тогда* $\mathrm{Jord}_\rho(z)$ *совпадает с аналогичным множеством в характеристике* 0. *А именно,* $\rho(z)$ *имеет блоки Жордана в точности следующих размерностей:*

(1) $1 \leqslant k \leqslant 2m_1 + 2m_2 + 1$, *где* $k \equiv 2m_1 + 2m_2 + 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, *если* $m_1 = 0$ *или* $m_2 = 0$;

(2) $3, 5, \dots, 2m_1 + 2m_2 + 1$, *если* $m_1, m_2 \neq 0$ *и по крайней мере одно из них нечетно;*

(3) $1, 5, \dots, 2m_1 + 2m_2 + 1$ *(отсутствует только* 3*), если* $m_1, m_2 \neq 0$ *и оба четны.*

Доказательство. Из [12, лемма 18] следует, что максимальный вес ограничения $U|A$ равен $2m_1 + 2m_2 < p$. Значит, согласно [12, лемма 9] модуль $U|A$ вполне приводим и множество $\mathrm{Jord}_\rho(z)$ однозначно определяется множеством композиционных факторов этого ограничения, а именно, каждому композиционному фактору со старшим весом a соответствует блок Жордана размерности $a + 1$. Поскольку $U = \Delta(\mu)$ согласно [8] и $L(a) = \Delta(a)$ для любого композиционного фактора $L(a)$ ограничения $U|A$ согласно [6, §12], то эти композиционные факторы в точности такие же, как в характеристике 0. Теперь используем [4, следствие 2]. □

Лемма 9. *Пусть* $m_1 + m_2 + 2 \leqslant p$ *и* $2m_1 + 2m_2 = p + b$, *где* $0 \leqslant b \leqslant p - 2$. *Для* $k < p - b - 1$ *целое число* $k \in \mathrm{Jord}_\rho(z)$ *тогда и только тогда, когда оно содержится в аналогичном множестве в характеристике* 0.

Доказательство. Согласно [8], $U = \Delta(\mu)$. Из леммы 7 вытекает, что ограничение $U|A$ является тилтинг-модулем. Тогда из [13, лемма 1.1] следует, что $U|A$ – прямая сумма модулей $T(a)$ с $a \leqslant 2p - 2$. Согласно [13, лемма 1.3], $T(a) \cong L(a)$ при $a < p$; а при $p \leqslant a \leqslant 2p - 2$ модуль $T(a)$ имеет в точности три композиционных фактора: $L(a)$ с кратностью 1 и $L(2p - a - 2)$ с кратностью 2. Поскольку $U = \Delta(\mu)$, при $c < p - b - 2$ прямое слагаемое $T(c)$ имеет в ограничении $U|A$ ту же кратность, что и в характеристике 0. Оно взаимно однозначно соответствует блоку Жордана размерности $c + 1$ образа $\rho(z)$. □

Лемма 10. *Пусть* $U_{\mathbb{C}}$ – *неприводимый* $A_2(\mathbb{C})$*-модуль. Тогда для* $\nu \in \Lambda(U_{\mathbb{C}})$

$$\dim U_{\mathbb{C}}^{\nu} = \dim U_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_1} + \dim U_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_2} - \dim U_{\mathbb{C}}^{\nu+2\alpha_1+\alpha_2} - \dim U_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_1+2\alpha_2} + \dim U_{\mathbb{C}}^{\nu+2\alpha_1+2\alpha_2}.$$

Лемма 11. *Пусть $N_{\mathbb{C}}$ – неприводимый $A_3(\mathbb{C})$-модуль. Тогда для $\nu \in \Lambda(N_{\mathbb{C}})$*

$$\begin{aligned}\dim N_{\mathbb{C}}^{\nu} &= \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_1} + \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_2} + \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_3} - \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_1+\alpha_3}\\ &- \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+2\alpha_1+\alpha_2} - \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_1+2\alpha_2} - \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+2\alpha_2+\alpha_3} - \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_2+2\alpha_3}\\ &+ \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+2\alpha_1+2\alpha_2} + \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+2\alpha_2+2\alpha_3} + \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3}\\ &+ \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} + \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3} + \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3}\\ &- \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+3\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3} - \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3} - \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+3\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3}\\ &- \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3} - \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+2\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3} + \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+3\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3}\\ &+ \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+3\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3} + \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+2\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3} - \dim N_{\mathbb{C}}^{\nu+3\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3}.\end{aligned}$$

