Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 430, 2014 г.

А. А. Иванов

BV-СТРУКТУРА НА КОГОМОЛОГИЯХ ХОХШИЛЬДА ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБР КВАТЕРНИОННОГО ТИПА В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2

Введение

Данная статья является продолжением работы [10], в которой была вычислена BV-структура на когомологиях Хохшильда групповой алгебры группы кватернионных единиц kQ_8 над алгебраически замкнутым полем k характеристики 2. Таким образом был получен один из первых результатов такого рода для некоммутативной группы. В настоящей работе получен аналогичный результат уже для объемлющей серии алгебр R_k, включающей в себя при $k = 2^n$ групповые алгебры обобщенных кватернионных групп. Например, $R_2 \cong kQ_8$. Поскольку при $k = 2$ задача уже решена в статье [10], далее всюду предполагается $k \geqslant 3$.

На когомологиях Хохшильда ассоциативных алгебр имеется богатая структура, например, кроме структуры градуированно-коммутативной алгебры, введенной Г. Хохшильдом [9], есть градуированная сдвинутая лиевская структура, согласованная с умножением, определенная М. Герстенхабером [6], так называемая скобка Герстенхабера. Для симметрических алгебр Т. Трэдлер [21] определил на когомологиях Хохшильда BV-дифференциал, который управляет скобкой Герстенхабера. Все эти структуры крайне сложны для вычисления, в особенности, структура алгебры Герстенхабера и BV-структура. Это является следствием того, что они определены в терминах бар-резольвенты алгебры, которая практически непригодна для вычислений. В работе [10] и в настоящей эти трудности преодолеваются при помощи, так называемых сравнивающих гомоморфизмов между резольвентами. Работа, также как и [10], основывается на статье

Ключевые слова: когомологии Хохшильда, BV-алгебра, алгебра Герстенхабера, групповые блоки ручного типа представления, групповая алгебра, обобщенные группы кватернионов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00902) и гранта президента РФ МД-381.2014.1.

А. И. Генералова [5], в которой была построена минимальная проективная бимодульная резольвента для всего семейства алгебр R_k и вычислена мультипликативная структура алгебры когомологий Хохшильда.

Необходимо отметить, что алгебры семейства R_k ручные и возникают естественным образом в классификации ручных групповых блоков в работе К. Эрдманн [3].

§1. Когомологии Хохшильда

В этой части вводятся основные определения. Пусть A – k-алгебра, ее группы когомологий Хохшильда определяются как $HH^n(A) \cong \operatorname{Ext}^n_{A^e}(A,A)$ для $n \geqslant 0$, где $A^e = A \otimes A^{\mathrm{op}}$ обертывающая алгебра A. Существует проективная резольвента A как A^e-модуля

$$\operatorname{Bar}_*(A)\colon \ \cdots \to A^{\otimes(r+2)} \xrightarrow{d_r} A^{\otimes(r+1)} \to \cdots \to A^{\otimes 3} \xrightarrow{d_1} A^{\otimes 2} (\overset{d_0=\mu}{\to} A),$$

где $\operatorname{Bar}_r(A) := A^{\otimes(r+2)}$ для $r \geqslant 0$, гомоморфизм $\mu : A \otimes A \to A$ задается умножением в A, и d_r определяются следующим образом

$$d_r(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r+1}) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{r+1}$$

для всех $a_0, \ldots, a_{r+1} \in A$. Таким образом построена бар-резольвента алгебры A. Ее нормализованная версия $\overline{\operatorname{Bar}}_*(A)$ определяется как $\overline{\operatorname{Bar}}_r(A) = A \otimes \overline{A}^{\otimes r} \otimes A$, где $\overline{A} = A/(k \cdot 1_A)$, и дифференциал индуцирован с $\operatorname{Bar}_*(A)$.

Когомологии Хохшильда вычисляются по комплексу $C^*(A) = \operatorname{Hom}_{A^e}(\operatorname{Bar}_*(A), A)$. Заметим, что для любого $r \geqslant 0$

$$C^r(A) = \operatorname{Hom}_{A^e}(A^{\otimes(r+2)}, A) \cong \operatorname{Hom}_k(A^{\otimes r}, A).$$

Поэтому $C^*(A)$ имеет следующий вид:

$$C^*(A)\colon A \xrightarrow{\delta^0} \operatorname{Hom}_k(A,A) \to \cdots \to \operatorname{Hom}_k(A^{\otimes r}, A) \xrightarrow{\delta^r} \operatorname{Hom}_k(A^{\otimes(r+1)}, A) \to \cdots .$$

Для данного $f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes r}, A)$, отображение $\delta^r(f)$ переводит $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r+1}$ в

$$a_1 \cdot f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{r+1}) + \sum_{i=1}^{r} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{r+1}) + (-1)^{r+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r) \cdot a_{r+1}.$$

Есть также номализованная версия $\overline{C}^*(A) = \mathrm{Hom}_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}_*(A), A) \cong \mathrm{Hom}_k(\overline{A}^{\otimes *}, A)$.

Кап-умножение $\alpha \smile \beta \in C^{n+m}(A) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes(n+m)}, A)$ для $\alpha \in C^n(A)$ и $\beta \in C^m(A)$ задано как

$$(\alpha \smile \beta)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m}) := \alpha(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot \beta(a_{n+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+m}).$$

Кап-произведение индуцирует умножение на когомологиях Хохшильда:

$$\smile : HH^n(A) \times HH^m(A) = HH^{n+m}(A),$$

которые становятся, таким образом, градуированно-коммутативной алгеброй $HH^*(A) = \bigoplus_{n \geqslant 0} HH^n(A)$ ([6, следствие 1]).

Скобка Ли определяется следующим образом. Пусть $\alpha \in C^n(A)$ и $\beta \in C^m(A)$. Пусть $n, m \geqslant 1$, тогда для $1 \leqslant i \leqslant n$, определим $\alpha \circ_i \beta \in C^{n+m-1}(A)$ как

$$(\alpha \circ_i \beta)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1}) := \alpha(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \beta(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+m-1}) \otimes a_{i+m} \otimes \cdots \otimes a_{n+m-1});$$

если $n \geqslant 1$ и $m = 0$, то $\beta \in A$ и для $1 \leqslant i \leqslant n$ определим

$$(\alpha \circ_i \beta)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) := \alpha(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \beta \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_{n-1});$$

во всех остальных случаях придадим $\alpha \circ_i \beta$ нулевое значение. Теперь определим

$$\alpha \circ \beta := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(m-1)(i-1)} \alpha \circ_i \beta$$

и

$$[\alpha, \beta] := \alpha \circ \beta - (-1)^{(n-1)(m-1)} \beta \circ \alpha.$$

Заметим, что $[\alpha, \beta] \in C^{n+m-1}(A)$. Определенная выше скобка $[\ ,\ ]$ индуцирует корректно определенную градуированную скобку Ли на когомологиях Хохшильда

$$[\ ,\ ] : HH^n(A) \times HH^m(A) \longrightarrow HH^{n+m-1}(A),$$

так, что $(HH^*(A), \smile, [\ ,\ ])$ становится алгеброй Герстенхабера (см. [6]).

Гомологии Хохшильда $HH_*(A)$ вычисляются по комплексу $C_*(A) = A \otimes_{A^e} \mathrm{Bar}_*(A)$. Заметим, что $C_r(A) = A \otimes_{A^e} A^{\otimes(r+2)} \simeq A^{\otimes(r+1)}$ и дифференциал $\partial_r : C_r(A) = A^{\otimes(r+1)} \to C_{r-1}(A) = A^{\otimes r}$ отправляет $a_0 \otimes \cdots \otimes a_r$ в $\sum\limits_{i=0}^{r-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_r + (-1)^r a_r a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{r-1}$.

На гомологиях Хохшильда определен $\mathfrak{B}$-оператор Конна: для $a_0 \otimes \cdots \otimes a_r \in C_r(A)$ зададим $\mathfrak{B}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_r) \in C_{r+1}(A)$ как

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^{ir} 1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_r \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}$$
$$+ \sum_{i=0}^{r} (-1)^{ir} a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_r \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}.$$

$\mathfrak{B}$ является цепным отображением и, кроме того, удовлетворяет соотношению $\mathfrak{B} \circ \mathfrak{B} = 0$, таким образом индуцируется $\mathfrak{B} : HH_r(A) \to HH_{r+1}(A)$.

Все вышеприведенные конструкции переносятся на нормализованный комплекс.

Определение 1.1. *Алгеброй Баталина–Вилковыского* (или BV-алгеброй) называется алгебра Герстенхабера $(A^\bullet, \smile, [\ ,\ ])$, на которой задан оператор $\Delta\colon A^\bullet \to A^{\bullet-1}$ степени -1 такой, что $\Delta \circ \Delta = 0$ и

$$[a, b] = -(-1)^{(|a|-1)|b|}(\Delta(a \smile b) - \Delta(a) \smile b - (-1)^{|a|} a \smile \Delta(b))$$

для однородных элементов $a, b \in A^\bullet$.

Трэдлер показал, что когомологии Хохшильда симметрической алгебы – BV-алгебра [21], смотри также [4, 19]. В случае симметрической алгебры A, Δ-оператор на когомологиях Хохшильда соответствует оператору Конна $\mathfrak{B}$ на гомологиях Хохшильда по двойственности между когомологиями и гомологиями Хохшильда.

Конечномерная k-алгебра A называется симметрической, если A изоморфна своей двойственной $DA = \mathrm{Hom}_k(A, k)$ как A^e-модуль, или, эквивалентно, если существует симметрическая невырожденная билинейная форма $\langle\ ,\ \rangle\colon A \times A \to k$. Эта форма индуцирует двойственность между гомологиями и когомологиями Хохшильда:

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_k(C_*(A),\,k) &= \operatorname{Hom}_k(A\otimes_{A^e}\operatorname{Bar}_*(A),\,k)\\ &\cong \operatorname{Hom}_{A^e}(\operatorname{Bar}_*(A),\,\operatorname{Hom}_k(A,k))\\ &\cong \operatorname{Hom}_{A^e}(\operatorname{Bar}_*(A),\,A)=C^*(A).\end{aligned}$$

Таким образом, по двойственности получаем для всякого $n\geqslant 1$ оператор $\Delta\colon HH^n(A)\to HH^{n-1}(A)$, двойственный к оператору Конна.

Приведем аеорему Трэдлера.

Теорема 1.2. [21, теорема 1] *В предыдущих обозначениях $\smile$-произведение, скобка Герстенхабера и Δ-оператор, определенный выше, образуют структуру BV-алгебры на когомологиях Хохшильда алгебры A. Точнее, для $\alpha\in C^n(A)=\operatorname{Hom}_k(A^{\otimes n},A)$*

$$\Delta(\alpha)\in C^{n-1}(A)=\operatorname{Hom}_k(A^{\otimes(n-1)},A)$$

задан уравнением

$$\begin{aligned}&\langle\Delta(\alpha)(a_1\otimes\cdots\otimes a_{n-1}),\ a_n\rangle\\ &=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i(n-1)}\langle\alpha(a_i\otimes\cdots\otimes a_{n-1}\otimes a_n\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{i-1}),\ 1\rangle\end{aligned}$$

для $a_1,\dots,a_n\in A$. Та же формула выполняется и для нормализованного комплекса $\overline{C}^*(A)$.

§2. Стягивающая гомотопия для R_k

Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики 2. Определим семейство ассоциативных алгебр R_k, где $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$, в терминах следующего колчана Q:

с соотношениями

$$x^2+y(xy)^{k-1},y^2+x(yx)^{k-1},x^k+y^k,x(yx)^k.$$

Алгебра $R_k=kQ/I$ имеет следующий базис

$$\mathcal{B}=\left\{x(yx)^{j-1},y(xy)^{j-1},(xy)^j,(yx)^{j-1}\right\}_{j=1}^{k}.$$

Алгебры семейства R_k симметрические, с билинейной формой

$$\langle b_1,b_2\rangle=\begin{cases}1, & \text{если } b_1b_2\in\operatorname{Soc}(A),\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

где b_1, $b_2 \in \mathcal{B}$. Двойственный базис $\mathcal{B}^*$ задается следующим образом:

$$\begin{array}{lcccccc} b \in \mathcal{B}: & 1 & x(yx)^j & y(xy)^j & (xy)^j & (yx)^j & (xy)^k \\ b^* \in \mathcal{B}^*: & (xy)^k & y(xy)^{k-1-j} & x(yx)^{k-1-j} & (xy)^{k-j} & (yx)^{k-j} & 1 \end{array}$$

В работе [5] построена 4-периодическая минимальная проективная бимодульная резольвента, которая допускает описание в терминах следующей точной последовательности:

$$(0 \to A \xrightarrow{\rho})A \otimes A \xrightarrow{d_3} A \otimes kQ_1^* \otimes A \xrightarrow{d_2} A \otimes kQ_1 \otimes A \xrightarrow{d_1} A \otimes A \xrightarrow{d_0} A \to 0,$$

где

- $Q_1 = \{x, y\}$ и $Q_1^* = \{r_x, r_y\}$, $r_x = x^2 + y(xy)^{k-1}$ и $r_y = y^2 + x(yx)^{k-1}$;
- отображение d_0 задано умножением в A;
- $d_1(1 \otimes x \otimes 1) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ и $d_1(1 \otimes y \otimes 1) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$;
- $d_2(1 \otimes r_x \otimes 1) = 1 \otimes x \otimes x + x \otimes x \otimes 1 + \sum\limits_{i=0}^{k-2} (yx)^i y \otimes x \otimes y(xy)^{k-2-i}$ $+ \sum\limits_{i=1}^{k-1} (yx)^i \otimes y \otimes (xy)^{k-1-i} + 1 \otimes y \otimes (xy)^{k-1}$,
  и
  $d_2(1 \otimes r_y \otimes 1) = 1 \otimes y \otimes y + y \otimes y \otimes 1 + \sum\limits_{i=0}^{k-2} (xy)^i x \otimes y \otimes x(yx)^{k-2-i}$ $+ \sum\limits_{i=1}^{k-1} (xy)^i \otimes x \otimes (yx)^{k-1-i} + 1 \otimes x \otimes (yx)^{k-1}$;
- $d_3(1 \otimes 1) = x \otimes r_x \otimes 1 + 1 \otimes r_x \otimes x + y \otimes r_y \otimes 1 + 1 \otimes r_y \otimes y$;
- $\rho(1) = \sum\limits_{b \in \mathcal{B}} b^* \otimes b$.

Все остальные проективные бимодули определяются, тогда следующим образом:

- $P_0 = A \otimes A = P_3$, $P_1 = A \otimes kQ_1 \otimes A$ и $P_2 = A \otimes kQ_1^* \otimes A$;
- $P_4 = P_0 = A \otimes A$ и $d_4 = \rho \circ d_0 : P_4 \to P_3$;
- для $n \geqslant 1$ и $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ имеем $P_{4n+i} = P_i$ и $d_{4n+i+1} = d_{i+1}$.

Следуя методу вычисления BV-структуры из статьи [10], предъявим стягивающую гомотопию $\{t_i : P_i \to P_{i+1}; t_{-1} : A \to P_0\}$ этой периодической резольвенты, составленную из гомоморфизмов правых модулей.

Как и в [10], $t_{-1} = 1 \otimes 1$ и $t_0(b \otimes 1) = \mathsf{C}(b)$ для $b \in \mathrm{B}$, где $\mathsf{C} : kQ \to kQ \otimes kQ_1 \otimes kQ$ – бимодульное дифференцирование, отправляющее путь $\alpha_1 \cdots \alpha_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in Q_1$ в $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \cdots \alpha_n$.

Отображение $t_1 : P_1 \to P_2$ задается следующим образом:

$$t_1(b \otimes x \otimes 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } bx \in \mathcal{B}, \\ r_x, & \text{если } b = x, \\ T(yr_x + (xy)^{k-1} r_x y (xy)^{k-2} + r_y (xy)^{k-1}), & \text{если } b = Tyx, \\ r_y y + y r_y, & \text{если } b = y(xy)^{k-1}, \\ r_x x^2 + x r_x x + x^2 r_x + (yx)^{k-1} r_y (xy)^{k-1}, & \text{если } b = (xy)^k; \end{cases}$$

$$t_1(b \otimes y \otimes 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } by \in \mathcal{B}, \\ r_y, & \text{если } b = y, \\ T(xr_y + (yx)^{k-1} r_y x (yx)^{k-2} + r_x (yx)^{k-1}), & \text{если } b = Txy; \end{cases}$$

где $T \in \mathcal{B}$.

Отметим, что $t_1(b_1 \otimes b_2 \otimes 1) = 0$ для $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, таких, что $b_1 b_2 \in \mathcal{B}$.

