Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 430, 2014 г.

М. В. Грехов

ЦЕЛЫЕ МОДЕЛИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ НАД ПОЛЯМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

§1. Введение

Коротко напомним необходимые основные понятия, используемые при определении целых моделей алгебраических торов. Вначале условимся о дальнейших обозначениях. Пусть T – алгебраический тор, то есть связная диагонализируемая алгебраическая группа, k и L – соответственно основное поле (произвольное) и поле разложения T, $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ (здесь и далее будем рассматривать те случаи, когда L/k – расширение Галуа), $\widehat{T}$ – G-модуль характеров тора T. Пусть $d = \mathrm{rk}\ \widehat{T} = \dim\ T$, $[L : k] = |G| = n$. Координатное кольцо тора T тогда будет иметь вид $k[T] = L[\widehat{T}]^G$. Наконец, пусть $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ – какой-либо базис расширения L/k.

Известно (см. [1, 2, 3]), что существует функтор контравариантной эквивалентности ρ между категорией $\mathcal{T}$ алгебраических торов с основным полем k и полем разложения L и категорией $\mathcal{M}$ конечно порождённых G-модулей, ставящий каждому тору T в соответствие его модуль характеров $\widehat{T}$. Эта эквивалентность позволяет реализовать алгебраический тор в виде аффинного многообразия (более подробно см. в [2, 3]). Имеет место изоморфизм $L[\widehat{T}] \cong L \otimes L[\widehat{T}]^G \cong \bigoplus_{i=1}^{n}(L[\widehat{T}]^G\omega_i)$ (здесь $L[\widehat{T}]$ – групповое кольцо $\widehat{T}$). Он позволяет получить аффинную реализацию T в виде спектра рассматриваемой как кольцо k-алгебры, порождённой x_{ij}, y_{ij} – координатами при разложении базисных элементов модуля $\widehat{T}$ из множества $\{\chi_i\}$, $i = \overline{1, d}$ и обратных им $\{\chi_i^{-1}\}$ по базису $\omega_1, \ldots, \omega_n$, которое имеет следующий вид:

$$\chi_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\omega_j; \quad \chi_i^{-1} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\omega_j, \quad i = \overline{1, d}. \tag{1}$$

Известно (см. [2]), что $L[\widehat{T}]^G$ как k-алгебра порождена над k элементами x_{ij}, y_{ij} (поэтому в дальнейшем для краткости будем писать

Ключевые слова: алгебраические торы, линейные алгебраические группы, целые модели, модель Нерона.

$L[\widehat{T}]^G = k[x_{ij}, y_{ij}]$, хотя образующие этой алгебры, вообще говоря, алгебраически зависимы), её конструкция не зависит от выбора базисов $\widehat{T}$ и L/k, и на ней можно задать структуру алгебры Хопфа. Причём, так как $L[\widehat{T}]^G = k[T]$, где $k[T]$ – кольцо регулярных на торе функций, то $x_{ij}, y_{ij} \in L[\widehat{T}]^G$ могут быть выражены через координатные функции в аффинном пространстве $\mathbb{A}^m$ подходящей размерности m. Это и позволяет задать аффинную реализацию тора T в виде $T \cong \operatorname{Spec} k[x_1, x_2, \ldots, x_m]/\mathfrak{A}_T$, где $\mathfrak{A}_T$ – идеал T.

Определение 1. *R-моделью (или R-формой) T называется определённая над некоторым кольцом $R \subset k$ схема X такая, что $X \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} k \cong T$. В частности, для случая, когда k и L – поля арифметического типа, целой моделью называется модель над $\mathcal{O}_k \subset k$ – кольцом целых поля k.*

Понятно, что такому определению удовлетворяют самые разнообразные схемы, и интерес представляют те из них, которые обладают некоторыми выгодными свойствами. Классическими являются целые модели Нерона и Воскресенского, о которых пойдёт речь в следующем пункте.