Доказательство лемм 10 **и** 11. Применяя формулу для кратностей весов из следствия предложения 1 в [1, гл. VIII, §9.3] для групп $A_2(\mathbb{C})$ и $A_3(\mathbb{C})$, получаем искомое. □

Лемма 12. *Пусть $i+1 < r$, $a_{i+1} \neq 0$, $a_{i+2} = 0$ или $a_{i+2} \neq 0$ и $a_{i+1} + a_{i+2} \neq p-1$. Предположим, что $0 \leqslant l \leqslant a_{i+2}$. Тогда в модуле M существует примитивный относительно H вектор v с весом $\omega_H(v) = (a_i+1)\omega_1 + (a_{i+1}-1+l)\omega_2$.*

Доказательство. Положим $\lambda = \omega - \alpha_{i+1} - (l+1)\alpha_{i+2}$ и $\nu = \omega - (l+1)\alpha_{i+2}$. Обозначим символом $M_{\mathbb{C}}$ неприводимый $SL_{r+1}(\mathbb{C})$-модуль со старшим весом ω. По лемме 10, $\dim M_{\mathbb{C}}^{\nu} = 1$ при $l < a_{i+2}$, $\dim M_{\mathbb{C}}^{\nu} = 0$ и $\dim M_{\mathbb{C}}^{\lambda} = 1$ при $l = a_{i+2}$. Поскольку пространства весов модулей M и $M_{\mathbb{C}}$ совпадают согласно [7], то эти веса имеют те же кратности в модуле M.

Из описания композиционных факторов модулей Вейля для группы $A_2(K)$ [8] и леммы 10 следует, что $\dim M^{\lambda} = \dim M_{\mathbb{C}}^{\lambda} = 2$ при $l < a_{i+2}$. Здесь существенно, что $a_{i+1} + a_{i+2} \neq p-1$. Поэтому во всех случаях $\dim M^{\lambda} = \dim M^{\nu} + 1$ (для одного и того же l). Значит, существует ненулевой вектор $v \in M^{\lambda}$, такой, что $\mathfrak{X}_{i+1} v = v$. Отсюда следует, что этот вектор примитивен относительно H. □

§3. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы 1. Из [12, предложение 6] следует, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid m(\varphi) + 1 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Если $a_i = a_{i+1} = 0$, то $m(\varphi) = 0$, и все доказано. В противном случае нужно найти блоки Жордана малых размерностей. Мы можем считать, что $i+1 < n$ (в противном случае переходим к дуальному модулю). Согласно теореме Смита [14], $KHv^+ = L(\mu)$ для $\mu = a_i\omega_1 + a_{i+1}\omega_2$, и этот модуль является прямым слагаемым ограничения $M|H$. Значит, по лемме 1

$$\mathrm{Jord}_{L(\mu)}(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x). \tag{1}$$

1) Пусть сначала a_i и $a_{i+1} \neq 0$. Из минимальности $m(\varphi)$ следует, что $a_{i+2} \neq 0$. Кроме того, из $m(\varphi) < p$ вытекает, что $a_i + a_{i+1} + 2 < p$, а также, что $p \geqslant 5$.

а) Предположим, что a_i и a_{i+1} оба четные. Тогда $p \geqslant 11$ и из формулы (1) и леммы 8 следует, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 1,\ 5 \leqslant k \leqslant m(\varphi) + 1, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Положим $v = X_{-(i+2)}v^+$ и определим набор C следующим образом: $c_{i+2} = 1$ и $c_j = 0$ при $j \in I$, $j \neq i+2$. Тогда $v \in M_C \neq 0$, $\omega_H(v) = a_i\omega_1 + (a_{i+1}+1)\omega_2$ и этот вектор примитивен относительно подгруппы H по лемме 2.46 из [15]. Положим $L = KHv$. Поскольку $a_i + a_{i+1} + 3 \leqslant p$, то $L = L(a_i\omega_1 + (a_{i+1}+1)\omega_2)$ по [8]. Согласно леммам 3 и 4 модуль L является прямым слагаемым ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $2a_i + 2a_{i+1} + 2 < p$, то применяя лемму 8 для модуля L, получаем, что $3 \in \mathrm{Jord}_M(x)$. Пусть $2a_i + 2a_{i+1} + 2 = p + 1$. Тогда из леммы 9 при $U = L$ и $b = 1$ следует, что 3 также принадлежит $\mathrm{Jord}_M(x)$.