Отображение $t_2 : P_2 \to P_3$ задается следующим образом:

$$t_2(b \otimes r_x \otimes 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } bx \in \mathcal{B}, \\ 1, & \text{если } b = x, \\ \sum\limits_{j=1}^{i-1} (yx)^j \otimes y(xy)^{i-j-1} + \sum\limits_{j=1}^{i} (yx)^{j-1} y \otimes (xy)^{i-j}, & \text{если } b = (yx)^i, \\ \sum\limits_{j=1}^{i} ((xy)^j \otimes (xy)^{i-j} + x(yx)^{j-1} \otimes y(xy)^{i-j}), & \text{если } b = x(yx)^i, \\ 1 \otimes x, & \text{если } b = y(xy)^{k-1}, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} ((yx)^j \otimes y(xy)^{k-1-j} + y(xy)^j \otimes (xy)^{k-1-j}), & \text{если } b = (xy)^k; \end{cases}$$

$$t_2(b\otimes r_y\otimes 1)$$
$$=\begin{cases}0, & \text{если } bx\in\mathcal{B},\\ 0, & \text{если } b=y,\\ \sum\limits_{j=1}^{i-1}(xy)^j\otimes x(yx)^{i-j-1}+\sum\limits_{j=1}^{i}(xy)^{j-1}x\otimes(yx)^{i-j}, & \text{если } b=(xy)^i,\\ \sum\limits_{j=1}^{i}((yx)^j\otimes(yx)^{i-j}+y(xy)^{j-1}\otimes x(yx)^{i-j}), & \text{если } b=y(xy)^i.\end{cases}$$

Наконец, определим $\tau: P_3=A\otimes A\to A$ таким образом: $\tau(xyxy\otimes 1)=1$ и $\tau(b\otimes 1)=0$ для $b\in\mathcal{B}-\{xyxy\}$. Мы положим $t_3=t_{-1}\circ\tau: P_3\to P_4$ и определим $t_{4n+i}=t_i$ для $n\geqslant 0$ и $i\in\{0,1,2,3\}$.

Предложение 2.1. Определенные выше $\{t_i\}_{i\geqslant -1}$ образуют стягивающую гомотопию для резольвенты P_*.

Доказательство. Резольвента 4-периодична, поэтому достаточно показать

$$\begin{cases} d_0t_{-1} &= \mathrm{Id},\\ d_{p+1}t_p+t_{p-1}d_p &= \mathrm{Id}, \text{ если } 0\leqslant p\leqslant 2,\\ t_2d_3+\rho\tau &= \mathrm{Id},\\ \tau\rho &= \mathrm{Id},\end{cases}$$

что проверяется прямыми вычислениями. □

§3. Сравнивающие гомоморфизмы для R_k

Ключевым инструментом в вычислении будут служить сравнивающие гомоморфизмы, связывающие минимальную резольвенту P_* и бар-резольвенту алгебры $A:=R_k$. Эти гомоморфизмы позволяют переопределять коциклы, заданные на одной резольвенте, в терминах другой. Это необходимо, поскольку мультипликативная структура алгебры когомологий Хохшильда вычисляется по минимальной резольвенте, а BV-дифференциал и скобка Герстенхабера, в свою очередь, определяются в терминах бар-резольвенты.

Для алгебры A обозначим $\overline{A}=A/(k\cdot 1)$. Нормализованная бар-резольвента – это фактор-комплекс обычной бар-резольвенты, чей p-й член определяется, как $B_p(A)=A\otimes\overline{A}^{\otimes p}\otimes A$, а дифференциал индуцирован стандартным дифференциалом бар-резольвенты.

Используя методы из части 2 статьи [10], можно вычислить сравнивающие гомоморфизмы между минимальной резольвентой P_* и нормализованной бар-резольвентой $\mathrm{Bar}_*(A)$, которые мы обозначим $\Phi_* : P_* \to \mathrm{Bar}_*(A)$ и $\Psi_* : \mathrm{Bar}_*(A) \to P_*$.

В соответствующих формулах, приведенных ниже для Φ_i при $i \leqslant 6$, всюду $b \in \mathcal{B}\setminus\{1\}$, а также введены $f \in \mathcal{F} = \mathcal{B}\setminus\{1, y(xy)^{k-1}, x(yx)^{k-1}, (xy)^k\}$ и $f_a \in \mathcal{F}\setminus\{Ta \mid T \in \mathcal{B}\setminus\{1\}\}$. Определим также операцию $\overline{f_x}$ следующим образом: $\overline{x} = 1$, $\overline{y(xy)^i} = y(xy)^{k-2-i}$ и $\overline{(xy)^i} = (yx)^{k-1-i}$, аналогично $\overline{f_y}$ определяется, как $\overline{(yx)^i} = (xy)^{k-1-i}$, $\overline{y} = 1$ и $\overline{x(yx)^i} = x(yx)^{k-2-i}$.

- $\Phi_0 = \mathrm{Id} : P_0 = A \otimes A \to B_0 = A \otimes A$;
- $\Phi_1 : P_1 = A \otimes kQ_1 \otimes A \to B_1 = A \otimes \overline{A} \otimes A$ индуцирована вложением $kQ_1 \hookrightarrow \overline{A}$;
- $\Phi_2 : P_2 = A \otimes kQ_1^* \otimes A \to B_2 = A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \otimes A$ задается как

$$\Phi_2(1 \otimes r_x \otimes 1) = 1 \otimes x \otimes x \otimes 1 + \sum_{i=0}^{k-2} 1 \otimes (yx)^i y \otimes x \otimes y(xy)^{k-2-i} + \sum_{i=1}^{k-1} 1 \otimes (yx)^i \otimes y \otimes (xy)^{k-1-i}$$

и

$$\Phi_2(1 \otimes r_y \otimes 1) = \sum_{i=1}^{k-1} 1 \otimes (xy)^i \otimes x \otimes (yx)^{k-1-i} + 1 \otimes y \otimes y \otimes 1 + \sum_{i=0}^{k-2} 1 \otimes (xy)^i x \otimes y \otimes x(yx)^{k-2-i};$$

- $\Phi_3 : P_3 = A \otimes A \to B_3 = A \otimes \overline{A}^{\otimes 3} \otimes A$ задается как

$$\Phi_3(1 \otimes 1) = 1 \otimes x\Phi_2(1 \otimes r_x \otimes 1) + 1 \otimes y\Phi_2(1 \otimes r_y \otimes 1)$$
$$= 1 \otimes x \otimes x \otimes x \otimes 1 + \sum_{i=0}^{k-2} 1 \otimes x \otimes (yx)^i y \otimes x \otimes y(xy)^{k-2-i}$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1} 1 \otimes x \otimes (yx)^i \otimes y \otimes (xy)^{k-1-i} + 1 \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1} 1 \otimes y \otimes (xy)^i \otimes x \otimes (yx)^{k-1-i}$$

$$+\sum_{i=0}^{k-2} 1\otimes y\otimes (xy)^i x\otimes y\otimes x(yx)^{k-2-i};$$

- $\Phi_4 : P_4 = A\otimes A \to B_4 = A\otimes \overline{A}^{\otimes 4}\otimes A$ задается как

$$\Phi_4(1\otimes 1) = \sum_b 1\otimes b\Phi_3(1\otimes 1)b^*;$$

- $\Phi_5 : P_5 = A\otimes kQ_1\otimes A \to B_5 = A\otimes \overline{A}^{\otimes 5}\otimes A$ задается как

$$\Phi_5(1\otimes a\otimes 1) = 1\otimes a\Phi_4(1\otimes 1) = \sum_{b,c,f} 1\otimes a\otimes b\otimes c\otimes f\otimes \tilde{c}\otimes \overline{f}b^*$$

$$= \sum_b 1\otimes a\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x\otimes b^* + \sum_{i=0}^{k-2}\sum_b 1\otimes a\otimes b\otimes x\otimes (yx)^i y\otimes x$$

$$\otimes y(xy)^{k-2-i}b^* + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_b 1\otimes a\otimes b\otimes x\otimes (yx)^i\otimes y\otimes (xy)^{k-1-i}b^*$$

$$+\sum_b 1\otimes a\otimes b\otimes y\otimes y\otimes y\otimes b^*$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_b 1\otimes a\otimes b\otimes y\otimes (xy)^i\otimes x\otimes (yx)^{k-1-i}b^*$$

$$+\sum_{i=0}^{k-2}\sum_b 1\otimes a\otimes b\otimes y\otimes (xy)^i x\otimes y\otimes x(yx)^{k-2-i}b^*,$$

где a, c, $\tilde{c}\in\{x,y\}$, и либо $cf, f\tilde{c}\in\mathcal{B}$, либо $c=f=\tilde{c}$. В первом случае мы полагаем $\overline{f}=\overline{f_a}$ для $f_a=f$, а во втором положим $\overline{f}=1$.

- $\Phi_6 : P_5 = A\otimes kQ_1\otimes A \to B_6 = A\otimes \overline{A}^{\otimes 6}\otimes A$ задается как

$$\Phi_6(1\otimes r_a\otimes 1) = \sum_{f_a^{\mathrm{odd}},b,f,c} 1\otimes f_a^{\mathrm{odd}}\otimes a\otimes b\otimes c\otimes f\otimes \tilde{c}\otimes \bar{f}b^*\overline{f_a^{\mathrm{odd}}}$$

$$+\sum_{f_{\tilde{a}}^{\mathrm{ev}},b,f,c} 1\otimes f_{\tilde{a}}^{\mathrm{ev}}\otimes \tilde{a}\otimes b\otimes c\otimes f\otimes \tilde{c}\otimes \overline{f}b^*\overline{f_{\tilde{a}}^{\mathrm{ev}}}$$

$$= \sum_{f_a^{\mathrm{odd}},b} 1\otimes f_a^{\mathrm{odd}}\otimes a\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x\otimes b^*\overline{f_a^{\mathrm{odd}}}$$

$$+\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{f_a^{\mathrm{odd}},b} 1\otimes f_a^{\mathrm{odd}}\otimes a\otimes b\otimes x\otimes (yx)^j y\otimes x\otimes y(xy)^{k-2-j}b^*\overline{f_a^{\mathrm{odd}}}$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{f_a^{\mathrm{odd}},b} 1\otimes f_a^{\mathrm{odd}}\otimes a\otimes b\otimes x\otimes (yx)^j\otimes y\otimes (xy)^{k-1-j}b^*\overline{f_a^{\mathrm{odd}}}$$
$$+\sum_{f_a^{\mathrm{odd}},b,f} 1\otimes f_a^{\mathrm{odd}}\otimes a\otimes b\otimes y\otimes y\otimes y\otimes b^*\overline{f_a^{\mathrm{odd}}}$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{f_a^{\mathrm{odd}},b} 1\otimes f_a^{\mathrm{odd}}\otimes a\otimes b\otimes y\otimes (xy)^j\otimes x\otimes (yx)^{k-1-j}b^*\overline{f_a^{\mathrm{odd}}}$$
$$+\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{f_a^{\mathrm{odd}},b} 1\otimes f_a^{\mathrm{odd}}\otimes a\otimes b\otimes y\otimes (xy)^j x\otimes y\otimes x(yx)^{k-2-j}b^*\overline{f_a^{\mathrm{odd}}}$$

$$+\sum_{f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}},b} 1\otimes f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}}\otimes \tilde a\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x\otimes b^*\overline{f_{\tilde a^{\mathrm{ev}}}}$$
$$+\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}},b} 1\otimes f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}}\otimes \tilde a\otimes b\otimes x\otimes (yx)^j y\otimes x\otimes y(xy)^{k-2-j}b^*\overline{f_{\tilde a}}$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}},b} 1\otimes f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}}\otimes \tilde a\otimes b\otimes x\otimes (yx)^j\otimes y\otimes (xy)^{k-1-j}b^*\overline{f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}}}$$
$$+\sum_{f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}},b,f} 1\otimes f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}}\otimes \tilde a\otimes b\otimes y\otimes y\otimes y\otimes b^*\overline{f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}}}$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}},b} 1\otimes f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}}\otimes \tilde a\otimes b\otimes y\otimes (xy)^j\otimes x\otimes (yx)^{k-1-j}b^*\overline{f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}}}$$
$$+\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}},b} 1\otimes f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}}\otimes \tilde a\otimes b\otimes y\otimes (xy)^j x\otimes y\otimes x(yx)^{k-2-j}b^*\overline{f_{\tilde a}^{\mathrm{ev}}},$$

где $a, c, \tilde c$ такие же как и в предыдущем пункте, f_a^{odd} обозначает f_a нечетной длины, f_a^{ev}, соответственно, – четной, наконец,
$$\tilde a = \begin{cases} x, & \text{если } a = y,\\ y, & \text{если } a = x.\end{cases}$$

Цепное отображение $\Psi_* : \mathrm{Bar}_*(A) \to P_*$ может быть вычислено по методу части 2 работы [10] в терминах t_*. Однако размерность $\mathrm{Bar}_n(A)$ очень быстро растет. Отображение Ψ_n необходимо задать на 7^n элементах. Таким образом, полное описание будет дано лишь для Ψ_0 и Ψ_1, а в остальных случаях будет для удобства читателя просто выписана рекурентная формула, доказанная в [10].

- $\Psi_0 = \mathrm{Id} : B_0 = A \otimes A \to P_0 = A \otimes A$;
- $\Psi_1 : B_1 = A \otimes \overline{A} \otimes A \to P_1 = A \otimes kQ_1 \otimes A$ задается $\Psi_1(1 \otimes b \otimes 1) = \mathsf{C}(b)$ для $b \in \mathcal{B} - \{1\}$.
- $\Psi_2 : B_2 = A \otimes \overline{A} \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \to A \otimes kQ_1^* \otimes A$ задается
$$\Psi_2(1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes 1) = t_1(a_1 \mathsf{C}(a_2))$$
- $\Psi_3 : B_3 = A \otimes \overline{A} \otimes \overline{A}^{\otimes 3} \to A \otimes kQ_1^* \otimes A$ задается
$$\Psi_2(1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes 1) = t_2(a_1 t_1(a_2 \mathsf{C}(a_3)))$$
- $\Psi_4 : B_4 = A \otimes \overline{A} \otimes \overline{A}^{\otimes 4} \to A \otimes A$ задается
$$\Psi_4(1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a4 \otimes 1) = t_3(a_1 t_2(a_2 t_1(a_3 \mathsf{C}(a_4))))$$

§4. BV-структура на $HH^*(R_k)$

А. И. Генералов получил следующий результат в статье [5].

Теорема 4.1. [5, теорема 1.1, случай 1a)] *Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики* 2. *Пусть $R = R_k$. Тогда $HH^*(R_k) \simeq k[\mathcal{X}]/I$, где*

- $\mathcal{X} = \{p_1, p_2, p_2', p_3, u_1, u_1', u_2, v_1, v_2, v_2', w, z\}$,
$$\begin{cases} |p_1| = |p_2| = |p_2'| = |p_3| = 0, |u_1| = |u_1'| = |u_2| = 1, \\ |v_1| = |v_2| = |v_2'| = 2, |w| = 3, |z| = 4; \end{cases}$$
- *идеал I порожден следующими соотношениями*

  степени 0
$$\begin{cases} p_1^k, p_2^2, (p_1')^2, p_1p_2, p_1p_2', p_2p_2', \\ p_3^2, p_1p_3, p_2p_3, p_2'p_3; \end{cases}$$
  степени 1
$$\begin{gathered} p_1^{k-1}u_2, p_2u_2, p_2'u_2, p_3u_2, \\ p_2u_1 - p_2'u_1', p_2'u_1 - p_1u_1', \\ p_1u_1 - p_2u_1', p_2u_1 - p_1^{k-2}u_2; \end{gathered}$$

степени 2

$$\begin{cases} p_1^{k-1}v_1, p_2v_2, p_2'v_2', p_3v_1, p_3v_2, p_3v_2', u_1u_1' - kp_1^{k-2}v_1, \\ p_2v_1 - p_1v_2', p_2v_1 - p_2'v_2, p_2v_1 - p_3u_1^2, \\ p_2'v_1 - p_1v_2, p_2'v_1 - p_2v_2', p_2'v_1 - p_3(u_1')^2, \\ u_2^2, u_1u_2 - kp_3(u_1')^2, u_1'u_2 - kp_3u_1^2; \end{cases}$$

степени 3

$$u_1'v_2 - u_1v_2', u_1'v_1 - u_1v_2, u_1v_1 - u_1'v_2', u_1^3 - (u_1')^3,$$
$$p_2w, p_2'w, p_3w, u_1'v_2 - p_1^{k-2}w,$$
$$u_2v_2, u_2v_2', u_2v_1 - p_1w;$$

степени 4

$$v_1^2 - p_1^2z, v_2^2, (v_2')^2, v_1v_2, v_1v_2', v_2v_2',$$
$$u_1w, u_1'w, u_2w.$$

степени 5

$$v_2w, v_2'w, v_1w - p_1u_2z;$$

степени 6

$$w^2.$$

Замечание 4.2. Пусть P – член минимальной резольвенты P_*. Будем обозначать элементы $\mathrm{Hom}_{A^e}(P, A)$ следующим образом. Если $P = A \otimes A$ и $a \in A$, тогда обозначим a отображение, отправляющее $1 \otimes 1$ в a. Если $P = A \otimes Q_1 \otimes A$ ($P = A \otimes Q_1^* \otimes A$), $a, b \in A$, то обозначим (a, b) отображение, отправляющее $1 \otimes x \otimes 1$ и $1 \otimes y \otimes 1$ ($1 \otimes r_x \otimes 1$ и $1 \otimes r_y \otimes 1$) в a и b, соответственно. Будем также использовать эти обозначения и для соответствующих когомологических классов. Из работы А. И. Генералова [5] следует, что $p_1 = xy + yx$, $p_2 = x(yx)^{k-1}$, $p_2' = y(xy)^{k-1}$, $p_3 = (xy)^k$, $u_1 = (1, x(yx)^{k-2})$, $u_1' = (y(xy)^{k-2}, 1)$, $u_2 = (xyx, 0)$, $v_1 = (y, x)$, $v_2 = (x, 0)$, $v_2' = (0, y)$, $w = xy$ и $z = 1$ в этих обозначениях. По [5, замечания 3.0.3, 3.1.3] имеем

$$((xy)^i + (yx)^i, 0), (0, (xy)^i + (yx)^i),$$
$$(x(yx)^i, y(xy)^i) \in B^1(R_k),\ 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$

и

$$((xy)^i + (yx)^i, 0), (0, (xy)^i + (yx)^i), (x(yx)^j, 0), (0, y(xy)^j),$$
$$(0, x(yx)^{k-1}), (y(xy)^{k-1}, 0), (xyx, (xy)^k), ((xy)^k, yxy) \in B^2(R_k),$$
$$1 \leqslant i \leqslant k-1,\ 2 \leqslant j \leqslant k-1.$$

По определению 1.1 и вследствие соотношения Пуассона,

$$[a \smile b,\, c] = [a,\, c] \smile b + (-1)^{|a|(|c|-1)} a \smile [b,\, c],$$

выполнено равенство (здесь мы учитываем, что $\mathrm{char}(k) = 2$)

$$\Delta(abc) = \Delta(ab)c + \Delta(ac)b + \Delta(bc)a + \Delta(a)bc + \Delta(b)ac + \Delta(c)ab. \quad (4.1)$$

Таким образом, необходимо вычислить $\Delta(x)$ лишь на $x \in \mathcal{X}$ и $x = a \cup b$, где $a, b \in \mathcal{X}$. Пусть $a \in HH^n(kQ_8)$ задан коциклом $f : P_n \to A$, тогда вычислим $\Delta(a)$ по формуле

$$\Delta(a) = \Delta(f \circ \Psi_n) \circ \Phi_{n-1}.$$

Очевидно, что $\Delta(a) = 0$ для $a \in \{p_1, p_2, p_2', p_3\}$ так как Δ степени -1.