§2. Основные целые модели алгебраического тора

Модель Нерона, подробно описанная в [4], является классической, так как всегда, по определению, обладает дополнительным свойством гладкости. Определяется она следующим образом.

Определение 2. *Пусть R – дедекиндова схема с кольцом рациональных функций K, X_K – гладкая приведённая K-схема конечного типа. Тогда моделью Нерона схемы X_K называется такая её R-модель X, которая является гладкой, приведённой, конечного типа и при этом удовлетворяет следующему свойству: для любой гладкой R-схемы Y любой K-морфизм $u_K : Y_K \to X_K$ (где $Y_K = Y \otimes_R K$) единственным образом продолжается до R-морфизма $u : Y \to X$.*

Очевидно, что под это определение подпадает случай, когда $X_K = T$ – алгебраический тор, $K = k$ – его основное поле, $R = \mathcal{O}_k$ – кольцо целых элементов k. Правда, определение не утверждает, в каких случаях схема X существует, но в [4] доказано, что она существует, когда K – произвольное локальное поле и когда K – глобальное поле характеристики 0, то есть во всех тех случаях, которые будут интересовать нас в данной работе. Также модель Нерона может не иметь конечного типа, в частности, известно (см. [4]), что она не имеет конечного типа для k-разложимых торов, но имеет конечный тип для k-анизотропных торов.

Ещё одним недостатком модели Нерона является то, что определение само по себе ещё не даёт алгоритма её построения. Общую рекомендацию читатель может найти в [4, 5].

В отличие от модели Нерона, модель Воскресенского (стандартная целая модель) изначально была определена конструктивным способом. Кроме того, она всегда обладает рядом полезных дополнительных свойств, например, свойствами строгой плоскости и перестановочности с этальной заменой базиса, но, вообще говоря, не обладает свойством гладкости.

Изначально (см. [1, 2]) модель Воскресенского определяется для случая, когда поле k локальное. Её конструкция тесно связана с конструкцией аффинной реализации алгебраического тора. В случае локальных полей базис $\omega_1, \dots, \omega_n$ расширения L/k можно выбрать целым. Если после этого рассмотреть не алгебру $k[x_{ij}, y_{ij}]$, описанную в пункте 1, а построенную аналогичным способом алгебру $\mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, то оказывается, что она также имеет конструкцию алгебры Хопфа, а также не зависит от выбора базиса $\widehat{T}$ и целого базиса L/k. При этом спектр этой алгебры является целой моделью T, так как $k \otimes \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}] \cong k[x_{ij}, y_{ij}]$.

Определение 3. *В условиях обозначений, введённых ранее, аффинная групповая схема $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$ называется стандартной целой моделью (моделью Воскресенского) тора T.*

Из определения следует, что при фиксированных основном поле k и поле разложения L алгебраического тора существует взаимно однозначное соответствие между группой $\widehat{T}$ и алгеброй Хопфа $\mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, поэтому последнюю также обозначают $A(\widehat{T})$. В конкретных примерах в качестве локальных полей обычно рассматривают поля p-адических чисел или их конечные расширения.

Возникает вопрос, как можно обобщить конструкцию модели Воскресенского на случай глобального поля. Мы сосредоточим своё внимание на случае, когда k и L – поля алгебраических чисел (хотя, вообще говоря, существуют и другие глобальные поля арифметического типа). Набросок рассуждения, дающего необходимый объект, приводится в [1], проведём это рассуждение в более развёрнутом виде.

Пусть в условиях тех же обозначений, что и ранее, k – поле алгебраических чисел, $\mathcal{O}_k$ и $\mathcal{O}_L$ – кольца целых элементов k и L соответственно. Для каждого простого идеала $\wp \subset \mathcal{O}_k$ пополнение поля k по $\wp$-адическому показателю будет давать локальное поле $k_\wp$. При этом в $\mathcal{O}_L$ можно взять такой простой идеал $\mathfrak{P}|\wp$, что пополнение L по показателю, задаваемому этим идеалом, будет давать локальное поле $L_\mathfrak{P}$, $k_\wp \subset L_\mathfrak{P}$ (известно (см. [6]), что тот же результат можно получить, взяв минимальное расширение $k_\wp$, содержащее L).