б) Пусть a_i четно, а a_{i+1} нечетно. Из формулы (1) и леммы 8 получаем

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant m(\varphi) + 1, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Определим вектор v, набор C и модуль L так же, как в пункте (а). Как и выше, $a_i + a_{i+1} + 3 \leqslant p$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Согласно лемме 8 при $2a_i + 2a_{i+1} + 2 < p$ и лемме 9 при $2a_i + 2a_{i+1} + 2 = p + 1$ получаем, что $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$.

в) Предположим, что a_i нечетно и a_{i+1} четно. Если $i > 1$, то $a_{i-1} > 0$, мы переходим к дуальному модулю и рассуждаем, как в предыдущем случае.

Пусть $i = 1$. Как и в пункте (б),

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant m(\varphi) + 1, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Предположим сначала, что $a_2 + a_3 \neq p - 1$. Тогда по лемме 12 существует примитивный относительно H вектор $v \in M^{\omega - \alpha_2 - 2\alpha_3}$. Определим набор C следующим образом: $c_3 = 2$ и $c_j = 0$ при $j > 3$. Имеем $a_1 + a_2 + 4 \leqslant p$, $v \in M_C \neq 0$ и $\omega_H(v) = (a_1 + 1)\omega_1 + a_2\omega_2$. Положим $L = KHv$. По [8], $L = L((a_1 + 1)\omega_1 + a_2\omega_2)$. Согласно леммам 3 и 4 модуль L является прямым слагаемым ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $2a_i + 2a_{i+1} + 2 < p$, то применяя лемму 8 для модуля L, получаем, что $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$. Пусть $2a_i + 2a_{i+1} + 2 = p + 1$. Тогда из леммы 9 при $U = L$ и $b = 1$ следует, что 1 также принадлежит $\mathrm{Jord}_M(x)$.

Пусть теперь $a_2 + a_3 = p - 1$, но существует $j > 3$, такое, что $a_j \neq 0$. Заметим, что это j равно 4 или 5, потому что в других случаях получаем, что $i = 4$ и $m(\varphi) = 0$. Положим $w = X_{-4}v^+$ при $j = 4$ и $w = X_{-4}X_{-5}v^+$ при $j = 5$. По лемме 2.46 из [15], w примитивен относительно подгруппы $P = G(1, 2, 3)$. Определим подмодуль $N = KPw$ в ограничении $M|P$. Поскольку $\omega_P(w) = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + (a_3+1)\omega_3$, то мы можем применить к модулю N лемму 12 с $l = 1$ (модуль N не обязательно неприводим, он просто неразложим, но доказательство утверждения в этом случае такое же, как и для модуля M, поскольку по лемме 2.13 из [10] N является гомоморфным образом модуля Вейля $\Delta(\omega_P(w))$). Получаем, что существует примитивный относительно H вектор $v \in N$ веса $\omega_H(v) = (a_1 + 1)\omega_1 + a_2\omega_2$. Определим набор C следующим образом: $c_3 = 2$, $c_4 = 1$ и $c_k = 0$ при $k > 4$, если $j = 4$, и $c_3 = 2$, $c_4 = c_5 = 1$ и $c_k = 0$ при $k > 5$, если $j = 5$. Тогда $v \in M_C$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем, что во всех случаях $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$.

Наконец, предположим, что $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$ с $a_2 + a_3 + 1 = p$. В этом случае $r = 3$ или 4, так как при $r \geqslant 5$ получаем, что $i = 4$ и $m(\varphi) = 0$. Пусть $r = 4$. Положим $H_1 = G(3, 4)$. Поскольку H сопряжена с H_1 в группе G, мы можем считать, что $x \in H_1$. Коэффициент a_3 четный и $\leqslant p - 3$. По теореме Смита [14], $KH_1v^+ = L(a_3\omega_1)$, и этот модуль является прямым слагаемым ограничения $M|H_1$. Следовательно, по лемме 1, $\mathrm{Jord}_{L(a_3\omega_1)}(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Отсюда, применяя леммы 8 и 9, получаем, что $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $r = 3$, то

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

г) Пусть a_i и a_{i+1} оба нечетны. Как и выше,

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant m(\varphi) + 1, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Пусть сначала $i > 1$. Тогда из минимальности $m(\varphi)$ следует, что $a_{i-1} \neq 0$. Положим $v = X_{-(i-1)}X_{-(i+2)}v^+$ и определим набор C следующим образом: $c_{i-1} = c_{i+2} = 1$ и $c_j = 0$ при $j \in I$, $j \neq i-1$ и $i+2$. Тогда вектор v примитивен относительно подгруппы H по лемме 2.46 из [15], $v \in M_C$ и $\omega_H(v) = (a_i+1)\omega_1 + (a_{i+1}+1)\omega_2$. Положим $L = KHv$. Из неравенства $m(\varphi) = 2a_i + 2a_{i+1} < p$ следует, что $a_i + a_{i+1} + 3 \leqslant p$.