Для $b, c \in \mathcal{B}$ имеем

$$\langle b, c \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } c = b^*, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда по теореме 1.2:

$$\Delta(\alpha)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \\ = \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \{1\}} \left\langle \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i(n-1)} \alpha(a_i \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes b \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}),\ 1 \right\rangle b^*$$

для $\alpha \in C^n(A)$, $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$.

Лемма 4.3.

$$\begin{aligned}
&\Delta(u_1) = \Delta(u_1') = 0,\ \Delta(u_2) = (k-1)p_1,\\
&\Delta(p_1u_1) = \Delta(p_1u_1') = \Delta(p_2'u_1) = \Delta(p_2u_1') = 0,\\
&\Delta(p_2u_1) = \Delta(p_2'u_1') = p_1^{k-1},\ \Delta(p_3u_1') = p_2,\ \Delta(p_3u_1) = p_2',\\
&\Delta(p_2u_2) = \Delta(p_2'u_2) = \Delta(p_3u_2) = 0,\ \Delta(p_1u_2) = (k-2)p_1^2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая приведенное выше описание кограниц B^1, имеем

$$\begin{aligned}
&p_1u_1 = (xy + yx, 0) = 0,\ p_1u_1' = (0, xy + yx) = 0\\
&p_1u_1 = p_1'u_1 = p_2u_2 = p_2'u_2 = p_3u_2 = 0,\\
&p_2u_1' = p_2'u_1 = (0, x(yx)^{k-1}),\\
&p_2u_1 = p_2'u_1' = (0, y(xy)^{k-1}),\\
&p_3u_1 = ((xy)^k, 0),\ p_3u_1' = (0, (xy)^k),\ p_1u_2 = (x(yx)^2, 0)
\end{aligned}$$

в $HH^1(A)$ (смотри замечание 4.2). Для $a \in \mathrm{HH}^1(A)$ имеем

$$\Delta(a)(1 \otimes 1) = \Delta(a \circ \Psi_1)\Phi_0(1 \otimes 1) = \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \{1\}} \big\langle a\big(\mathsf{C}(b)\big),\ 1\big\rangle\, b^*.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned}&\big\langle a\big(\mathsf{C}(b)\big),\ 1\big\rangle\\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } a = p_3u_1 \text{ и } b = x, \text{ или } a = p_3u_1' \text{ и } b = y,\\ & \text{или } a \in \{p_2u_1, p_2'u_1'\} \text{ и } b \in \{xy, yx\},\\ k-1, & \text{если } a = u_2 \text{ и } b \in \{(xy)^{k-1}, (yx)^{k-1}\},\\ k-2, & \text{если } a = p_1u_2 \text{ и } b \in \{(xy)^{k-2}, (yx)^{k-2}\},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}\end{aligned}$$

Применяя эти формулы, получаем утверждение леммы. □

Лемма 4.4.

$$\Delta(ab) = 0$$

при $a \in \{v_1, v_2, v_2'\}, b \in \{1, p_1, p_2, p_2', p_3\}$,

$$\Delta(u_1u_2) = \Delta(u_1'u_2) = \Delta(u_1u_1') = 0.$$

Доказательство. Для $a \in \mathrm{HH}^2(A)$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta(a)(1 \otimes x \otimes 1) &= \Delta(a \circ \Psi_2)\Phi_1(1 \otimes x \otimes 1)\\ &= \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \{1\}} \langle (a \circ \Psi_2)(b \otimes x + x \otimes b),\ 1\rangle\, b^*,\\ \Delta(a)(1 \otimes y \otimes 1) &= \Delta(a \circ \Psi_2)\Phi_1(1 \otimes y \otimes 1)\\ &= \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \{1\}} \langle (a \circ \Psi_2)(b \otimes y + y \otimes b),\ 1\rangle\, b^*.\end{aligned}$$

Прямыми вычислениями получаем

$$\Psi_2(b\otimes x+x\otimes b)=t_1(b\otimes x\otimes 1+x\mathsf{C}(b))$$
$$=\begin{cases}0, & \text{если } b=x \\ & \text{или } b=y(xy)^j, \\ 1\otimes r_x\otimes y(xy)^{i-1}+(yx)^{k-1}\otimes r_y\otimes (xy)^{i-1} & \\ \quad +\delta_{i,1}y(xy)^{k-2}\otimes r_x\otimes (yx)^{k-1}, & \text{если } b=(xy)^i, \\ y(xy)^{i-1}\otimes r_x\otimes 1+\delta_{i,1}(xy)^{k-1}\otimes r_x\otimes y(xy)^{k-2} & \\ \quad +(yx)^{i-1}\otimes r_y\otimes (xy)^{k-1}, & \text{если } b=(yx)^i, \\ (xy)^i\otimes r_x\otimes 1+x(yx)^{i-1}\otimes r_y\otimes (xy)^{k-1} & \\ \quad +1\otimes r_x\otimes (yx)^i+(yx)^{k-1}\otimes r_y\otimes x(yx)^{i-1}, & \text{если } b=x(yx)^i, \\ 1\otimes r_y\otimes y+y\otimes r_y\otimes 1, & \text{если } b=y(xy)^{k-1}, \\ x\otimes r_x\otimes x+y(xy)^{k-1}\otimes r_x, & \text{если } b=(xy)^k; \end{cases}$$

$$\Psi_2(b\otimes y+y\otimes b)=t_1(b\otimes y\otimes 1+y\mathsf{C}(b))$$
$$=\begin{cases}0, & \text{если } b=x(yx)^j \\ & \text{или } b=y, \\ (xy)^{i-1}\otimes r_x\otimes (yx)^{k-1}+x(yx)^{i-1}\otimes r_y\otimes 1 & \\ \quad +\delta_{i,1}(yx)^{k-1}\otimes r_y\otimes x(yx)^{k-2}, & \text{если } b=(xy)^i, \\ 1\otimes r_y\otimes x(yx)^{i-1}+(xy)^{k-1}\otimes r_x\otimes 1 & \\ \quad +x(yx)^{k-2}\otimes r_y\otimes (xy)^{k-1}, & \text{если } b=(yx)^i, \\ 1\otimes r_y\otimes y+y\otimes r_y\otimes 1, & \text{если } b=x(yx)^{k-1}, \\ y(xy)^{i-1}\otimes r_x\otimes (yx)^{k-1}+(yx)^i\otimes r_y\otimes 1 & \\ \quad +1\otimes r_y\otimes (xy)^i\quad +(xy)^{k-1}\otimes r_x\otimes y(xy)^{i-1}, & \text{если } b=y(xy)^i, \\ 1\otimes r_y\otimes x(yx)^{k-1}+y\otimes r_y\otimes y, & \text{если } b=(xy)^k; \end{cases}$$

где $1\leqslant j\leqslant k-2$, $1\leqslant i\leqslant k-1$.

Аналогично доказательству леммы 4.3, теперь утверждение леммы 4.4 легко следует из замечания 4.2 и приведенных выше формул. $\square$

Лемма 4.5.

$$\Delta(u_1v_1)=\Delta(u_1'v_2')=(u_1')^2,\ \Delta(u_1'v_1)=\Delta(u_1v_2)=u_1^2,$$
$$\Delta(u_1'v_2)=\Delta(u_1v_2')=(k-2)p_1^{k-2}v_1,\ \Delta(w)=v_1,\ \Delta(p_1w)=0.$$

Доказательство. Для $a \in \mathrm{HH}^3(A)$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\Delta(a)(1 \otimes r_x \otimes 1) = \Delta(a \circ \Psi_3)\Phi_2(1 \otimes r_x \otimes 1)\\
&= \sum_{b \in \mathcal{B}\setminus\{1\}} \Big\langle (a \circ \Psi_3)(b \otimes x \otimes x + x \otimes b \otimes x + x \otimes x \otimes b),\ 1 \Big\rangle b^*\\
&+ \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{b \in \mathcal{B}\setminus\{1\}} \Big\langle (a \circ \Psi_3)(b \otimes (yx)^i y \otimes x + x \otimes b \otimes (yx)^i y\\
&\qquad\qquad + (yx)^i y \otimes x \otimes b),\ 1 \Big\rangle b^* y (xy)^{k-2-i}\\
&+ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{b \in \mathcal{B}\setminus\{1\}} \Big\langle (a \circ \Psi_3)(b \otimes (yx)^i \otimes y + y \otimes b \otimes (yx)^i\\
&\qquad\qquad + (yx)^i \otimes y \otimes b),\ 1 \Big\rangle b^* (xy)^{k-1-i},\\
&\Delta(a)(1 \otimes r_y \otimes 1) = \Delta(a \circ \Psi_3)\Phi_2(1 \otimes r_y \otimes 1)\\
&= \sum_{b \in \mathcal{B}\setminus\{1\}} \Big\langle (a \circ \Psi_3)(b \otimes y \otimes y + y \otimes b \otimes y + y \otimes y \otimes b),\ 1 \Big\rangle b^*\\
&+ \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{b \in \mathcal{B}\setminus\{1\}} \Big\langle (a \circ \Psi_3)(b \otimes (xy)^i x \otimes y + y \otimes b \otimes (xy)^i x\\
&\qquad\qquad + (xy)^i x \otimes y \otimes b), 1 \Big\rangle b^* x (yx)^{k-2-i}\\
&+ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{b \in \mathcal{B}\setminus\{1\}} \Big\langle (a \circ \Psi_3)(b \otimes (xy)^i \otimes x + x \otimes b \otimes (xy)^i\\
&\qquad\qquad + (xy)^i \otimes x \otimes b),\ 1 \Big\rangle b^* (yx)^{k-1-i}.
\end{aligned}
$$

Прямыми вычислениями (смотри также лемму 4.4) можно показать, что:

$$
\begin{aligned}
&\Psi_3(b \otimes x \otimes x + x \otimes b \otimes x + x \otimes x \otimes b)\\
&\qquad\qquad\qquad = t_2(b \otimes r_x \otimes 1 + x t_1(b \otimes x \otimes 1 + x\mathsf{C}(b)))
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases}
1 \otimes 1, & \text{если } b = x,\\
1 \otimes y(xy)^{i-1}, & \text{если } b = (xy)^i,\ 2 \leqslant i \leqslant k,\\
y \otimes 1, & \text{если } b = yx,\\
xy \otimes 1 + x \otimes y + 1 \otimes yx + (yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}, & \text{если } b = xyx,\\
\sum\limits_{l=1}^{i} (xy)^l \otimes (xy)^{i-l} & \text{если } b = x(yx)^i,\\
+ \sum\limits_{l=1}^{i} x(yx)^{l-1} \otimes y(xy)^{i-l} + 1 \otimes (yx)^i, & 2 \leqslant i \leqslant k-1,\\
1 \otimes x + x \otimes 1, & \text{если } b = y(xy)^{k-1},\\
0, & \text{иначе;}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Psi_3(b \otimes y(xy)^i \otimes x + x \otimes b \otimes (yx)^i y + (yx)^i y \otimes x \otimes b)\\
&\quad = t_2(xt_1(b\mathsf{C}((yx)^i y)) + (yx)^i y t_1(x\mathsf{C}(b)))
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases}
\sum\limits_{l=0}^{k-1} (xy)^l \otimes (xy)^{k-1-l} + \sum\limits_{l=1}^{k-1} y(xy)^{l-1} \otimes x(yx)^{k-1-l}, & \text{если } b = xy,\ i = 0,\\
(yx)^{k-1} \otimes (xy)^i, & \text{если } b = xy,\ i \geqslant 1,\\
\sum\limits_{l=0}^{k-1} (yx)^l \otimes y(xy)^{i+j-l-1} + \sum\limits_{l=0}^{k-1} y(xy)^l \otimes (xy)^{i+j-1-l} & \\
+x \otimes y(xy)^{i+j-k}, & \text{если } b = (yx)^j,\\
 & i+j \geqslant k,\\
0, & \text{иначе;}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Psi_3(b \otimes (yx)^i \otimes y + y \otimes b \otimes (yx)^i + (yx)^i \otimes y \otimes b)\\
&\quad = t_2(yt_1(b\mathsf{C}((yx)^i)) + (yx)^i t_1(y\mathsf{C}(b)))
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases}
1 \otimes x(yx)^{i-1}, & \text{если } b = y,\\
q_{ij} y \otimes x(yx)^{i+j-k} + \delta_{j,k-1}\Big(\sum\limits_{l=1}^{i} (yx)^l \otimes (yx)^{i-l} & \\
+ \sum\limits_{l=1}^{i} y(xy)^{l-1} \otimes x(yx)^{i-l}\Big), & b = x(yx)^j,\\
 & 1 \leqslant j \leqslant k-1,\\
\delta_{i,1}(xy)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1} + (xy)^{k-1}x \otimes x(yx)^{i-1}, & \text{если } b = (xy)^k,\\
(xy)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1} + (xy)^{k-1}x \otimes x, & \text{если } b = (yx)^j,\\
 & i+j = k+1,\\
(xy)^{k-1}x \otimes x(yx)^{i+j-k-1}, & \text{если } b = (yx)^j,\\
 & i+j \geqslant k+2,\\
0, & \text{иначе;}
\end{cases}
$$

$$\begin{aligned}&\Psi_3(b\otimes y\otimes y+y\otimes b\otimes y+y\otimes y\otimes b)\\&\quad=t_2(b\otimes r_y\otimes 1+yt_1(b\otimes y\otimes 1+y\mathsf{C}(b)))\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}x\otimes 1, & \text{если } b=xy,\\ \sum\limits_{l=1}^{j-1}(xy)^l\otimes x(yx)^{j-l-1}+\sum\limits_{l=1}^{j}x(yx)^{l-1}\otimes(yx)^{j-l}, & \text{если } b=(xy)^j,\\ & 2\leqslant j\leqslant k-1,\\ 1\otimes x(yx)^{j-1}, & \text{если } b=(yx)^j,\\ & 1\leqslant j\leqslant k-1,\\ yx\otimes 1+y\otimes x+(xy)^{k-1}\otimes(yx)^{k-1}+1\otimes xy, & \text{если } b=yxy,\\ \sum\limits_{l=1}^{j}(yx)^l\otimes(yx)^{j-l}+\sum\limits_{l=1}^{j}y(xy)^{l-1}\otimes x(yx)^{j-l}+1\otimes(xy)^j, & \text{если } b=y(xy)^j,\\ & 2\leqslant j\leqslant k-1,\\ \sum\limits_{l=1}^{k-1}(xy)^l\otimes x(yx)^{k-l-1}+\sum\limits_{l=1}^{k}x(yx)^{l-1}\otimes(yx)^{k-l}, & \text{если } b=(xy)^k,\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\Psi_3(b\otimes(xy)^ix\otimes y+y\otimes b\otimes(xy)^ix+(xy)^ix\otimes y\otimes b)\\&\quad=t_2(yt_1(b\mathsf{C}((xy)^ix))+(xy)^ixt_1(y\mathsf{C}(b)))\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}1\otimes x(yx)^i+\sum\limits_{l=1}^{i}(xy)^l\otimes x(yx)^{i-l-1} & \\ +\sum\limits_{l=1}^{i+1}x(yx)^{l-1}\otimes(yx)^{i+1-l}, & \text{если } b=x(yx)^{k-1},\\ y\otimes x(yx)^{i+j-k}+\delta_{j,k}(\sum\limits_{l=1}^{i}(xy)^l\otimes(xy)^{i-l+1} & \text{если } b=(xy)^j,\\ +\sum\limits_{l=1}^{i+1}x(yx)^{l-1}\otimes(yx)^{i+1-l}y), & 1\leqslant j\leqslant k,\\ & i+j\geqslant k,\\ \sum\limits_{l=0}^{k-1}(xy)^l\otimes(xy)^{k-l-1}+\sum\limits_{l=1}^{k-1}x(yx)^{l-1}\otimes y(xy)^{k-1-l}, & \text{если } b=yx,\ i=0,\\ (xy)^{k-1}\otimes(yx)^i, & \text{если } b=yx,\ i\geqslant 0,\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\Psi_3(b\otimes(xy)^i\otimes x+x\otimes b\otimes(xy)^i+(xy)^i\otimes x\otimes b)\\&\quad=t_2(xt_1(b\mathsf{C}((xy)^i)))+(xy)^it_1(x\mathsf{C}(b)))\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1 \otimes y(xy)^{i-1}, & \text{если } b = x, \\ x \otimes y(xy)^{i+j-k}, & \text{если } b = y(xy)^j, \\ & i+j \geqslant k, \\ & 1 \leqslant j \leqslant k-1, \\ 1 \otimes x + \sum\limits_{l=0}^{k-1} (yx)^l \otimes y(xy)^{k-l-1} + \sum\limits_{l=0}^{k-1} y(xy)^l \otimes (xy)^{k-1-l}, & \text{если } b = (xy)^j, \\ & i+j = k, \\ & 1 \leqslant j \leqslant k-1, \\ \sum\limits_{l=0}^{k-1} (yx)^l \otimes y(xy)^{i+j-l-1} + \sum\limits_{l=0}^{k-1} y(xy)^l \otimes (xy)^{i+j-1-l}, & \text{если } b = (xy)^j, \\ & i+j \geqslant k+1, \\ & 1 \leqslant j \leqslant k-1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