Далее, рассмотрим тор $T \otimes_k k_\wp$. Можно считать, что $\widehat{T}$ является группой характеров и для тора T, и для $T_\wp = T \otimes_k k_\wp$. Тогда к тору $T_\wp$ с расширением $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ и группой Галуа $G_\wp$ можно применить конструкцию модели Воскресенского для локальных полей, получив алгебру Хопфа $A_\wp(\widehat{T})$ (обозначим её $B_\wp$). Спектр этой алгебры Хопфа (обозначим его $X_\wp$) будет целой моделью Воскресенского тора $T \otimes_k k_\wp$. Из определения модели Воскресенского следует, что $B_\wp \subset L_\mathfrak{P}[\widehat{T}]^{G_\wp} \cong k_\wp[T]$. Заметим, что кольцо инвариантов $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L[\widehat{T}]^G)$ является $\mathcal{O}_k$-формой T, так как $Y \otimes_{\mathcal{O}_k} k \cong T$. Причём для всех точек $\wp$, неразветвлённых в L, выполняется $X_\wp = Y_\wp$. Для всех простых идеалов $\wp \subset \mathcal{O}_k$ обозначим $C_\wp = B_\wp \cap k[T]$ и рассмотрим $C = \cap_\wp C_\wp$. Поясним строение этого объекта.

Как уже говорилось выше, $B_\wp = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{uv}^{(\wp)}, y_{uv}^{(\wp)}]$, где $x_{uv}^{(\wp)}, y_{uv}^{(\wp)}$ – координаты при разложении по базису $L_\mathfrak{P}/k_\wp$ (обозначим его $\omega_v^{(\wp)}$, $v = \overline{1,m}$, где $m = [L_\mathfrak{P} : k_\wp]$) базисных характеров модуля $\widehat{T}$ и обратных им, а $k[T] \cong k[x_{ij}, y_{ij}]$, где x_{ij}, y_{ij} – координаты при разложении базисных характеров по базису $\{\omega_j\}$, $j = \overline{1,n}$ расширения L/k. В таком случае C будет алгеброй Хопфа над $\mathcal{O}_k$. Из конструкции C также следует, что $\mathcal{O}_L[\widehat{T}]^G \subset C$, поэтому $X = \mathrm{Spec}\ C$ является $\mathcal{O}_k$-формой (то есть целой моделью) T.

Определение 4. *Аффинную схему $X = \mathrm{Spec}\ C$ будем называть канонической целой моделью тора T, определённого над полем алгебраических чисел.*

Основным недостатком такого подхода является то, что определение C не даёт способа её построения. Этого недостатка не имеет ещё одна целая модель тора над полем алгебраических чисел, предложенная в работе [7]. Она определяется следующим образом.

Определение 5. *Стандартной целой моделью алгебраического тора T, определённого над полем алгебраических чисел k, называется $\mathcal{O}_k$-схема вида $X^{'} = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, где x_{ij}, y_{ij} – координаты при разложении базисных характеров модуля $\widehat{T}$ и обратных им по базису L/k.*

Следует заметить, что изначально в работе [7] базовым было альтернативное, более сложное определение этой модели, так как на тот момент не было известно, всегда ли у расширения L/k в условиях данных обозначений существует целый базис. Однако позднее в работе [8] было доказано, что для любого расширения L/k полей алгебраических чисел существует некоторое конечное нормальное расширение F/L такое, что F будет иметь целый базис над k. В нашем случае F можно считать некоторым (не обязательно минимальным) полем разложения тора T и использовать его для построения рассматриваемой алгебры Хопфа. Это позволяет ограничиться приведённым выше определением стандартной целой модели.

Таким образом, именно эту модель для торов, определённых над полями алгебраических чисел, можно рассматривать как перенос конструкции стандартной целой модели для торов, определённых над локальными полями, на случай глобального поля. Соответственно, она может быть построена по такому же алгоритму.