Предположим сначала, что $a_i + a_{i+1} + 4 \leqslant p$. Тогда $L = L((a_i+1)\omega_1 + (a_{i+1}+1)\omega_2)$ по [8]. Согласно леммам 3 и 4 модуль L является прямым слагаемым ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $2a_i + 2a_{i+1} + 4 < p$, то применяя лемму 8 для модуля L, получаем, что $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$. При $2a_i + 2a_{i+1} + 4 > p$ воспользуемся леммой 9 для $U = L$ и b, равном 1 или 3 соответственно. Заметим, что при $b = 3$ характеристика $p > 5$, так как в противном случае $a_i = a_{i+1} = 1$ и $a_i + a_{i+1} + 3 = p$. Следовательно, $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$.

Пусть теперь $a_i + a_{i+1} + 3 = p$. Тогда $a_i = a_{i+1} = 1$ и $p = 5$. Рассмотрим этот случай одновременно со случаем $i = 1$. Сначала предположим, что $a_{i+1} + a_{i+2} \neq p - 1$. Применяя лемму 12 при $l = 0$, получаем, что существует примитивный относительно H вектор v с весом $\omega_H(v) = (a_i+1)\omega_1 + (a_{i+1}-1)\omega_2$. Определим набор C следующим образом: $c_{i+2} = 1$ и $c_k = 0$ при $k \notin \{i, i+1, i+2\}$. Имеем $a_i + a_{i+1} + 3 \leqslant p$ и $v \in M_C \neq 0$. Положим $L = KHv$. По [8], $L = L((a_i+1)\omega_1 + (a_{i+1}-1)\omega_2)$. Согласно леммам 3 и 4 модуль L является прямым слагаемым ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $2a_i + 2a_{i+1} + 2 < p$, то применяя лемму 8 для модуля L, получаем, что $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$. Пусть $2a_i + 2a_{i+1} + 2 = p + 1$. Тогда из леммы 9 при $U = L$ и $b = 1$ следует, что 1 также принадлежит $\mathrm{Jord}_M(x)$.

Пусть теперь $a_{i+1} + a_{i+2} = p - 1$, но существует $j > i + 2$, такое, что $a_j \neq 0$. Заметим, что j равно $i + 3$ или $i + 4$, потому что иначе получаем противоречие с минимальностью $m(\varphi)$. Рассуждаем, как в предыдущем пункте. Положим $w = X_{-(i+3)}v^+$ при $j = i + 3$ и $w = X_{-(i+3)}X_{-(i+5)}v^+$ при $j = i + 5$. По лемме 2.46 из [15], вектор w примитивен относительно подгруппы $P = G(i, i+1, i+2)$. Определим подмодуль $N = KPw$ в ограничении $M|P$. Поскольку $\omega_P(w) = a_i\omega_1 + a_{i+1}\omega_2 + (a_{i+2}+1)\omega_3$, то мы можем применить к модулю N лемму 12 с $l = 0$. Получаем, что существует примитивный относительно H вектор $v \in N$ веса $\omega_H(v) = (a_i+1)\omega_1 + (a_{i+1}-1)\omega_2$. Определим набор C следующим образом: $c_{i+2} = c_{i+3} = 1$ и $c_k = 0$ при $k \notin \{i, i+1, i+2, i+3\}$, если $j = i + 3$, и $c_{i+2} = c_{i+3} = c_{i+4} = 1$ и

$c_k = 0$ при $k \notin \{i, i+1, i+2, i+3, i+4\}$, если $j = i+4$. Тогда $v \in M_C$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем, что $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$.