где $q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i+j \geqslant k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$ $\quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

По теореме 4.1 достаточно вычислить Δ на $u_1'v_2'$, u_1v_2 и $u_1'v_2$. По [5, лемма 4.1.2] и замечанию 4.2 имеем

$$u_1v_1 = u_1T^1(v_1) = (1, x(yx)^{k-2}) \begin{pmatrix} y \otimes 1 \\ 1 \otimes x \end{pmatrix} = y,$$

$$u_1v_2 = u_1T^1(v_2) = (1, x(yx)^{k-2}) \begin{pmatrix} x \otimes 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x,$$

$$u_1'v_2 = u_1'T^1(v_2) = (y(xy)^{k-2}, 1) \begin{pmatrix} x \otimes 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (xy)^{k-1}.$$

Аналогично,

$$u_1^2 = (1, 0), \ (u_1')^2 = (0, 1).$$

Из приведенных выше формул следует, что:

$$\Delta(u_1'v_2') = (0, 1) = (u_1')^2, \quad \Delta(u_1v_2) = (1, 0) = u_1^2,$$
$$\Delta(u_1'v_2) = ((k-2)y(xy)^{k-2}, (k-2)x(yx)^{k-2}) = (k-2)p_1^{k-2}v_1,$$
$$\Delta(w) = (y, x) = v_1, \quad \Delta(p_1w) = 0. \qquad \square$$

Лемма 4.6.

$$\Delta(az) = 0$$

при $a \in \{1, p_1, p_2, p_2', p_3\}$.

Доказательство. Обозначим через Z произвольный элемент из $HH^4(R_k)$. По формуле Трэдлера для BV-дифференциала имеем

$$
\begin{aligned}
&\Delta(Z)(1\otimes 1)=\Delta(Z\circ\Psi_4)\Phi_3(1\otimes 1)\\
&=\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}}\langle (Z\circ\Psi_4)(x\otimes x\otimes x\otimes b\\
&\qquad +x\otimes x\otimes b\otimes x+x\otimes b\otimes x\otimes x+b\otimes x\otimes x\otimes x),1\rangle b^*\\
&+\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}}\langle (Z\circ\Psi_4)(x\otimes (yx)^i y\otimes x\otimes b+(yx)^i y\otimes x\otimes b\otimes x\\
&\quad +x\otimes b\otimes x\otimes (yx)^i y+b\otimes x\otimes (yx)^i y\otimes x,1\rangle b^* y(xy)^{k-2-i}\\
&+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}}\langle (Z\circ\Psi_4)(x\otimes (yx)^i\otimes y\otimes b\\
&+(yx)^i\otimes y\otimes b\otimes x+y\otimes b\otimes x\otimes (yx)^i+b\otimes x\otimes (yx)^i\otimes y,1\rangle b^*(xy)^{k-1-i}\\
&+\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}}\langle (Z\circ\Psi_4)(y\otimes y\otimes y\otimes b\\
&\qquad +y\otimes y\otimes b\otimes y+y\otimes b\otimes y\otimes y+b\otimes y\otimes y\otimes y),1\rangle\\
&+\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}}\langle (Z\circ\Psi_4)(y\otimes x(yx)^i\otimes y\otimes b+x(yx)^i\otimes y\otimes b\otimes y\\
&\qquad +y\otimes b\otimes y\otimes x(yx)^i+b\otimes y\otimes x(yx)^i\otimes y,1\rangle b^*(xy)^{k-2-i}x\\
&+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}}\langle (Z\circ\Psi_4)(y\otimes (xy)^i\otimes x\otimes b\\
&\quad +(xy)^i\otimes x\otimes b\otimes y+x\otimes b\otimes y\otimes (xy)^i+b\otimes y\otimes (xy)^i\otimes x,1\rangle b^*(yx)^{k-1-i}.
\end{aligned}
$$

Прямые вычисления показывают, что $\Psi_4(a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4)=1$ лишь при $a_1\otimes \alpha_2\otimes \alpha_3\otimes \alpha_4$, равном одному из следующих элементов:

$$
\begin{gathered}
x\otimes x\otimes (xy)^k\otimes x,\ (xy)^k\otimes x\otimes x\otimes x,\ x\otimes (xy)^k\otimes x\otimes x,\\
y\otimes y\otimes y\otimes (xy)^k,\ y\otimes y\otimes (xy)^k\otimes y,\ y\otimes (xy)^k\otimes y\otimes y,
\end{gathered}
$$

на остальных слагаемых оно равно 0. Отсюда легко следует утверждение леммы. □

Если нам известны значения $\Delta(a)$ и $\Delta(b)$, то достаточно вычислить $[a,b]$, чтобы найти $\Delta(ab)$. Если a и b заданы коциклами $f: P_n\to A$ и

$g : P_m \to A$, то скобку $[a, b]$ можно вычислить по формуле:

$$[a, b] = [f \circ \Psi_n, g \circ \Psi_m] \circ \Phi_{n+m-1}.$$

Лемма 4.7.

$$\Delta(u_1 z) = \Delta(u_1' z) = 0, \quad \Delta(u_2 z) = (k-1)(p_1 + p_1^{k-1})z.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $[u_1, z] = [u_1', z] = 0$, $[u_2, z] = (k-1)p_1^{k-1}z$. Введем общее обозначение для образующей первой степени u. Имеем

$$[u, z](1 \otimes 1) = \big((u \circ \Psi_1) \circ (z \circ \Psi_4)\big)\Phi_4(1 \otimes 1) + \big((z \circ \Psi_4) \circ (u \circ \Psi_1)\big)\Phi_4(1 \otimes 1).$$

Покажем, что $\Psi_4\Phi_4 = \mathrm{Id}$. Прямыми вычислениями доказывается, что $\Psi_3\Phi_3 = \mathrm{Id}$ (смотри доказательство леммы 4.6). Тогда

$$(\Psi_4\Phi_4)(1 \otimes 1) = \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \{1\}} t_3(b\Psi_3\Phi_3(1 \otimes 1))b^* = \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \{1\}} t_3(b \otimes 1)b^* = 1 \otimes 1.$$

Если $|u| = 1$, имеем

$$\big((a \circ \Psi_1) \circ (z \circ \Psi_4)\big)\Phi_4(1 \otimes 1) = (a \circ \Psi_1)\big(z(\Psi_4\Phi_4)(1 \otimes 1)\big) = (a \circ \Psi_1)(1) = 0.$$

Остается доказать, что

$$\big((z \circ \Psi_4) \circ (u \circ \Psi_1)\big)\Phi_4(1 \otimes 1) = 0$$

для $u \in \{u_1, u_1', u_2\}$.

В доказательстве понадобятся значения $u_1 \circ \Psi_1$, $u_1' \circ \Psi_1$ и $u_2 \circ \Psi_1$ на элементах базиса $\mathcal{B}$. Прямыми вычислениями доказывается, что

$$(u_1 \circ \Psi_1)(b) = \begin{cases} 1, & \text{если } b = x, \\ (xy)^j + (yx)^j, & \text{если } b = x(yx)^j,\ 1 \leqslant j \leqslant k-1, \\ x(yx)^{k-2}, & \text{если } b = y, \\ x(yx)^{k-1}, & \text{если } b = yxy, \\ 0, & \text{если } b = y(xy)^j,\ 2 \leqslant j \leqslant k-1, \\ y(xy)^{j-1}, & \text{если } b = (xy)^j,\ 1 \leqslant j \leqslant k, \\ y(xy)^{j-1}, & \text{если } b = (yx)^j,\ 1 \leqslant j \leqslant k-1; \end{cases}$$

$$(u_1'\circ\Psi_1)(b)=\begin{cases}y(xy)^{k-2}, & \text{если } b=x,\\ y(xy)^{k-1}, & \text{если } b=xyx,\\ 0, & \text{если } b=x(yx)^j,\ 2\leqslant j\leqslant k-1,\\ 1, & \text{если } b=y,\\ (xy)^j+(yx)^j, & \text{если } b=y(xy)^j,\ 1\leqslant j\leqslant k-1,\\ x(yx)^{j-1}, & \text{если } b=(xy)^j,\ 1\leqslant j\leqslant k,\\ x(yx)^{j-1} & \text{если } b=(yx)^j,\ 1\leqslant j\leqslant k-1;\end{cases}$$

$$(u_2\circ\Psi_1)(b)=\begin{cases}(j+1)x(yx)^{j+1}, & \text{если } b=x(yx)^j,\ 0\leqslant j\leqslant k-1,\\ jy(xy)^{j+1}, & \text{если } b=y(xy)^j,\ 0\leqslant j\leqslant k-1,\\ j(xy)^{j+1}, & \text{если } b=(xy)^j,\ 1\leqslant j\leqslant k,\\ j(yx)^{j+1}, & \text{если } b=(yx)^j, 1\leqslant j\leqslant k-1.\end{cases}$$

Обозначим $1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes 1$ слагаемые $\Phi_4(1\otimes 1)$, тогда $u\Psi_1(1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes 1)=ut_3(bt_2(a_1t_1(a_2\mathsf{C}(a_3))))$.

Также обозначим $F^u=(z\circ\Psi_4)\circ(u\circ\Psi_1)$ и $F_i^u=(z\circ\Psi_4)\circ_i(u\circ\Psi_1)$.

1) Сразу заметим, что F_1^u, и F_2^u нужно вычислить лишь на двух слагаемых $1\otimes x\otimes x\otimes x\otimes 1$ и $1\otimes y\otimes y\otimes y\otimes 1$ из определения $\Phi_4(1\otimes 1)$, поскольку на всех остальных слагаемых эти композиционные произведения равны нулю, ввиду того, что для всех таких слагаемых $a_2a_3\in\mathcal{B}$, поэтому имеем $t_1(a_2\mathsf{C}(a_3))=0$. В оставшихся случаях:

$F_1^u(1\otimes y\otimes y\otimes y\otimes 1)=zt_3(u\Psi_1(b)t_2(yt_1(y\otimes y)))=0$,
так как $t_2(yt_1(y\otimes y))=t_2(yr_y)=0$;

$F_1^u(1\otimes x\otimes x\otimes x\otimes 1)=zt_3(u\Psi_1(b)t_2(xt_1(x\otimes x)))$

$$=zt_3(u\Psi_1(b)\otimes 1)=\begin{cases}k-1, \text{ если } u=u_2 \text{ и } b\in\{(xy)^{k-1},(yx)^{k-1}\},\\ 0, \text{ иначе;}\end{cases}$$

$$F_2^u(1\otimes x\otimes x\otimes x\otimes 1)=\begin{cases}zt_3(bt_2(1\otimes r_x))=0, \text{ если } u=u_1,\\ zt_3(bt_2(y(xy)^{k-2}\otimes r_x))=0, \text{ если } u=u_1',\\ zt_3(bt_2(xyx\otimes r_x))=\begin{cases}1, & \text{если } u=u_2 \\ & \text{и } b=(xy)^{k-1},\\ y, & \text{если } u=u_2\\ & \text{и } b=y(xy)^{k-1},\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}\end{cases}$$

$F_2^u(1\otimes y\otimes y\otimes y\otimes 1)=0$, поскольку

$$t_2(u\Psi_1(y)r_y)) = \begin{cases} t_2(x(yx)^{k-1}\otimes r_y) = 0, & \text{если } u = u_1, \\ t_2(1\otimes r_y) = 0, & \text{если } u = u_1', \\ t_2(0\otimes r_y) = 0, & \text{если } u = u_2. \end{cases}$$

2) Теперь обратимся к

$$F_3^u(1\otimes b\otimes a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes 1) = zt_3(bt_2(a_1t_1(u\Psi_1(a_2)\mathsf{C}(a_3)))).$$

Рассмотрим несколько случаев, каждый из которых в свою очередь, распадется на три, — когда $u = u_1$, $u = u_1'$ и $u = u_2$.

2.1) Пусть $a_1\otimes a_3 = x\otimes x$, тогда либо $a_2 = x$ и

$$F_3^u(1\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x\otimes 1)$$
$$= \begin{cases} zt_3(bt_2(xt_1(1\otimes x))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1(y(xy)^{k-2}\otimes x))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1(xyx\otimes x))) = \begin{cases} (yx)^{k-l-1}, & \text{если } b = (yx)^{k-l}, \\ x(yx)^{k-1-l}, & \text{если } b = x(yx)^{k-l}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \end{cases}$$

$1\leqslant l\leqslant k-1$,
либо $a_2 = (yx)^j y$, $0\leqslant j\leqslant k-2$ и

$$F_3^u(1\otimes b\otimes x\otimes y(xy)^j\otimes x\otimes 1)$$
$$= \begin{cases} zt_3(bt_2(xt_1(0\otimes x))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1(((xy)^j+(yx)^j)\otimes x))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1(jy(xy)^{j+1}\otimes x))) = \begin{cases} k-2, & \text{если } b = y(xy)^{k-1}, \\ & j = k-2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \end{cases}$$

$1\leqslant j\leqslant k-2$ и

$$F_3^u(1\otimes b\otimes x\otimes y\otimes x\otimes 1)$$
$$= \begin{cases} zt_3(bt_2(xt_1(x(yx)^{k-2}\otimes x))) = \begin{cases} (xy)^{k-1}, & \text{если } b = yx,\ k = 3, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ zt_3(bt_2(xt_1(1\otimes x))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1(0\otimes x))) = 0, \end{cases}$$

при $j = 0$.

2.2) Пусть $a_1 \otimes a_3 = x \otimes y$, тогда

$$F_3^u(1 \otimes b \otimes x \otimes (yx)^j \otimes y \otimes 1) = \begin{cases} zt_3(bt_2(xt_1(y(xy)^{j-1} \otimes y))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1((xy)^{j-1}x \otimes x))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1(j(yx)^{j+1} \otimes x))) = 0, \end{cases}$$

$1 \leqslant j \leqslant k-1$.