Возникает задача сравнения стандартной и канонической целой модели тора, определённого над полем алгебраических чисел. На данный момент вопрос о том, в каких случаях они представляют собой один и тот же объект, а в каких различные, остаётся открытым.

Далее объясним, почему построение одной из рассмотренных целых моделей (стандартной или канонической) алгебраического тора позволяет построить модель Нерона этого тора.

§3. Построение модели Нерона алгебраического тора

Способ построения модели Нерона, который, как уже говорилось выше, не следует непосредственно из её определения, был впервые описан в [4]. В интересующем нас аффинном случае он состоит в том, что модель Нерона может быть получена за конечное число шагов (называемых вместе процессом сглаживания) путём последовательных дилатаций в особых точках из некоторой аффинной групповой схемы. Позднее в [5] было доказано, что для случая локального поля в качестве такой аффинной схемы может использоваться модель Воскресенского рассматриваемого алгебраического тора над локальным полем. В этом случае каждая дилатация модели Воскресенского $X = \mathrm{Spec}\, A(\widehat{T})$, $A(\widehat{T}) \subset k[t_1, \ldots, t_n]$ в особой точке $a = (a_1; \ldots; a_n)$ представляет собой замену переменных вида $t_i = \pi t_i^{(1)} + a_i$, $i = \overline{1, n}$, где π – униформизующий элемент основного поля k, с последующим сокращением всех задающих X уравнений на максимально возможные степени π.

В [4] говорится и о построении модели Нерона над глобальным полем характеристики 0 (то есть в нашем случае над полем алгебраических чисел). А именно, доказано следующее. Если рассматривать алгебраический тор T и его модель Нерона X как схемы в общем смысле теории схем, а модели Нерона $X_{\mathcal{O}_k}$ тора T_k, определённого над глобальным полем k, и $X_{\mathcal{O}_{k_\wp}}$ каждого тора $T \otimes_k k_\wp$, определённого над локальным полем $k_\wp$ – как слои этих схем над соответствующими полями и их кольцами целых, то $X_{\mathcal{O}_k}$ является моделью Нерона тора T_k тогда и только тогда, когда каждая $X_{\mathcal{O}_{k_\wp}}$ является моделью Нерона тора $T \otimes_k k_\wp$. Это даёт алгоритм получения модели Нерона для тора T_k над полем алгебраических чисел k: если взять каноническую целую модель Воскресенского этого тора, то она по построению соответствует слою над k такой схемы, для которой слои над $k_\wp$ представляют собой модели Воскресенского торов $T_k \otimes_k k_\wp$ над локальными полями. Для каждого тора $T_k \otimes_k k_\wp$ можно построить его модель Нерона на основе модели Воскресенского этого тора, которая была задана вместе с канонической целой моделью тора T_k. Если после этого к стандартной целой модели X_k тора T_k применить совокупность всех дилатаций, использованных при построении моделей Нерона торов $T_k \otimes_k k_\wp$, полученная модель в каждом слое над локальным полем будет соответствовать модели Нерона соответствующего тора и поэтому сама будет являться моделью Нерона тора T_k над полем алгебраических чисел.

Подобный алгоритм имеет тот недостаток, что в результате невозможно получить явное задание полученной модели Нерона, так как такое задание неизвестно для канонической модели Воскресенского. Поэтому возникает идея использовать вместо неё стандартную целую модель Воскресенского над полем алгебраических чисел. Однако имеет место следующее препятствие. Если снова рассматривать целую модель X как схему, слоями которой являются $X_{\mathcal{O}_k}$ над кольцом целых поля алгебраических чисел и $X_{\mathcal{O}_{k_\wp}}$ над кольцами целых локальных полей, то в случае стандартной модели, в отличие от канонической, $X_{\mathcal{O}_{k_\wp}} = \operatorname{Spec} A^{'}(\widehat{T})$, где $A^{'}(\widehat{T}) = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$. То есть $X_{\mathcal{O}_{k_\wp}}$, вообще говоря, не являются моделями Воскресенского, а являются некоторыми целыми моделями того же тора, ранее не рассматривавшимися. Поэтому требуется доказать, что они подходят в качестве начальных схем для применения процесса сглаживания, приводящего к построению моделей Нерона торов $T_k \otimes_k k_\wp$.