Наконец, предположим, что не существует такого j. В этом случае r равно $i+2$ или $i+3$, так как иначе получаем противоречие с минимальностью $m(\varphi)$. Если $r = i+3$, то положим $H_1 = G(i+2, i+3)$. Мы можем считать, что $x \in H_1$. Коэффициент a_{i+2} нечетный и $\leqslant p-2$. Предположим, что $a_{i+2} \leqslant p-4$. Пусть $v_1 = X_{-(i+1)}v^+$, и определим набор C для подгруппы H_1 следующим образом: $c_{i+1} = 1$ и $c_j = 0$ при $j \notin \{i+1, i+2, i+3\}$. Имеем $v_1 \in M_C$, $\omega_{H_1}(v) = (a_{i+2}+1)\omega_1$, и этот вектор примитивен относительно подгруппы H_1 по лемме 2.46 из [15]. Положим $L_1 = KH_1v_1$. По [8], $L = L((a_{i+2}+1)\omega_1)$. Так как $a_{i+2}+3 \leqslant p$, то согласно леммам 3 и 4 модуль L_1 является прямым слагаемым ограничения $M|H_1$ и $\mathrm{Jord}_{L_1}(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Используя леммы 8 и 9, мы получаем, что $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$.

Следовательно, при $i = 1$ остались случаи $r = 3$ и $a_2 + a_3 = p-1$, а также $r = 4$ и $\omega = a_1\omega_1 + \omega_2 + (p-2)\omega_3$, когда

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Если $p = 5$ и $a_i = a_{i+1} = 1$, то переходя при необходимости к дуальному представлению и повторяя вышеприведенные рассуждения, мы получаем, что $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$, за исключением следующих случаев: r равно 4 или 5, $\omega = 3\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 3\omega_4$; r равно 5 или 6, $\omega = 3\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + 3\omega_5$, когда

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

2) Теперь предположим, что $a_i = 0$ или $a_{i+1} = 0$.

a) Пусть $a_i \neq 0$ и четно. Тогда $p \geqslant 5$. Из минимальности $m(\varphi)$ получаем, что $a_{i+2} \geqslant 2$. Из формулы (1) и леммы 8 следует, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant m(\varphi)+1, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Рассуждаем, как в пункте (1a). Положим $v = X_{-(i+2)}v^+$ и определим набор C следующим образом: $c_{i+2} = 1$ и $c_j = 0$ при $j \in I$, $j \neq i+2$. Тогда $v \in M_C$, $\omega_H(v) = a_i\omega_1 + \omega_2$, и этот вектор примитивен относительно подгруппы H по лемме 2.46 из [15]. Положим $L = KHv$. Поскольку $a_i + 3 \leqslant p$, то $L = L(a_i\omega_1 + \omega_2)$ по [8]. Согласно леммам 3 и 4 модуль L является прямым слагаемым ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $2a_i + 2 < p$, то применяя лемму 8 для модуля L, получаем, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant m(\varphi)+3, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Пусть $2a_i + 2 = p + 1$. Тогда из леммы 9 при $U = L$ и $b = 1$ следует, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant p - 4, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

В этом случае осталось найти блок Жордана размерности $p - 2$. Положим $P = G(i, i+1, i+2)$. По теореме Смита [14], $N = KPv^+ = L(\nu)$ для $\nu = \frac{p-1}{2}\omega_1 + a_{i+2}\omega_3$ и N является прямым слагаемым ограничения $M|P$. Положим

$$\omega' = \nu - ((p-1)/2 + a_{i+2} + 3 - p)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Согласно [11, лемма 3.7], $L(\nu) = \Delta(\nu)/L(\omega')$, если $(p-1)/2 + a_{i+2} + 3 > p$ и $a_{i+2} + 2 < p$, и $L(\nu) = \Delta(\nu)$ в других случаях. Имеем $(p-1)/2 + a_{i+2} + 2 \neq p$, поскольку, если выполняется равенство, то $a_{i+2} = (p-3)/2$ и мы получаем противоречие с минимальностью $m(\varphi)$. По лемме 11, $\dim N^{\nu-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = 4$, $\dim N^{\nu-\alpha_2-\alpha_3} = 1$ и $\dim N^{\nu-\alpha_1-\alpha_3} = 2$. Значит, существует вектор $v \in M^{\omega-\alpha_i-\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}$, примитивный относительно подгруппы H. Вес $\omega_H(v) = \frac{p-3}{2}\omega_1$. Заметим, что $v \in M_C$ для вышеуказанного набора C. Положим $L_1 = KHv$. Как и выше, $\mathrm{Jord}_{L_1}(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Следовательно, $p - 2 \in \mathrm{Jord}_M(x)$.