2.3) Пусть $a_1 \otimes a_3 = y \otimes y$, тогда либо $a_2 = y$ и

$$F_3^u(1 \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y \otimes 1) = \begin{cases} zt_3(bt_2(yt_1(x(yx)^{k-2} \otimes y))) = 0, \\ zt_3(bt_2(yt_1(1 \otimes y))) = 0, \\ zt_3(bt_2(yt_1(0 \otimes y))) = 0, \end{cases}$$

либо $a_2 = (xy)^j x$, $0 \leqslant j \leqslant k-2$ и

$$F_3^u(1 \otimes b \otimes y \otimes x(yx)^j \otimes y \otimes 1) = \begin{cases} zt_3(bt_2(yt_1(((xy)^j + (yx)^j) \otimes y))) = 0, \\ zt_3(bt_2(yt_1(0 \otimes y))) = 0, \\ zt_3(bt_2(yt_1((j+1)x(yx)^{j+1} \otimes y))) = 0, \end{cases}$$

$2 \leqslant j \leqslant k-2$,

$$F_3^u(1 \otimes b \otimes y \otimes xyx \otimes y \otimes 1) = \begin{cases} zt_3(bt_2(yt_1((xy + yx) \otimes y))) = 0, \\ zt_3(bt_2(yt_1(y(xy)^{k-1} \otimes y))) = 0, \\ zt_3(bt_2(yt_1(0 \otimes y))) = 0, \end{cases}$$

и

$$F_3^u(1 \otimes b \otimes y \otimes x \otimes y \otimes 1)$$
$$= \begin{cases} zt_3(bt_2(yt_1(1 \otimes y))) = 0, \\ zt_3(bt_2(yt_1(y(xy)^{k-2} \otimes y))) = \begin{cases} (yx)^{k-1}, \text{ если } b = xy,\ k = 3, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases} \\ zt_3(bt_2(yt_1(xyx \otimes y))) = 0. \end{cases}$$

2.4) Пусть $a_1 \otimes a_3 = y \otimes x$, тогда

$$F_3^u(1 \otimes b \otimes y \otimes (xy)^j \otimes x \otimes 1)$$
$$= \begin{cases} zt_3(bt_2(xt_1(y(xy)^{j-1} \otimes y))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1((xy)^{j-1}x \otimes x))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1(j(xy)^{j+1} \otimes x))) = \begin{cases} (k-1)x, \text{ если } b = x(yx)^{k-1}, \\ \qquad\qquad j = k-1, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases} \end{cases}$$

$1 \leqslant j \leqslant k-1$.

3) Наконец, рассмотрим

$$F_4^u(1 \otimes b \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes 1) = zt_3(bt_2(a_1t_1(a_2\mathsf{C}(u\Psi_1(a_3))))).$$

Как и в пункте 2), разберем различные случаи.

3.1)

$$F_4^u(1 \otimes b \otimes x \otimes x \otimes u\Psi_1(x) \otimes 1)$$
$$= \begin{cases} zt_3(bt_2(xt_1(x\mathsf{C}(1)))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1(x\mathsf{C}(y(xy)^{k-2})))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1(x\mathsf{C}(xyx)))) = \begin{cases} 1, \text{ если } b = (yx)^{k-1}, \\ 0, \text{ иначе}; \end{cases} \end{cases}$$

3.2)

$$F_4^u(1 \otimes b \otimes x \otimes (yx)^j y \otimes u\Psi_1(x) \otimes 1)$$
$$= \begin{cases} zt_3(bt_2(xt_1((yx)^j y\mathsf{C}(1)))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1((yx)^j y\mathsf{C}(y(xy)^{k-2})))) = 0, \\ zt_3(bt_2(xt_1((yx)^j y\mathsf{C}(xyx)))) = \begin{cases} 1, \text{ если } b = y(xy)^{k-1}, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases} \end{cases}$$

$0 \leqslant j \leqslant k-2$,

3.3)

$$F_4^u(1\otimes b\otimes x\otimes (yx)^j\otimes u\Psi_1(y)\otimes 1) = \begin{cases} zt_3(bt_2(xt_1((yx)^j\mathsf{C}(x(yx)^{k-2})))) = 0,\\ zt_3(bt_2(xt_1((yx)^j\mathsf{C}(1)))) = 0,\\ zt_3(bt_2(xt_1((yx)^j\mathsf{C}(0)))) = 0,\end{cases}$$

$1\leqslant j\leqslant k-1$,
3.4)

$$F_4^u(1\otimes b\otimes y\otimes y\otimes u\Psi_1(y)\otimes 1) = \begin{cases} zt_3(bt_2(yt_1(y\mathsf{C}(x(yx)^{k-2})))) = 0,\\ zt_3(bt_2(yt_1(y\mathsf{C}(1)))) = 0,\\ zt_3(bt_2(yt_1(y\mathsf{C}(0)))) = 0,\end{cases}$$

3.5)

$$F_4^u(1\otimes b\otimes y\otimes (xy)^jx\otimes u\Psi_1(y)\otimes 1) = \begin{cases} zt_3(bt_2(yt_1((xy)^jx\mathsf{C}(x(yx)^{k-2})))) = 0,\\ zt_3(bt_2(yt_1((xy)^jx\mathsf{C}(1)))) = 0,\\ zt_3(bt_2(yt_1((xy)^jx\mathsf{C}(0)))) = 0,\end{cases}$$

$0\leqslant j\leqslant k-2$,
3.6)

$$F_4^u(1\otimes b\otimes y\otimes (xy)^j\otimes u\Psi_1(x)\otimes 1) = \begin{cases} zt_3(bt_2(yt_1((xy)^jx\mathsf{C}(1)))) = 0,\\ zt_3(bt_2(yt_1((xy)^jx\mathsf{C}(y(xy)^{k-2})))) = 0,\\ zt_3(bt_2(yt_1((xy)^jx\mathsf{C}(xyx)))) = \begin{cases} x, \text{ если } b = x(yx)^{k-1},\\ \qquad\qquad j=k-1,\\ 0, \text{ иначе},\end{cases}\end{cases}$$

$1\leqslant j\leqslant k-1$.

Докажем теперь утверждение леммы. По определению

$$\begin{aligned}
&F^u\Phi_4(1\otimes 1)\\
&= F^u\Bigg(\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} 1\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x\otimes b^*\\
&+\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} 1\otimes b\otimes x\otimes (yx)^i y\otimes x\otimes y(xy)^{k-2-i}b^*\\
&+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} 1\otimes b\otimes x\otimes (yx)^i\otimes y\otimes (xy)^{k-1-i}b^*\\
&+\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} 1\otimes b\otimes y\otimes y\otimes y\otimes b^*\\
&+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} 1\otimes b\otimes y\otimes (xy)^i\otimes x\otimes (yx)^{k-1-i}b^*\\
&+\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} 1\otimes b\otimes y\otimes (xy)^i x\otimes y\otimes x(yx)^{k-2-i}b^*\Bigg).
\end{aligned}$$

Из приведенных выше формул следует, что

$$F^{u_1}\Phi_4(1\otimes 1)=\delta_{k,3}(xy)^{k-1}(yx)^*=\delta_{k,3}(xy)^{k-1}(yx)^{k-1}=0,$$

$$F^{u_1'}\Phi_4(1\otimes 1)=\delta_{k,3}(yx)^{k-1}(xy)^*=\delta_{k,3}(yx)^{k-1}(xy)^{k-1}=0,$$

$$\begin{aligned}
&F^{u_2}\Phi_4(1\otimes 1)=(k-1)((xy)^{k-1}+(yx)^{k-1})^*+1((xy)^{k-1})^*+y(y(xy)^{k-1})^*\\
&+\sum_{l=1}^{k-1}(yx)^{k-1-l}((yx)^{k-l})^*+\sum_{l=1}^{k-1}x(yx)^{k-1-l}(x(yx)^{k-l})^*+(k-2)y(y(xy)^{k-1})^*\\
&+(k-1)x(x(yx)^{k-1})^*+1((yx)^{k-1})^*+1y(y(xy)^{k-1})^*+x(x(yx)^{k-1})^*\\
&=(k-1)(xy+yx)+xy+yx+(k-1)(yx)^{k-1}+(k-1)(xy)^{k-1}\\
&+(k-2)yx+(k-1)xy+yx+yx+xy=(k-1)p_1^{k-1}z.
\end{aligned}$$

$\square$

Лемма 4.8.
$$\Delta(v_1 z) = \Delta(v_2 z) = \Delta(v_2' z) = 0.$$

Доказательство. Введем общее обозначение для образующей второй степени v. Тогда $\Delta(vz) = \Delta(v)z + v\Delta(z) + [v, z] = [v, z]$ по лемме 4.4, и для вычисления BV-дифференциала достаточно вычислить скобку Герстенхабера

$$[v, z](1\otimes a\otimes 1) = \big((v\circ\Psi_2)\circ(z\circ\Psi_4)\big)\Phi_5(1\otimes a\otimes 1) + \big((z\circ\Psi_4)\circ(v\circ\Psi_2)\big)\Phi_5(1\otimes a\otimes 1)$$

для $a \in \{x, y\}$.

Проведем вычисление в несколько шагов.

Прежде всего отметим, что все композиционные произведения $v \circ \Psi_2$ и $z \circ \Psi_4$ обращаются в ноль на всех слагаемых второй, третьей, четвертой и пятой сумм из определения $\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1)$, ввиду того, что для всех этих слагаемых выполнено $cf, f\tilde{c} \in \mathcal{B}$, а значит $t_1(f \otimes \tilde{c}) = t_1(c\mathsf{C}(f)) = 0$, так как $t_1(ab) = 0$ для любых a, b таких, что $ab \in \mathcal{B}$. Таким образом, достаточно проводить все вычисления только на слагаемых вида $a \otimes b \otimes x \otimes x \otimes x$, $a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y$.

1) Покажем, что $\big((v \circ \Psi_2) \circ (z \circ \Psi_4)\big)\Phi_5(1 \otimes a \otimes 1) = 0$.

1.1) Для $a \otimes b \otimes x \otimes x \otimes x$ имеем

$$z(t_3(at_2(bt_1(x \otimes x)))) = zt_3(at_2(b \otimes r_x \otimes 1)) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = x, b = (xy)^k, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$z(t_3(bt_2(xt_1(x \otimes x)))) = z(t_3(b \otimes 1)) = \begin{cases} 1, & \text{если } b = (xy)^k, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

но $\Psi_2(1 \otimes x) = \Psi_2(a \otimes 1) = 0$.

1.2) Рассмотрим $a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y$, тогда $z(t_3(at_2(bt_1(y \otimes y)))) = zt_3(at_2(b \otimes r_y \otimes 1)) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = y, b = (xy)^k, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$ но $\Psi_2(a \otimes 1) = 0$.

Далее заметим, что $t_2(yt_1(y \otimes y)) = t_2(yr_y) = 0$ и, значит, второе слагаемое в этом случае тоже обращается в 0.

2) Покажем теперь, что $(z\Psi_4) \circ_3 (v\Psi_2) + (z\Psi_4) \circ_4 (v\Psi_2) = 0$.

Для элемента вида $a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y$ равенство следует из того, что $\Big((z\Psi_4) \circ_3 (v\Psi_2) + (z\Psi_4) \circ_4 (v\Psi_2)\Big)(a \otimes b \otimes y \otimes y \otimes y) = z(t_3(at_2(bt_1(y \otimes v\Psi(y \otimes y) + v\Psi(y \otimes y) \otimes y))))$, $\Psi_2(y \otimes y) = r_y$ и

$$t_1(y\otimes v(r_y)+v(r_y)\otimes y)=\begin{cases} t_1(y\otimes x+x\otimes y)=0, \text{ если } v=v_1,\\ 0, \text{ если } v=v_2,\\ t_1(y\otimes y+y\otimes y)=0, \text{ если } v=v_2'.\end{cases}$$

Случай $a\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x$ также сводится к совершенно аналогичному равенству $t_1(x\otimes v(r_x)+v(r_x)\otimes x)=0$.

3) Вычислим теперь $(z\Psi_4)\circ_1(v\Psi_2)$.

$\Big((z\Psi_4)\circ_1(v\Psi_2)\Big)(a\otimes b\otimes y\otimes y\otimes y)=zt_3(v\Psi_2(a\otimes b)t_2(yt_1(y\otimes y)))=0$,

$\Big((z\Psi_4)\circ_1(v\Psi_2)\Big)(a\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x)=zt_3(v\Psi_2(a\otimes b)t_2(xt_1(x\otimes x)))=$ $zt_3(v(t_1(a\mathsf{C}(b))\otimes 1)$.

3.1) Пусть $a=x$, тогда

$$zt_3(v(t_1(x\mathsf{C}(b))\otimes 1)=\begin{cases} zt_3(v(t_1(y\mathsf{C}((xy)^i)))), 1\leqslant i\leqslant k-1,\\ zt_3(v(t_1(y\mathsf{C}(x(yx)^i)))), 0\leqslant i\leqslant k-1,\\ 0, \text{ иначе},\end{cases}$$

$$=\begin{cases} zt_3(v(t_1(x\otimes x\otimes y(xy)^{i-1}+x^2\otimes y\otimes (xy)^{i-1}))),\\ zt_3(v(t_1(x\otimes x\otimes (yx)^i+x^2\otimes y\otimes x(yx)^{i-1}))),\end{cases}$$

$$=\begin{cases} zt_3(v(r_xy(xy)^{i-1}+y(xy)^{k-2}(xr_y+r_x(yx)^{k-1})(xy)^{i-1}))\\ \qquad =\begin{cases} zt_3(y^2(xy)^{i-1})=0, v=v_1,\\ zt_3((xy)^i), v=v_2,\\ zt_3(y(xy)^{k-1})=0, v=v_2',\end{cases}\\ zt_3(v(r_x(yx)^i+(yx)^{k-1}r_yx(yx)^{i-1}))\\ \qquad =\begin{cases} zt_3(y(yx)^i)=0, v=v_1,\\ zt_3(x(yx)^i)=0, v=v_2,\\ zt_3(y(xy)^{k-1}+(yx)^{k+i-1}), \ v=v_2'.\end{cases}\end{cases}$$

Легко видеть, что

$$zt_3((xy)^i)=\begin{cases} 1, \text{ если } i=k,\\ 0, \text{ иначе},\end{cases}$$

$$zt_3(y(xy)^{k-1}+(yx)^{k+i-1})=\begin{cases} 1, \text{ если } i=1,\\ 0, \text{ иначе}.\end{cases}$$

Таким образом, $(z\Psi_4)\circ_1(v_2\Psi_2)=1$ на элементе $x\otimes(xy)^k\otimes x\otimes x\otimes x$, $(z\Psi_4)\circ_1(v_2'\Psi_2)=1$ на элементе $x\otimes xyx\otimes x\otimes x\otimes x$. Во всех остальных рассмотренных случаях $(z\Psi_4)\circ_1(v\Psi_2)=0$. Здесь и далее мы для экономии места пишем $zt(a)$ вместо $zt(a\otimes 1)$.

3.2) Пусть $a=y$, тогда

$$zt_3(v(t_1(y\mathsf{C}(b)))\otimes 1)=\begin{cases} zt_3(v(t_1(y\mathsf{C}((yx)^i)))), 1\leqslant i\leqslant k-1,\\ zt_3(v(t_1(y\mathsf{C}(y(xy)^i)))), 0\leqslant i\leqslant k-1,\\ zt_3(v(t_1(y\mathsf{C}(x(yx)^{k-1})))),\\ zt_3(v(t_1(y\mathsf{C}((xy)^k)))), 0\leqslant i\leqslant k-1,\\ 0,\ \text{иначе},\end{cases}$$

$$=\begin{cases} zt_3(v(t_1(y\otimes y\otimes x(yx)^{i-1}+y^2\otimes x\otimes(yx)^{i-1}))),\\ zt_3(v(t_1(y\otimes y\otimes(xy)^i+y^2\otimes x\otimes y(xy)^{i-1}))),\\ zt_3(v(t_1(y(xy)^{k-1}\otimes x\otimes 1))),\\ zt_3(v(t_1(y(xy)^{k-1}\otimes x\otimes y+(yx)^k\otimes y\otimes 1))),\end{cases}$$

$$=\begin{cases} zt_3(v(r_yx(yx)^{i-1}+x(yx)^{k-2}(yr_x+r_y(xy)^{k-1})(yx)^{i-1}))\\ \qquad=\begin{cases} zt_3(x^2(xy)^i)=0,\\ zt_3(x(yx)^{k-1})=0,\\ zt_3((yx)^i)=0,\end{cases}\\ zt_3(v(r_y(xy)^i+x(yx)^{k-2}(yr_x+r_y(xy)^{k-1})(yx)^{i-1})))\\ \qquad=\begin{cases} zt_3(x(xy)^i)=0,\\ zt_3(x(yx)^{k-1}+(xy)^{k-1}r_xy(xy)^{i-1})=\begin{cases}1,\ \text{если } i=1,\\ 0,\ \text{иначе},\end{cases}\\ zt_3(y(xy)^i)=0,\end{cases}\\ zt_3(v(r_yy+yr_y))=0,\ v=v_1,v_2,v_2',\\ zt_3(v(r_yy^2+yr_yy+(xy)^{k-1}(xr_y+r_x(yx)^{k-1})))\\ \qquad=\begin{cases} zt_3(yxy)=0,\\ 0,\\ zt_3((xy)^k)=1.\end{cases}\end{cases}$$

В итоге, рассматриваемое композиционное произведение обращается в 1 лишь на элементах: $y\otimes yxy\otimes x\otimes x\otimes x$, при $v=v_2$, и $y\otimes(xy)^k\otimes x\otimes x\otimes x$, при $v=v_2'$. В остальных случаях оно равно 0.