б) Пусть $a_{i+1} \neq 0$ и четно. Тогда $p \geqslant 5$. Как и в пункте (а)

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant m(\varphi) + 1, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Если $i > 1$, то переходим к дуальному модулю и рассуждаем, как в предыдущем пункте. Значит, мы можем предполагать, что $i = 1$. Если $a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$, то мы снова переходим к предыдущему пункту. Остались случаи $a_3 \neq 0$, а также $r = 3$ и $\omega = a_2\omega_2$.

Пусть $a_3 \neq 0$. Положим $v = X_{-3}v^+$ и определим набор C следующим образом: $c_3 = 1$ и $c_j = 0$ при $j > 3$. Тогда $v \in M_C$, $\omega_H(v) = (a_2 + 1)\omega_2$ и этот вектор примитивен относительно подгруппы H по лемме 2.46 из [15]. Положим $L = KHv$. Поскольку $a_2 + 3 \leqslant p$, то $L = L((a_2 + 1)\omega_2)$ по [8]. Согласно леммам 3 и 4 модуль L является прямым слагаемым ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $2a_2 + 2 < p$, то применяя лемму 8 для модуля L, получаем, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant m(\varphi) + 3, k \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Пусть $2a_2 + 2 = p + 1$. Тогда из леммы 9 при $U = L$ и $b = 1$ следует, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant p - 6, k \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Осталось найти блок Жордана размерности $p - 2$. Предположим сначала, что $a_3 \neq (p-1)/2$. Тогда по лемме 12 существует примитивный относительно H вектор $v \in M^{\omega-\alpha_2-\alpha_3}$. Определим набор C, как и выше. Имеем $(p-1)/2+3 \leqslant p$, $v \in M_C$ и $\omega_H(v) = \omega_1 + \frac{p-3}{2}\omega_2$. Положим $L = KHv$. По [8], $L = L(\omega_1 + \frac{p-3}{2}\omega_2)$. Согласно леммам 3 и 4 модуль L является прямым слагаемым ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Применяя лемму 8 для модуля L, получаем, что $p-2 \in \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $a_3 = (p-1)/2$, то

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2), k \neq p-2\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Наконец, пусть $r = 3$ и $\omega = a_2\omega_2$. Рассуждаем, как в предыдущем абзаце. Согласно лемме 12 существует примитивный относительно H вектор $v \in M^{\omega-\alpha_2-\alpha_3}$. Определим набор C, как и выше. Имеем $a_2+3 \leqslant p$, $v \in M_C$ и $\omega_H(v) = \omega_1 + (a_2-1)\omega_2$. Положим $L = KHv$. По [8], $L = L(\omega_1 + (a_2-1)\omega_2)$. Как и выше $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Из леммы 8 для модуля L вытекает, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant m(\varphi)+1, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

в) Пусть $a_i \neq 0$ и нечетно. Из минимальности $m(\varphi)$ получаем, что $a_{i+2} \neq 0$. Из формулы (1) и леммы 8 следует, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant m(\varphi)+1, k \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Значит, $\{3\} \subset \mathrm{Jord}_M(x)$ при $p = 3$.

Далее предполагаем, что $p > 3$. Рассуждаем, как в пункте (1а). Положим $v = X_{-(i+2)}v^+$ и определим набор C следующим образом: $c_{i+2} = 1$ и $c_j = 0$ при $j \in I$, $j \neq i+2$. Тогда $v \in M_C$, $\omega_H(v) = a_i\omega_1 + \omega_2$ и этот вектор примитивен относительно подгруппы H по лемме 2.46 из [15]. Положим $L = KHv$. Поскольку $p > 3$, то $a_i + 3 \leqslant p$ и $L = L(a_i\omega_1 + \omega_2)$ по [8]. Согласно леммам 3 и 4 модуль L является прямым слагаемым ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $2a_i + 2 < p$, то применяя лемму 8 для модуля L, получаем, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant m(\varphi)+3, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x),$$

т.е. осталось найти только блок Жордана размерности 1. Пусть $2a_i + 2 = p+1$. Тогда из леммы 9 при $U = L$ и $b = 1$ следует, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant p-4, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

В этом случае осталось найти блоки Жордана размерности 1 и $p-2$.

Положим $P = G(i, i+1, i+2)$. По теореме Смита [14], $N = KPv^+ = L(\nu)$ для $\nu = a_i\omega_1 + a_{i+2}\omega_3$ и N является прямым слагаемым ограничения $M|P$. Пусть

$$\omega' = \nu - (a_i + a_{i+2} + 3 - p)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Согласно [11, лемма 3.7], $L(\nu) = \Delta(\nu)/L(\omega')$, если $a_i + a_{i+2} + 3 > p$, $a_i + 2 < p$ и $a_{i+2} + 2 < p$, и $L(\nu) = \Delta(\nu)$ в других случаях. Предположим, что $a_i + a_{i+2} + 2 \neq p$. По лемме 11, $\dim N^{\nu-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = 4$, $\dim N^{\nu-\alpha_2-\alpha_3} = 1$ и $\dim N^{\nu-\alpha_1-\alpha_3} = 2$. Значит, существует вектор $v \in M^{\omega-\alpha_i-\alpha_{i+1}-\alpha_{i+2}}$, примитивный относительно подгруппы H. Вес $\omega_H(v) = (a_i - 1)\omega_1$. Заметим, что $v \in M_C$ для вышеуказанного набора C. Положим $L_1 = KHv$. Как и выше, $\mathrm{Jord}_{L_1}(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Следовательно, $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$ и $p - 2 \in \mathrm{Jord}_M(x)$ при $a_i = \frac{p-1}{2}$.

Пусть $a_i + a_{i+2} + 2 = p$. Тогда a_{i+2} четное. Кроме того, в этом случае $a_i \neq \frac{p-1}{2}$, так как иначе $a_{i+2} = \frac{p-3}{2}$ и получаем противоречие с минимальностью $m(\varphi)$. Мы можем считать, что $x \in H_1 = G(i+1, i+2)$. Очевидно, что в нашем случае $a_{i+2} \leqslant p - 3$. По теореме Смита [14], $N = KHv^+ = L(\mu)$ для $\mu = a_{i+2}\omega_2$, и этот модуль является прямым слагаемым ограничения $M|H_1$. Из леммы 1 вытекает, что $\mathrm{Jord}_N(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Согласно лемме 9 с $b \leqslant p - 6$, $1 \in \mathrm{Jord}_M(x)$.

г) Пусть $a_{i+1} \neq 0$ и нечетно. Из формулы (1) и леммы 8 следует, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant m(\varphi) + 1, k \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Значит, $\{3\} \subset \mathrm{Jord}_M(x)$ при $p = 3$.

Далее предполагаем, что $p > 3$. Если $i > 1$, то переходим к дуальному модулю и рассуждаем, как в предыдущем пункте. Значит, мы можем предполагать, что $i = 1$. Если $a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$, то мы снова переходим к предыдущему пункту. Остались случаи $a_3 \neq 0$, а также $r = 3$ и $\omega = a_2\omega_2$.

Рассмотрим случай $a_3 \neq 0$. Положим $v = X_{-3}v^+$ и определим набор C следующим образом: $c_3 = 1$ и $c_j = 0$ при $j > 3$. Тогда $v \in M_C$, $\omega_H(v) = (a_2+1)\omega_2$ и этот вектор примитивен относительно подгруппы H по лемме 2.46 из [15]. Положим $L = KHv$. Поскольку $a_2 + 3 \leqslant p$, то $L = L((a_2 + 1)\omega_2)$ по [8]. Согласно леммам 3 и 4 модуль L является прямым слагаемым ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $2a_2 + 2 < p$, то применяя лемму 8 для модуля L, получаем, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant m(\varphi) + 3, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Пусть $2a_2 + 2 = p + 1$. Тогда из леммы 9 при $U = L$ и $b = 1$ следует, что

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant p-6, k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

В этом случае осталось найти блок Жордана размерности $p-2$. Предположим сначала, что $a_3 \neq (p-1)/2$. Тогда по лемме 12 существует примитивный относительно H вектор $v \in M^{\omega-\alpha_2-\alpha_3}$. Определим набор C, как и выше. Имеем $(p-1)/2 + 3 \leqslant p$, $v \in M_C$ и $\omega_H(v) = \omega_1 + \frac{p-3}{2}\omega_2$. Положим $L = KHv$. По [8], $L = L(\omega_1 + \frac{p-3}{2}\omega_2)$. Согласно леммам 3 и 4 модуль L является прямым слагаемым ограничения $M|H$ и $\mathrm{Jord}_L(x) \subset \mathrm{Jord}_M(x)$. Применяя лемму 8 для модуля L, получаем, что $p-2 \in \mathrm{Jord}_M(x)$. Если $a_3 = (p-1)/2$, то