4) Наконец, вычислим $(z\Psi_4)\circ_2(v\Psi_2)$. Рассмотрим значение этого композиционого произведения на элементе $a\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x$. Вычисление разбивается сначала на шесть случаев, соответствующих различным

базисным элементам b: y, yx, $x(yx)^j$, $(yx)^j$, $y(xy)^{k-1}$ и $(xy)^k$. Затем каждый из этих случаев разбивается, в свою очередь, на три подслучая, соотвтетственно, различным выборам образующей v: v_1, v_2 и v_2'.

$$\Big((z\Psi_4)\circ_2(v\Psi_2)\Big)(a\otimes b\otimes x\otimes x\otimes x)$$
$$= zt_3(at_2(v\Psi_2(b\otimes x)t_1(x\otimes x))) = zt_3(at_2(vt_1(b\otimes x)r_x))$$

$$= \begin{cases} zt_3(at_2(v(r_x)r_x)) = \begin{cases} 0, \text{ если } v=v_1,\\ z(t_3(x))=0, \text{ если } v=v_2,\\ 0, \text{ если } v=v_2', \end{cases}\\ zt_3(at_2(v(yr_x+(xy)^{k-1}r_xy(xy)^{k-2}+r_y(xy)^{k-1})r_x))\\ \quad = \begin{cases} zt_3(a\sum\limits_{l=1}^{k-1}((xy)^l\otimes(xy)^{k-1-l}+x(yx)^{l-1}\otimes y(xy)^{k-1-l}))=0,\\ zt_3(ay\otimes 1)=0,\\ zt_3(a\otimes x)=0, \end{cases}\\ zt_3(at_2(v(x(yx)^{j-1}(yr_x+r_y(xy)^{k-1}))r_x))=\\ \quad = \begin{cases} 0,\\ zt_3(a\sum\limits_{l=1}^{j}((xy)^l\otimes(xy)^{j-l}+x(yx)^{l-1}\otimes y(xy)^{j-l}))=0,\\ zt_3(a\sum\limits_{l=0}^{k-1}((yx)^l\otimes y(xy)^{k-1-l}+y(xy)^l\otimes(xy)^{k-1-l}))\\ \qquad = \begin{cases} 1, \text{ если } j=1,\ a=x,\\ 0, \text{ иначе}, \end{cases} \end{cases}\\ zt_3(at_2(v((yx)^{j-1}(yr_x+r_y(xy)^{k-1}))r_x))=\\ \quad = \begin{cases} 0,\\ zt_3\Big(a\Big(\sum\limits_{l=1}^{j}(yx)^l\otimes y(xy)^{j-l}+\sum\limits_{l=1}^{j+1}y(xy)^{l-1}\otimes(xy)^{j+1-l}\Big)\Big)=0,\\ 0, \end{cases}\\ zt_3(at_2(v(r_yy+yr_y)r_x))=0,\ v=v_1,v_2,v_2',\\ zt_3(at_2(v(r_xx^2+xr_xx+x^2r_x+(yx)^{k-1}r_y(xy)^{k-1})r_x))\\ \quad = \begin{cases} zt_3(a(xy\otimes 1+x\otimes y))=0,\\ zt_3(a\sum\limits_{l=0}^{k-1}((yx)^l\otimes y(xy)^{k-1-l}+y(xy)^l\otimes(xy)^{k-1-l}))\\ \qquad = \begin{cases} 1, \text{ если } a=x,\\ 0, \text{ иначе}, \end{cases}\\ 0, \end{cases} \end{cases}$$

где $1\leqslant j\leqslant k-1$.

Вычислим теперь $(z\Psi_4)\circ_2(v\Psi_2)$ на $a\otimes b\otimes y\otimes y\otimes y$:

$$\Big((z\Psi_4)\circ_2(v\Psi_2)\Big)(a\otimes b\otimes y\otimes y\otimes y)$$
$$= zt_3(at_2(v\Psi_2(b\otimes y)t_1(y\otimes y))) = zt_3(at_2(vt_1(b\otimes y)r_y))$$

$$= \begin{cases} zt_3(at_2(v(r_y)r_y)) = 0,\ v=v_1,v_2,v_2', \\ zt_3(at_2(v(xr_y+(yx)^{k-1}r_yx(yx)^{k-2}+r_x(yx)^{k-1})r_y)) \\ \quad = \begin{cases} zt_3(at_2(x^2r_y)) = zt_3(a\sum\limits_{l=1}^{k-1}((yx)^l\otimes(yx)^{k-1-l} \\ \qquad\qquad +y(xy)^{l-1}\otimes x(yx)^{k-1-l})) = 0, \\ 0, \\ zt_3(ax\otimes 1)=0, \end{cases} \\ zt_3(at_2(v((xy)^j(xr_y+(yx)^{k-1}r_yx(yx)^{k-2}+r_x(yx)^{k-1}))r_y)) \\ \quad = \begin{cases} 0, \\ 0, \\ zt_3(at_2((xy)^{j+1}r_y)) \\ \quad = zt_3\Big(a\Big(\sum\limits_{l=1}^{j}((xy)^l\otimes x(yx)^{j-l}+\sum\limits_{l=1}^{j+1}x(yx)^{l-1}\otimes(yx)^{j+1-l}\Big)\Big) \\ \qquad = \begin{cases} 1,\ \text{если } a=y, j=k-1, \\ 0,\ \text{иначе}, \end{cases} \end{cases} \\ zt_3(at_2(v(y(xy)^{j-1}(xr_y+(yx)^{k-1}r_yx(yx)^{k-2}+r_x(yx)^{k-1}))r_y)) = \\ \quad = \begin{cases} 0, \\ zt_3(at_2(y(xy)^{j-1}x(yx)^{k-1}r_y)) \\ \quad = zt_3(a\Big(\sum\limits_{l=1}^{k-1}((xy)^l\otimes x(yx)^{k-1-l}+\sum\limits_{l=1}^{k}x(yx)^{l-1}\otimes(yx)^{k-l}\Big)) \\ \qquad = \begin{cases} 1,\ a=y, \\ \quad j=1 \\ 0,\ \text{иначе}; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

где $1\leqslant j\leqslant k-1$.

Таким образом, композиционное произведение $(z\Psi_4)\circ_2(v\Psi_2)$ принимает значение 1 на $x\otimes(xy)^k\otimes x\otimes x\otimes x$, $y\otimes yxy\otimes y\otimes y\otimes y$ при $v=v_2$ и $x\otimes xyx\otimes x\otimes x\otimes x$, $y\otimes(xy)^k\otimes y\otimes y\otimes y$ при $v=v_2'$, и равно 0 во всех остальных случаях.

Наконец, получаем:

$$
\begin{aligned}
&[v_2, z](1 \otimes x \otimes 1)\\
&\quad = \big((z \circ \Psi_4) \circ_1 (v_2 \circ \Psi_2) + (z \circ \Psi_4) \circ_2 (v_2 \circ \Psi_2)\big)\Phi_5(1 \otimes x \otimes 1)\\
&\quad = 1((xy)^k)^* + 1((xy)^k)^* = 0,\\
&[v_2, z](1 \otimes y \otimes 1)\\
&\quad = \big((z \circ \Psi_4) \circ_1 (v_2 \circ \Psi_2) + (z \circ \Psi_4) \circ_2 (v_2 \circ \Psi_2)\big)\Phi_5(1 \otimes y \otimes 1)\\
&\quad = 1yxy^* + 1yxy^* = 0,\\
&[v_2', z](1 \otimes x \otimes 1)\\
&\quad = \big((z \circ \Psi_4) \circ_1 (v_2' \circ \Psi_2) + (z \circ \Psi_4) \circ_2 (v_2' \circ \Psi_2)\big)\Phi_5(1 \otimes x \otimes 1)\\
&\quad = 1xyx^* + 1xyx^* = 0,\\
&[v_2', z](1 \otimes y \otimes 1)\\
&\quad = \big((z \circ \Psi_4) \circ_1 (v_2' \circ \Psi_2) + (z \circ \Psi_4) \circ_2 (v_2' \circ \Psi_2)\big)\Phi_5(1 \otimes y \otimes 1)\\
&\quad = 1((xy)^k)^* + 1((xy)^k)^* = 0,\\
&[v1, z](1 \otimes x \otimes 1) = [v1, z](1 \otimes y \otimes 1) = 0.
\end{aligned}
$$

□

Лемма 4.9.

$$\Delta(wz) = v_1 z.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что ввиду соотношения между Δ и скобкой Герстенхабера из определения 1.1 достаточно вычислить $[w, z]$. Прежде всего вспомним, что

$$
\begin{aligned}
[w, z](1 \otimes r_a \otimes 1) &= \Big(\big((w \circ \Psi_3) \circ (z \circ \Psi_4)\big)\Phi_6(1 \otimes r_a \otimes 1)\\
&\qquad + \big((z \circ \Psi_4) \circ (w \circ \Psi_3)\big)\Big)\Phi_6(1 \otimes r_a \otimes 1)\\
&= \Big(\sum_{i=1}^{3} \big((w \circ \Psi_3) \circ_i (z \circ \Psi_4)\big)\Phi_6(1 \otimes r_a \otimes 1)\\
&\qquad + \sum_{i=1}^{4} \big((z \circ \Psi_4) \circ_i (w \circ \Psi_3)\big)\Big)\Phi_6(1 \otimes r_a \otimes 1). \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Теперь заметим, что значения $[w, z]$ на слагаемых всех сумм из определения Φ_6, кроме первой, четвертой, седьмой и десятой, равны нулю. Это следует из формул части 3 для Ψ_3, Ψ_4 и Φ_6. Действительно, для всех слагаемых $1\otimes f_a\otimes a\otimes b\otimes c\otimes f\otimes \tilde{c}\otimes \bar{f}b^*\bar{f}_a$ соответствующих сумм имеем:

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{3}(w\circ\Psi_3)\circ_i(z\circ\Psi_4)+\sum_{i=1}^{4}(z\circ\Psi_4)\circ_i(w\circ\Psi_3)\Big)\\
&\qquad\times(1\otimes f_a\otimes a\otimes b\otimes c\otimes f\otimes\tilde{c}\otimes\bar{f}b^*\bar{f}_a)\\
&\quad=\Big(w(t_2(zt_3(f_at_2(at_1(b\otimes c)))t_1(f\mathsf{C}(\tilde{c})))\\
&\qquad+w(t_2(f_at_1(z(t_3(at_2(bt_1(c\mathsf{C}(f))))\otimes\tilde{c}))\\
&\qquad+w(t_2(f_at_1(a\mathsf{C}(z(t_3(bt_2(ct_1(f\mathsf{C}(\tilde{c})))))))))\\
&\qquad+z(t_3(w(t_2(f_at_1(a\mathsf{C}(b))))t_2(ct_1(f\mathsf{C}(\tilde{c})))))\\
&\qquad+z(t_3(f_at_2(w(t_2(at_1(b\otimes c)))t_1(f\mathsf{C}(\tilde{c})))))\\
&\qquad+z(t_3(f_at_2(at_1(w(t_2(bt_1(c\mathsf{C}(f))))\otimes\tilde{c}))))\\
&\qquad+z(t_3(f_at_2(at_1(b\mathsf{C}(w(t_2(ct_1(f\mathsf{C}(\tilde{c})))))))))\Big)\bar{f}b^*\bar{f}_a=0,
\end{aligned}$$

ввиду того, что

$$t_1(f\mathsf{C}(\tilde{c}))=t_1(c\mathsf{C}(f))=t_1(f\mathsf{C}(\tilde{c}))=0,$$

так как $cf, f\tilde{c}\in\mathcal{B}$ и $t_1(ab)=0$ для любых a,b таких, что $ab\in\mathcal{B}$.

Таким образом, остается иследовать значения $[w,z]$ на слагаемых первой, четвертой, седьмой и десятой сумм из определения Φ_6.

Из формулы для Φ_6 видно, что у слагаемых, отвечающих значению Φ_6 на $1\otimes r_x\otimes 1$, первые два тензорных сомножителя могут быть равны $x\otimes x, (yx)^iy\otimes x, (yx)^j\otimes y$, а у слагаемых, отвечающих значению на $1\otimes r_y\otimes 1$, они равны $y\otimes y, x(yx)^i\otimes y, (xy)^j\otimes x$, где $1\leqslant i\leqslant k-1$ и $0\leqslant j\leqslant k-2$.

Рассмотрим значение $[w,z]$ на слагаемом $1\otimes f_a\otimes a\otimes b\otimes x\otimes f\otimes x\otimes \bar{f}b^*\bar{f}_a$ первой суммы:

$$\begin{aligned}
&w(t_2(z(t_3(f_at_2(at_1(b\otimes x))))t_1(x\otimes x))\\
&\qquad+w(t_2(f_at_1(z(t_3(at_2(bt_1(x\otimes x))))\otimes x))\\
&\qquad+w(t_2(f_at_1(a\mathsf{C}(z(t_3(bt_2(xt_1(x\otimes x))))))))\\
&\qquad+z(t_3(w(t_2(f_at_1(a\mathsf{C}(b))))t_2(xt_1(x\otimes x))))\\
&\qquad+z(t_3(f_at_2(w(t_2(at_1(b\otimes x)))t_1(x\otimes x))))\\
&\qquad+z(t_3(f_at_2(at_1(w(t_2(bt_1(x\otimes x)))\otimes x))))
\end{aligned}$$

$$+\, z(t_3(f_a t_2(at_1(b\mathsf{C}(w(t_2(xt_1(x\otimes x))))))))b^*\bar f_a,$$

где $f_x \in \{x\} \cup \{(yx)^i y\}_{i=0}^{k-2} \cup \{(xy)^i\}_{i=1}^{k-1}$ и $f_y \in \{(yx)^i\}_{i=1}^{k-1} \cup \{y\} \cup \{(xy)^i x\}_{i=0}^{k-2}$. В данном случае $f = x$ и $\bar f = \bar x = 1$.

Проанализируем слагаемые по отдельности.

1) Рассмотрим $w(t_2(z(t_3(f_x t_2(xt_1(b\otimes x))))r_x)) =$

$$\begin{cases} w(t_2(z(t_3(f_x t_2(xr_x)))r_x)), \text{ если } b = x,\\ w(t_2(z(t_3(f_x t_2(xyr_x + xr_y(xy)^{k-1})))r_x)), \text{ если } b = yx,\\ w(t_2(z(t_3(f_x t_2((yx)^{k-1}yr_y(xy)^{k-1})))r_x)), \text{ если } b = xyx,\\ w(t_2(z(t_3(f_x t_2((xy)^{i+1}r_x + x(yx)^i r_y(xy)^{k-1})))r_x)),\\ \qquad \text{если } b = (yx)^{i+1}, 1\leqslant i\leqslant k-2,\\ w(t_2(z(t_3(f_x t_2(xr_y y + xyr_y)))r_x)), \text{ если } b = y(xy)^{k-1},\\ w(t_2(z(t_3(f_x t_2(xr_x x^2 + x^2 r_x x + x^3 r_x + x(yx)^{k-1})))r_x)),\\ \qquad \text{если } b = (xy)^k, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} w(t_2(z(t_3(f_x\otimes 1))r_x)) = 0, \text{так как } f_x \neq (xy)^k,\\ 0,\\ w(t_2(z(t_3(f_x(yx)^{k-1}\otimes(xy)^{k-1}))r_x))\\ \qquad = \begin{cases} w(t_2(z(t_3(x(yx)^{k-1}\otimes(xy)^{k-1}))r_x)) = 0,\\ 0,\end{cases}\\ 0,\\ 0,\\ w(t_2(z(t_3(f_x \sum\limits_{l=0}^{k-1}((yx)^l\otimes y(xy)^{k-1-l} + y(xy)^l\otimes(xy)^{k-1-l}))r_x))\\ \qquad = \begin{cases} w(t_2(r_x)) = 0,\\ 0,\end{cases} \end{cases}$$

аналогично, $w(t_2(z(t_3(f_y t_2(yt_1(b\otimes x))))r_x)) =$

$$=\begin{cases} w(t_2(z(t_3(f_yt_2(yr_x)))r_x)),\\ w(t_2(z(t_3(f_yt_2((xy)^{k-1}xr_x+y(xy)^{k-1}r_xy(xy)^{k-2}+yr_y(xy)^{k-1}))r_x))),\\ w(t_2(z(t_3(f_yt_2(yxyr_x+yxr_y(xy)^{k-1})))r_x)),\\ w(t_2(z(t_3(f_yt_2((yx)^{i+1}yr_x+(yx)^{i+1}r_y(xy)^{k-1})))r_x)),\\ w(t_2(z(t_3(f_yt_2(yr_yy+x(yx)^{k-1}r_y)))r_x)),\\ w(t_2(z(t_3(f_yt_2(yr_xx^2-yxr_xx)))r_x)), \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0,\\ w(t_2(z(t_3(f_y\sum_{l=1}^{k-1}((xy)^l\otimes(xy)^{k-1-l},\\ \qquad +x(yx)^{l-1}\otimes y(xy)^{k-1-l}+1\otimes(xy)^{k-1}))r_x)),\\ 0,\\ w(t_2(z(t_3(f_y\otimes x))r_x)),\\ 0,\\ w(t_2(z(t_3(f_yy\otimes x))r_x)). \end{cases} = 0$$

2) Чтобы показать, что $w(t_2(f_at_1(z(t_3(at_2(bt_1(x\otimes x)))\otimes x))=0$, вычислим

$z(t_3(at_2(bt_1(x\otimes x)))\otimes x)$

$$=\begin{cases} z(t_3(a\otimes 1))\otimes x),\\ z(t_3(a\sum_{l=1}^{i-1}(yx)^l\otimes y(xy)^{i-1-l}+a\sum_{l=1}^{i}y(xy)^{l-1}\otimes(xy)^{i-l}))\otimes x),\\ \qquad 1\leqslant i\leqslant k-1,\\ z(t_3(a\sum_{l=1}^{i}((xy)^l\otimes(xy)^{i-l}+x(yx)^{l-1}\otimes y(xy)^{i-l}))\otimes x),\\ \qquad 0\leqslant i\leqslant k-1,\\ z(t_3(a\sum_{l=0}^{k-1}((yx)^l\otimes y(xy)^{k-1-l}+y(xy)^l\otimes(xy)^{k-1-l}))\otimes x), \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0,\\ 0,\\ 0,\\ 1, \text{ если } a=x \text{ и } 0 \text{ если } a=y. \end{cases}$$

Наконец, $t_1(1\otimes x)=0$.