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2), k \neq p-2\} \subset \mathrm{Jord}_M(x).$$

Теперь предположим, что $r = 3$ и $\omega = a_2\omega_2$. В данном случае мы предполагаем, что $p \geqslant 3$. Ограничение $M|H$ вполне приводимо по [9, теорема 6.2]. Согласно [11, теорема 1.3], ограничение $M|H$ состоит в точности из композиционных факторов со старшими весами $x_1\omega_1 + x_2\omega_2$, где $0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant a_2$, $x_1 + x_2 = a_2$. Рассматривая модули $L(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)$ и применяя к ним леммы 1 и 8, мы получаем, что

$$\mathrm{Jord}_M(x) = \{k \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant k \leqslant s(\varphi), k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\}.$$

Теорема доказана. □

Литература

1. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. VII–VIII. Мир, М. (1978).
2. М. В. Величко, *О поведении корневых элементов в модулярных представлениях симплектических групп.* — Труды Института математики НАН Беларуси **14:2** (2006), 28–34.
3. М. В. Величко, *Свойства малых унипотентных элементов в модулярных представлениях классических алгебраических групп.* — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики НАН Беларуси. Минск. (2007).
4. А. А. Осиновская, *Ограничения неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3$ на подалгебры типа $\mathfrak{sl}_2$ и структура блоков Жордана нильпотентных элементов.* — Весці НАН Беларусі, Сер фіз.-мат. навук. No. 2 (2000), 52–55.
5. А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко, *Унипотентные элементы из подсистемных подгрупп типа A_3 в представлениях специальной линейной группы.* — Доклады НАН Беларуси **56:4** (2012), 11–15.
6. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М. (1975).

7. И. Д. Супруненко, *Сохранение систем весов неприводимых представлений алгебраической группы и алгебры Ли типа A_l с ограниченными старшими весами при редукции по модулю p.* — Весці АН БССР, Сер. фіз.-мат. навук. н. 2 (1983), 18–22.
8. B. Braden, *Restricted representations of classical Lie algebras of type A_2 and B_2.* — Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 482–486.
9. J. Brundan, A. Kleshchev, I. Suprunenko, *Semisimple restrictions from $GL(n)$ to $GL(n-1)$.* — J. reine angew. Math. **500** (1998), 83–112.
10. J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups.* 2nd edition. Providence. (2003).
11. A. A. Osinovskaya, *On the restrictions of modular irreducible representations of algebraic groups of type A_n to naturally embedded subgroups of type A_2.* — J. Group Theory **8** (2005), 43–92.
12. A. A. Osinovskaya, I. D. Suprunenko, *On the Jordan block structure of images of some unipotent elements in modular irreducible representations of the classical algebraic groups.* — J. Algebra **273:2** (2004), 586–600.
13. G. M. Seitz, *Unipotent elements, tilting modules, and saturation.* — Inv. Math. **141:3** (2000), 467–503.
14. S. Smith, *Irreducible modules and parabolic subgroups.* — J. Algebra **75** (1982), 286–289.
15. I. D. Suprunenko, *The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic.* — Memoirs of the AMS **200:939** (2009).
16. M. V. Velichko, *On the behaviour of root elements in irreducible representations of simple algebraic groups.* — Труды Института математики НАН Беларуси **13:2** (2005), 116–121.

Osinovskaya A. A. Regular unipotent elements from subsystem subgroups of type A_2 in representations of the special linear groups.

For $p > 2$ odd, Jordan block sizes of the images of regular unipotent elements from subsystem subgroups of type A_2 in irreducible p-restricted representations for groups of type A_r over the field of characteristic p, the weights of which are locally small with respect to p, are found. The weight is called locally small if the double sum of its two neighboring coefficients is less than p. This result is a part of a more common programme investigating the behavior of unipotent elements in representations of the classical algebraic groups. It can be used to solve recognition problems for representations or linear groups by the presence of certain elements.

Институт математики НАН Беларуси
ул. Сурганова 11,
220072, Минск, Беларусь
E-mail: anna@im.bas-net.by

Поступило 17 ноября 2014 г.