3) $w(t_2(f_a t_1(a\mathsf{C}(z(t_3(bt_2(xt_1(x\otimes x)))))))) = 0$, так как $z(t_3(bt_2(xt_1(x\otimes x)))) = z(t_3(b\otimes 1)) = \begin{cases} 1, & \text{если } b=(xy)^k,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$ и $\mathsf{C}(1) = 0$.

4) $z(t_3(w(t_2(f_a t_1(a\mathsf{C}(b))))t_2(xt_1(x\otimes x))))$

$$= \begin{cases} k-1, & \text{если } f_y = (yx)^{k-1}, a=y, b=(xy)^{k-1}x,\\ 1, & \text{если } f_y = y, a=y, b=y(xy)^{k-1},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Вычисление

$$z(t_3(w(t_2(f_a t_1(a\mathsf{C}(b))))t_2(xt_1(x\otimes x)))) = z(t_3(w(t_2(f_a t_1(a\mathsf{C}(b))))\otimes 1))$$

сразу необходимо разбить на два случая:

4.1) Пусть $a = x$. Покажем, что $z(t_3(w(t_2(f_x t_1(x\mathsf{C}(b))))\otimes 1)) = 0$. Итак,

$$t_1(x\mathsf{C}(b)) = \begin{cases} t_1(x\otimes x\otimes (yx)^i + x^2\otimes y\otimes x(yx)^{i-1}), & \text{для } b = x(yx)^i,\\ & 0\leqslant i\leqslant k-1,\\ t_1(x\otimes x\otimes y(xy)^i + x^2\otimes y\otimes (yx)^{i-1}), & \text{для } b=(xy)^i,\\ & 1\leqslant i\leqslant k,\\ 0, & \text{иначе;}\end{cases}$$

$$= \begin{cases} r_x(yx)^i + (yx)^{k-1}r_y x(yx)^{i-1},\\ r_y(xy)^{i-1} + (yx)^{k-1}r_y(xy)^{i-1} + \delta_{i1}y(xy)^{k-2}r_x(yx)^{k-1},\end{cases}$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j,\\ & 0, \text{иначе.}\end{cases}$

$$w(t_2(f_x(r_x(yx)^i + (yx)^{k-1}r_y x(yx)^{i-1})))$$
$$= \begin{cases} w(t_2(xr_x(yx)^i + x(yx)^{k-1}r_y x(yx)^{i-1})),\\ w(t_2((yx)^j y r_x(yx)^i)),\\ w(t_2((xy)^j r_x(yx)^i));\end{cases}$$
$$= \begin{cases} w(1\otimes (yx)^i) = 0,\\ 0,\\ 0.\end{cases}$$

$$w(t_2(f_x(r_y(xy)^{i-1}+(yx)^{k-1}r_y(xy)^{i-1}+\delta_{i1}y(xy)^{k-2}r_x(yx)^{k-1})))$$
$$=\begin{cases} w(1\otimes y(xy)^{i-1}),\\ 0,\\ 0;\end{cases}$$

а $w(1\otimes y(xy)^{i-1})=0$.

4.2) Пусть $a=y$. Тогда

$$z(t_3(w(t_2(f_yt_1(y\mathsf{C}(b))))\otimes 1))=\begin{cases} k-1,\ \text{если}\ f_y=(yx)^{k-1}, b=(xy)^{k-1}x,\\ k-2,\ \text{если}\ f_y=x(yx)^{k-2}, b=(xy)^k,\\ 1,\ \text{если}\ f_y=y, b=y(xy)^{k-1},\\ 0,\ \text{иначе}.\end{cases}$$

Аналогично предыдущему,

$$t_2(f_yt_1(y\mathsf{C}(b)))$$
$$=\begin{cases} t_2(f_yt_1(y(xy)^{k-1}\otimes x\otimes 1)),\\ \qquad \text{для}\ b=x(yx)^{k-1},\\ t_2(f_yt_1(y(xy)^{k-1}\otimes x\otimes y+(yx)^k\otimes y\otimes 1)),\\ \qquad \text{для}\ b=(xy)^k,\\ t_2(f_yt_1(y\otimes y\otimes (xy)^i+y^2\otimes x\otimes y(xy)^{i-1})),\\ \qquad \text{для}\ b=y(xy)^i, 0\leqslant i\leqslant k-1,\\ t_2(f_yt_1(y\otimes y\otimes x(yx)^{i-1}+y^2\otimes x\otimes (yx)^{i-1})),\\ \qquad \text{для}\ b=(yx)^i, 1\leqslant i\leqslant k-1,\end{cases}$$
$$=\begin{cases} t_2(f_y(r_yy+yr_y)),\\ t_2(f_y(r_yy^2+yr_yy+(xy)^{k-1}(xr_y+(yx)^{k-1}r_yx(yx)^{k-2}+r_x(yx)^{k-1}))),\\ t_2(f_y(r_y(xy)^i+x(yx)^{k-2}(yr_x+(xy)^{k-1}r_xy(xy)^{k-2}+r_y(xy)^{k-1})y(xy)^{i-1})),\\ t_2(f_y(r_yx(yx)^{i-1}+x(yx)^{k-2}(yr_x+(xy)^{k-1}r_xy(xy)^{k-2}+r_y(xy)^{k-1})(yx)^{i-1})).\end{cases}$$

Разберем каждый из этих четырех случаев.

4.2.1) $z(t_3(w(t_2(f_y(r_yy+yr_y)))\otimes 1))$

$$=\begin{cases} z(t_3(w(t_2((yx)^iyr_y))\otimes 1)),\ \text{если}\ f_y=(yx)^i,\\ 0,\ \text{если}\ f_y=y,\\ z(t_3(w(t_2((xy)^{i+1}r_y))\otimes 1)),\ \text{если}\ f_y=x(yx)^i,\end{cases}$$

$$= \begin{cases} z(t_3(w(\sum\limits_{l=1}^{i}((yx)^l\otimes(yx)^{i-l}+y(xy)^{l-1}\otimes x(yx)^{i-l}))\otimes x), \\ z(t_3(w(\sum\limits_{l=1}^{i}(xy)^l\otimes x(yx)^{i-l}+\sum\limits_{l=1}^{i+1}x(yx)^{l-1}\otimes(yx)^{i-l+1})\otimes x), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k-1, \text{ если } f_y=(yx^{k-1}), b=(xy)^{k-1}x, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

4.2.2) $z(t_3(w(t_2(f_y(r_yy^2+yr_yy+(xy)^{k-1}(xr_y+(yx)^{k-1}r_yx(yx)^{k-2}+r_x(yx)^{k-1})))\otimes 1))=$

$$\begin{cases} z(t_3(w(t_2((yx)^iyr_yy))\otimes 1)), & \text{если } f_y=(yx)^i, \\ & 1\leqslant i\leqslant k-1 \\ z(t_3(w(t_2((yx)^kr_y+y(xy)^{k-1}r_x(yx)^{k-1}))\otimes 1)), & \text{если } f_y=y, \\ z(t_3(w(t_2((xy)^{i+1}r_yy))\otimes 1)), & \text{если } f_y=x(yx)^i, \\ & 0\leqslant i\leqslant k-2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} z(t_3(w(\sum\limits_{l=1}^{i}((yx)^l\otimes(yx)^{i-l}y+y(xy)^{l-1}\otimes(xy)^{i-l+1}))\otimes x)=0, \\ z(t_3(w(\sum\limits_{l=1}^{k-1}(xy)^l\otimes x(yx)^{k-1-l}, \\ \qquad +\sum\limits_{l=1}^{k}x(yx)^{l-1}\otimes(yx)^{k-l}+1\otimes x(yx)^{k-1})\otimes x)=0, \\ z(t_3(w(\sum\limits_{l=1}^{i}(xy)^l\otimes x(yx)^{i-l}y \\ \qquad +\sum\limits_{l=1}^{i+1}x(yx)^{l-1}\otimes(yx)^{i-l+1}y)\otimes x)=(k-2), \text{ если } i=k-2. \end{cases}$$

Например, $w(\sum\limits_{l=1}^{i}(xy)^l\otimes(xy)^{i-l+1})=i(xy)^{i+2}$, но $i\leqslant k-2$ и поэтому при $i=k-2$ имеем: $(xy)^{i+2}=(xy)^k$, а значит $zt_3((xy)^{i+2}\otimes 1)=1$.

4.2.3)

$$z(t_3(w(t_2(f_y(r_y(xy)^i+x(yx)^{k-2}(yr_x+(xy)^{k-1}r_xy(xy)^{k-2} \\ \qquad\qquad +r_y(xy)^{k-1})y(xy)^{i-1})))\otimes 1))$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } f_y=(yx)^i,\ 1\leqslant i\leqslant k-1, \\ z(t_3(w(t_2((yx)^{k-1}yr_xy(xy)^{i-1}))\otimes 1)), & \text{если } f_y=y, \\ 0, & \text{если } f_y=x(yx)^i,\ 0\leqslant i\leqslant k-2, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \\ z(t_3(w(1 \otimes (xy)^i) \otimes 1)) = zt_3((xy)^{i+1} \otimes 1) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = k-1, \\ 0, \text{ иначе}, \end{cases} \\ 0, \text{ иначе}. \end{cases}$$

4.2.4)

$$z(t_3(w(t_2(f_y(r_y x(yx)^{i-1} + x(yx)^{k-2}(yr_x + (xy)^{k-1} r_x y(xy)^{k-2} \\ + r_y(xy)^{k-1})(yx)^{i-1})) \otimes 1))$$

$$= \begin{cases} z(t_3(w(t_2((yx)^{k-1} yr_x(yx)^{i-1})) \otimes 1)), \text{ если } f_y = y, \\ 0, \text{ иначе}. \end{cases}$$

Наконец,

$$t_3(w(t_2((yx)^{k-1} yr_x(yx)^{i-1})) \otimes 1) = t_3(w(1 \otimes x(yx)^{i-1}) \otimes 1) \\ = t_3(x(yx)^i \otimes 1) = 0.$$

5) $z(t_3(f_a t_2(w(t_2(at_1(b \otimes x)))t_1(x \otimes x))))$

$$= \begin{cases} ky(xy)^{i-1}, \text{ если } f_y = (yx)^i, a = y, b = yx, \\ k(xy)^i, \text{ если } f_y = x(yx)^i, a = y, b = yx, \\ y, \text{ если } f_y = (yx)^{k-1}, a = y, b = (xy)^k, \\ 1, \text{ если } f_y = x(yx)^{k-2}, a = y, b = (xy)^k, \\ 0, \text{ иначе}. \end{cases}$$

Учтем, что $t_1(x \otimes x) = r_x$, и снова рассмотрим два случая.
5.1) Пусть $a = x$. Тогда $z(t_3(f_x t_2(w(t_2(xt_1(b \otimes x)))r_x))) = 0$.
Действительно, $z(t_3(f_x t_2(w(t_2(xt_1(b \otimes x)))r_x)))$

$$
= \begin{cases}
z(t_3(f_x t_2(w(t_2(xr_x))r_x))), \\
\qquad \text{если } b = x, \\
z(t_3(f_x t_2(w(t_2(x(yr_x + (xy)^{k-1} r_x y (xy)^{k-2} + r_y (xy)^{k-1}))r_x))), \\
\qquad \text{если } b = yx, \\
z(t_3(f_x t_2(w(t_2(x^2 r_y (xy)^{k-1}))r_x))), \\
\qquad \text{если } b = xyx, \\
z(t_3(f_x t_2(w(t_2(x(yx)^i (yr_x + r_y (xy)^{k-1}))r_x))), \\
\qquad \text{если } b = (yx)^{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant k-2, \\
z(t_3(f_x t_2(w(t_2(xr_y + xyr_y))r_x)), \\
\qquad \text{если } b = y(xy)^{k-1}, \\
z(t_3(f_x t_2(w(t_2(xr_x x^2 + x^2 r_x x + x^3 r_x + y^2 r_y (xy^{k-1}))r_x)), \\
\qquad \text{если } b = (xy)^k,
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
z(t_3(f_x xy)), \\
0, \\
z(t_3(f_x \sum\limits_{l=1}^{k-1} ((yx)^l \otimes (yx)^{k-1-l} + y(xy)^{l-1} \otimes x(yx)^{k-1-l})(xy)^{k-1})) = 0, \\
0, \\
0, \\
0.
\end{cases}
$$

5.2) Пусть $a = y$. Рассмотрим $z(t_3(f_y t_2(w(t_2(yt_1(b \otimes x)))r_x)))$

$$
= \begin{cases}
z(t_3(f_y t_2(w(t_2(yr_x))r_x))), \\
\qquad \text{если } b = x, \\
z(t_3(f_y t_2(w(t_2(y^2 r_x + y(xy)^{k-1} r_x y (xy)^{k-2} + yr_y (xy)^{k-1}))r_x))), \\
\qquad \text{если } b = yx, \\
z(t_3(f_y t_2(w(t_2(yxyr_x + yxr_y (xy)^{k-1}))r_x))), \\
\qquad \text{если } b = xyx, \\
z(t_3(f_y t_2(w(t_2((yx)^{i+1} yr_x + (yx)^{i+1} r_y (xy)^{k-1}))r_x))), \\
\qquad \text{если } b = x(yx)^i, 1 \leqslant i \leqslant k-2, \\
z(t_3(f_y t_2(w(t_2(yr_y y + y^2 r_y))r_x))), \\
\qquad \text{если } b = (xy)^k,
\end{cases}
$$

$$= \begin{cases} 0, \\ z(t_3(f_y t_2(w(\sum\limits_{l=1}^{k-1}((xy)^l \otimes (xy)^{k-1-l} + x(yx)^{l-1} \otimes y(xy)^{k-1-l}) \\ \qquad\qquad\qquad +1 \otimes (xy)^{k-1})r_x))), \\ 0, \\ z(t_3(f_y t_2(w(1 \otimes x)r_x))),\ \text{если}\ i = k-2\ \text{и}\ 0,\ \text{иначе}, \\ 0, \\ z(t_3(f_y t_2(w(y \otimes x)r_x))), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \\ z(t_3(f_y t_2(k(xy)^k r_x))), \\ 0, \\ z(t_3(f_y t_2(xyxr_x))), \\ 0, \\ z(t_3(f_y t_2((yx)^2 r_x))), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} z(t_3(f_y k \sum\limits_{l=0}^{k-1}((yx)^l \otimes y(xy)^{k-1-l} + y(xy)^l \otimes (xy)^{k-1-l}))), \\ z(t_3(f_y(xy \otimes 1 + x \otimes y))), \\ z(t_3(f_y(yx \otimes 1 + y \otimes xy + yxy \otimes 1))). \end{cases}$$

Разберем эти три случая.

5.2.1) $z(t_3(f_y k \sum\limits_{l=0}^{k-1}((yx)^l \otimes y(xy)^{k-1-l} + y(xy)^l \otimes (xy)^{k-1-l})))$

$$= \begin{cases} z(t_3(k(yx)^{i+l} \otimes y(xy)^{k-1-l})),\ \text{если}\ f_y = (yx)^i, 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ z(t_3(y \otimes y(xy)^{k-1} + y^2 \otimes (xy)^{k-1-l})),\ \text{если}\ f_y = y, \\ z(t_3(k(xy)^{i+l+1} \otimes (xy)^{k-1-l})),\ \text{если}\ f_y = x(yx)^i, 0 \leqslant i \leqslant k-2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ky(xy)^{i-1}, & 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ 0, \\ k(xy)^i, & 0 \leqslant i \leqslant k-2. \end{cases}$$

5.2.2) $z(t_3(f_y(xy \otimes 1 + x \otimes y))) = 0$, при всех f_y.

5.2.3) $z(t_3(f_y(yx \otimes 1 + y \otimes xy + yxy \otimes 1))) = \begin{cases} y,\ \text{если}\ f_y = (yx)^{k-1}, \\ 1,\ \text{если}\ f_y = x(yx)^{k-2}. \end{cases}$

6) $z(t_3(f_a t_2(at_1(w(t_2(bt_1(x\otimes x)))\otimes x))))$

$$=\begin{cases}(k-1), \text{ если } a=x, f_x=x, b=x(yx)^{k-1},\\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$$

Заметим, что $t_1(w(t_2(bt_1(x\otimes x)))\otimes x)$

$$=\begin{cases}t_1(xy\otimes x), \text{ если } b=x,\\ t_1(iy(xy)^i\otimes x), \text{ если } b=(yx)^i, 1\leqslant i\leqslant k-1,\\ t_1(i(xy)^{i+1}\otimes x), \text{ если } b=x(yx)^i, 1\leqslant i\leqslant k-1\\ t_1(xyx\otimes x), \text{ если } b=y(xy)^{k-1},\\ 0, \text{ если } b=(xy)^k,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(k-1)(r_y y+yr_y), \text{ если } b=(yx)^{k-1}\\ (k-1)(r_x x^2+xr_x x+x^2r_x+(yx)^{k-1}r_y(xy)^{k-1}), \text{ если } b=x(yx)^{k-1}\\ xyr_x+xr_y(xy)^{k-1}, \text{ если } b=(yx)^k,\\ 0, \text{иначе.}\end{cases}$$

Далее снова рассмотрим два случая.

6.1) Пусть $a=x$, тогда $z(t_3(f_x t_2(xt_1(w(t_2(bt_1(x\otimes x)))\otimes x))))$

$$=\begin{cases}z(t_3(f_x t_2((k-1)(xr_y y+xyr_y)))),\\ z(t_3(f_x t_2((k-1)(xr_x x^2+x^2r_x x+x^3r_x+x(yx)^{k-1}r_y(xy)^{k-1})))),\\ z(t_3(f_x t_2(x^2r_y(xy)^{k-1}))),\end{cases}$$

$$=\begin{cases}z(t_3(f_x(k-1)x\otimes 1))=0,\\ z(t_3(f_x(k-1)\sum\limits_{l=0}^{k-1}((yx)^l\otimes y(xy)^{k-1-l}+y(xy)^l\otimes(xy)^{k-1-l}))\\ \qquad\qquad =\begin{cases}k-1, \text{ если } f_x=x\\ 0, \text{ иначе,}\end{cases}\\ z(t_3(f_x(yx)^{k-1}\otimes(xy)^{k-1}))=0.\end{cases}$$

6.2) Пусть $a=y$, тогда $z(t_3(f_y t_2(yt_1(w(t_2(bt_1(x\otimes x)))\otimes x))))$

$$=\begin{cases}z(t_3(f_y t_2((k-1)(yr_y y+y^2r_y)))),\\ z(t_3(f_y t_2((k-1)(yr_x x^2+yxr_x x)))),\\ z(t_3(f_y t_2(yxyr_x+yxr_y(xy)^{k-1}))),\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \\ z(t_3(f_y(k-1)y \otimes x)) = 0, \\ 0. \end{cases}$$

7) Наконец, $z(t_3(f_a t_2(at_1(b\mathsf{C}(w(t_2(xt_1(x \otimes x)))))))$

$$= \begin{cases} y, \text{ если } a = x, f_x = x, b = (xy)^k, \\ 1, \text{ если } a = y, f_y = y, b = y(xy)^{k-1}, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Поскольку $w(t_2(xt_1(x \otimes x))) = xy$, а $\mathsf{C}(xy) = 1 \otimes x \otimes y + x \otimes y \otimes 1$, имеем

$z(t_3(f_a t_2(at_1(b\mathsf{C}(w(t_2(xt_1(x \otimes x))))))) = z(t_3(f_a t_2(at_1(b \otimes x \otimes y)))) + z(t_3(f_a t_2(at_1(bx \otimes y \otimes 1))))$.

Исследуем эти два слагаемых.

7.1.1) Пусть $a = x$, тогда $z(t_3(f_x t_2(xt_1(b \otimes x \otimes y))))$

$$= \begin{cases} z(t_3(f_x t_2(xr_x y))), \\ z(t_3(f_x t_2(x(yx)^i yr_x y))), \\ z(t_3(f_x t_2(xr_y y^2 + xyr_y y))), \\ z(t_3(f_x t_2(x^2 r_x xy + x^3 r_x y))), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} z(t_3(f_x \otimes y)) = 0, \\ 0, \\ z(t_3(f_x x \otimes y)) = 0, \\ z(t_3(f_x((yx)^{k-1} \otimes y^2 + y(xy)^{k-1} \otimes y))) = \begin{cases} y, \text{ если } f_x = x, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \end{cases}$$

7.1.2) Пусть $a = y$, тогда $z(t_3(f_y t_2(yt_1(b \otimes x \otimes y))))$

$$= \begin{cases} z(t_3(f_y t_2(yr_x y))), \\ z(t_3(f_y t_2(y(x(yx)^i)yr_x y))), \ 0 \leqslant i \leqslant k-2, \\ z(t_3(f_y t_2(yr_y y^2 + y^2 r_y y))), \\ z(t_3(f_y t_2(yxr_x xy)), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \\ z(t_3(f_y \otimes xy)) = 0, \\ 0, \\ z(t_3(f_y y \otimes xy)) = 0. \end{cases}$$

7.2) Изучим последнее слагаемое $z(t_3(f_a t_2(at_1(bx\otimes y\otimes 1))))$. Вычислим сначала $at_1(bx\otimes y\otimes 1)$

$$=\begin{cases} ay(xy)^{k-2}(xr_y+(yx)^{k-1}r_yx(yx)^{k-2}+r_x(yx)^{k-1}), \text{ если } b=x,\\ a(xy)^{k-1}(xr_y+(yx)^{k-1}r_yx(yx)^{k-2}+r_x(yx)^{k-1}), \text{ если } b=y(xy)^{k-1},\\ 0, \text{ иначе, поскольку тогда либо } bxy\in\mathcal{B}, \text{ либо } bx=0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что при $a=x$, уже применение t_2 даст 0. В случае $a=y$, в первом случае сразу получаем 0, а во втором имеем:

$$\begin{aligned} &z(t_3(f_a t_2(y(xy)^{k-1}(xr_y+r_x(yx)^{k-1}))))\\ &=z(t_3(f_x\sum_{l=1}^{k-1}(xy)^l\otimes x(yx)^{k-1-l}+\sum_{l=1}^{k}x(yx)^{l-1}\otimes(yx)^{k-l}+1\otimes x(yx)^{k-1}))\\ &=\begin{cases}1, \text{ если } f_y=y,\\ 0, \text{ иначе.}\end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь значение $[w,z]$ на слагаемом $1\otimes f_a\otimes a\otimes b\otimes x\otimes f\otimes x\otimes \bar f b^*\bar f_a$ четвертой суммы:

$$\begin{aligned} &w(t_2(z(t_3(f_a t_2(at_1(b\otimes y))))t_1(y\otimes y))\\ &\quad+w(t_2(f_a t_1(z(t_3(at_2(bt_1(y\otimes y))))\otimes y))\\ &\quad+w(t_2(f_a t_1(a\mathsf{C}(z(t_3(bt_2(yt_1(y\otimes y))))))))\\ &\quad+z(t_3(w(t_2(f_a t_1(a\mathsf{C}(b))))t_2(yt_1(y\otimes y))))\\ &\quad+z(t_3(f_a t_2(w(t_2(at_1(b\otimes y)))t_1(y\otimes y))))\\ &\quad+z(t_3(f_a t_2(at_1(w(t_2(bt_1(y\otimes y)))\otimes y))))\\ &\quad+z(t_3(f_a t_2(at_1(b\mathsf{C}(w(t_2(yt_1(y\otimes y))))))))b^*\bar f_a. \end{aligned}$$

В данном случае $f=y$ и $\bar f=\bar y=1$. Можно сразу заключить, что третье, четвертое и седьмое слагаемые равны 0 ввиду того, что $t_2(yt_1(y\otimes y))=t_2(yr_y)=0$. Далее совершенно аналогично предыдущему получаем:

$$\begin{aligned} &w(t_2(z(t_3(f_a t_2(at_1(b\otimes y))))t_1(y\otimes y))\\ &=w(t_2(f_a t_1(z(t_3(at_2(bt_1(y\otimes y))))\otimes y))\\ &+z(t_3(f_a t_2(w(t_2(at_1(b\otimes y)))t_1(y\otimes y))))=0 \end{aligned}$$

и

$$z(t_3(f_a t_2(a t_1(b\mathsf{C}(w(t_2(y t_1(y\otimes y)))))))) = \begin{cases} k-1, \text{ если } a=y, f_y=y, b=y(xy)^{k-1},\\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Просуммировав теперь значения композиционных произведений на соответствующих слагаемых $\Phi_6(1\otimes r_a\otimes 1)$ (смотри начало доказательства), получим значения $[w,z]$ на $(1\otimes r_a\otimes 1)$:

$$\begin{aligned}&[w,z](1\otimes r_x\otimes 1)\\ &= (k-1)(x(yx)^{k-1})^*\overline{(yx)^{k-1}} + k\sum_{i=1}^{k-1} y(xy)^{i-1}(yx)^*\overline{(yx)^i}\\ &+ y((xy)^*)\overline{(yx)^{k-1}} + (k-1)(x(yx)^{k-1})^*\overline{x} + y((xy)^k)^*\overline{x}\\ &= (k-1)y + y + (k-1)y + y = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[w,z](1\otimes r_y\otimes 1) =\\ &(k-2)((xy)^k)^*\overline{x(yx)^{k-1}} + 1(y(xy)^{k-1})^*\overline{y}\\ &+ k\sum_{i=0}^{k-2}(xy)^i(yx)^*\overline{x(yx)^i} + 1((xy)^k)^*\overline{x(yx)^{k-1}}\\ &+ 1(y(xy)^{k-1})\overline{y} + (k-1)(y(xy)^{k-1})^*\overline{y}\\ &= (k-2)x + x + x + x + (k-1)x = 0\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\overline{y}=1$, $\overline{x(yx)^i} = x(yx)^{k-2-i}$, $\overline{(yx)^i} = (xy)^{k-1-i}$, а также, что

$$\begin{aligned}(yx)^*\overline{x(yx)^i} &= (yx)^{k-1}x(yx)^{k-2-i} = 0, \text{ если } 0\leqslant i\leqslant k-2,\\ y(xy)^{i-1}(yx)^* &= y(xy)^{i-1}(yx)^{k-1} = 0, \text{ если } 1\leqslant i\leqslant k-1.\end{aligned}$$

Итак,

$$[w,z] = (2ky, 2kx) = (0,0) = 0.$$

Тогда,

$$\Delta(wz) = \Delta(w)z + w\Delta(z) + [w,z] = v_1z + 0 + 0 = v_1 z. \qquad \square$$

Теперь можно сформулировать теорему, описывающую BV-структуру на $HH^*(R_k)$.

Теорема 4.10. *Пусть* $A = R_k$, $\mathrm{char} k = 2$ *и* Δ *—* BV*-дифференциал из теоремы* 1.2. *Тогда* Δ *удовлетворяет следующим соотношениям*

$$\begin{aligned}
\Delta(u_1) &= \Delta(u_1') = 0,\ \Delta(u_2) = (k-1)p_1,\\
\Delta(p_1u_1) &= \Delta(p_1u_1') = \Delta(p_2'u_1) = \Delta(p_2u_1') = 0,\\
\Delta(p_2u_1) &= \Delta(p_2'u_1') = p_1^{k-1},\ \Delta(p_3u_1') = p_2,\ \Delta(p_3u_1) = p_2',\\
\Delta(p_2u_2) &= \Delta(p_2'u_2) = \Delta(p_3u_2) = 0,\ \Delta(p_1u_2) = (k-2)p_1^2,\\
\Delta(ab) &= 0,\ \text{\textit{если} } a \in \{v_1, v_2, v_2'\}, b \in \{1, p_1, p_2, p_2', p_3\},\\
\Delta(u_1u_2) &= \Delta(u_1'u_2) = \Delta(u_1u_1') = 0,\\
\Delta(u_1v_1) &= \Delta(u_1'v_2') = (u_1')^2, \Delta(u_1'v_1) = \Delta(u_1v_2) = u_1^2,\\
\Delta(u_1'v_2) &= \Delta(u_1v_2') = (k-2)p_1^{k-2}v_1, \Delta(w) = v_1, \Delta(p_1w) = 0,\\
\Delta(az) &= 0,\ \text{\textit{если} } a \in \{1, p_1, p_2, p_2', p_3\},\\
\Delta(u_1z) &= \Delta(u_1'z) = 0,\quad \Delta(u_2z) = (k-1)(p_1 + p_1^{k-1})z,\\
\Delta(v_1z) &= \Delta(v_2z) = \Delta(v_2'z) = 0,\\
\Delta(wz) &= v_1z.
\end{aligned}$$

Эти соотношения вместе с соотношениями из теоремы 4.1 *задают описание структуры* BV*-алгебры (и, в частности, алгебры Герстенхабера) на* $HH^*(A)$.

Доказательство. Доказательство следует из лемм 4.3–4.9. □

Литература

1. N. Bian, G. Zhang, P. Zhang, *Setwise homotopy category.* — Appl. Categ. Structures **17**, No. 6 (2009), 6, 561–565.
2. C. Cibils, A. Solotar, *Hochschild cohomology algebra of abelian groups.* — Arch. Math. **68** (1997), 17–21.
3. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lecture Notes Math., **1428**, Berlin; Heidelberg. 1990.
4. C.-H. Eu, T. Schedler, *Calabi-Yau Frobenius algebras.* — J. Algebra **321**, No. 3 (2009), 774–815.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа, I: обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18**, No. 1 (2006) 55–107.
6. M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring.* — Ann. Math. (2) **78** (1963), 267–288.

7. E. Getzler, *Batalin-Vilkovsky algebras and two-dimensional topological field theories.* — Comm. Math. Phys. **159** (1994), no.2, 265–285.
8. T. Holm, *The Hochschild cohomology ring of a modular group algebra: the commutative case.* — Comm. Algebra **24**, No. 6 (1996), 1957–1969.
9. G. Hochschild, *On the cohomology groups of an associative algebra.* — Ann. Math. (2) **46** (1945), 58–67.
10. A. A. Ivanov, S. O. Ivanov, Yu. Volkov, G. Zhou, *BV structure on Hochschild cohomology of the group ring of the quaternion group of order eight in characteristic two*, в печати, доступен по ссылке `http://arxiv.org/abs/1407.4341`
11. С. О. Иванов, *Самоинъективные алгебры стабильной Калаби–Яу размерности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 226–261.
12. J. Le, G. Zhou, *On the Hochschild cohomology ring of tensor products of algebras.* — J. Pure Appl. Algebra **218**, No. 8 (2014), 1463–1477.
13. J. Le, G. Zhou, *Comparison morphisms and Hochschild cohomology,* in preparation.
14. Y.-M. Liu, G. Zhou, *The Batalin-Vilkovisky structure over the Hochschild cohomology ring of a group algebra,* preprint, 2014.
15. J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Appendix E by M. O. Ronco, Grund. Math. Wiss. **301**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
16. С. Маклейн, *Гомология.* Мир, М., 1966.
17. Yu. I. Manin, *Three constructions of Frobenius manifolds: a comparative study.* — Asian J. Math. **3**, No. 1 (1999), 179–220.
18. J. P. May, *The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras.* — J. Algebra **3** (1966), 123–146.
19. L. Menichi, *Batalin–Vilkovisky algebras and cyclic cohomology of Hopf algebras.* — K-Theory **32**, No. 3 (2004), 231–251.
20. S. Sanchez-Flores, *The Lie structure on the Hochschild cohomology of a modular group algebra.* — J. Pure Appl. Algebra **216**, No. 3 (2012), 718–733.
21. T. Tradler, *The Batalin–Vilkovisky algebra on Hochschild cohomology induced by infinity inner products.* — Ann. Inst. Fourier **58**, No. 7 (2008), 2351–2379.
22. T. Yang, *A Batalin-Vilkovisky algebra structure on the Hochschild cohomology of truncated polynomials*, `arxiv:0707.4213`, 2007.

Ivanov A. A. BV-algebra structure on Hochschild cohomology of local algebras of quaternion type in characteristic 2.

This paper is a sequel of joint paper by the author with S. O. Ivanov, Yu. Volkov, and G. Zhou. In the present paper BV-structure, and therefore, Gerstenhaber algebra structure on Hochschild cohomology of local algebras of generalized quaternion type is completely described over a field of characteristic 2. The family of algebras under investigation contains group algebras of generalized quaternion groups for which the case of characteristic 2 is the only case when calculation of Hochschild cohomology and structures on it is a highly non-trivial problem. Also the group algebras of generalized quaternion groups represent classes of Morita-equivalence of tame group blocks from K. Erdmann's classification. So in particular BV-structure on Hochschild cohomology of group algebras of some non-commutative groups is described.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.a.ivanov.spb@gmail.com

Поступило 1 декабря 2014 г.