Сформулированное в [5] достаточное условие, которому должна для этого удовлетворять аффинная схема X, состоит в том, что её группа $\mathcal{O}_{k_\wp}$-точек $X(\mathcal{O}_{k_\wp})$ должна совпадать с максимальной компактной подгруппой группы $k_\wp$-точек тора T (обозначим её $U \subset T(k_\wp)$). Схема вида $X^{'}_{\mathcal{O}_{k_\wp}} = \operatorname{Spec} A^{'}(\widehat{T})$ обладает этим свойством, что будет доказано вместе с другими свойствами стандартной модели Воскресенского и соответствующих ей моделей над локальным полем в следующем пункте.

§4. Свойства стандартной целой модели над полем алгебраических чисел и соответствующих ей моделей над локальным полем

Докажем несколько используемых в дальнейшем свойств стандартной целой модели над полем алгебраических чисел. Как будет показано далее, они в значительной степени повторяют свойства модели Воскресенского над локальным полем, подробно изученные в [2], хотя доказательство некоторых из них придётся модифицировать.

Так как мы будем работать только со стандартной целой моделью над полем алгебраических чисел и её слоями над локальными полями, для краткости изменим использовавшиеся обозначения. Далее в данной работе будем обозначать X стандартную целую модель алгебраического тора над полем алгебраических чисел, $A(\widehat{T})$ – алгебру Хопфа, спектром которой является эта модель, $X_\wp$ – индуцируемые ею модели над локальными полями.

Первое из необходимых свойств тривиально.

Предложение 1. *Если для алгебраических торов S, T с одинаковыми основным полем k и полем разложения L определён G-эпиморфизм (где $G = \operatorname{Gal}(L/k)$) G-модулей характеров $\beta : \widehat{S} \to \widehat{T}$, то алгебра Хопфа $A(\widehat{T})$, спектр которой является моделью Воскресенского тора T,* *может быть получена как* $A(\widehat{S})/I$*, где* $I = A(\widehat{S}) \cap \operatorname{Ker} \beta_k$*,* $A(\widehat{S})$ *– аналогичная алгебра Хопфа для* S*, а* $\beta_k : k[S] \to k[T]$ *– морфизм колец регулярных функций, индуцированный* β*.*

Доказательство дословно переносится со случая локального поля. Это свойство позволяет исследовать алгебраические торы и их свойства, а также проводить построение их аффинной реализации с помощью нахождения подходящего S из формулировки утверждения, обычно это какой-либо квазиразложимый тор.

Далее аналогично [2] исследуем стандартную целую модель простейшего квазиразложимого тора над полем алгебраических чисел.

Пусть тор T – простейший квазиразложимый, то есть $T = R_{F/k}(G_m)$ (не обязательно $F = L$). Тогда в группе характеров $\widehat{T}$ базис $\chi_1, \ldots, \chi_d$, где $d = \operatorname{rk} \widehat{T}$, можно выбрать перестановочным, далее будем считать, что он перестановочный. Пусть $G_1 \subset G$ – стабилизатор базисного характера χ_1. Тогда $\widehat{T} \cong \mathbb{Z}[G/G_1]$, $F = L^{G_1}$ и справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *В условиях введённых ранее обозначений модель Воскресенского над полем алгебраических чисел простейшего квазиразложимого тора* $T = R_{F/k}(G_m)$ *имеет вид*

$$X = \operatorname{Spec} \quad \mathcal{O}_k[x_1, x_2, \ldots, x_n, y^{-1}],$$

где y *– некоторая форма степени* n *от переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*.*

Доказательство. Так как базис $\widehat{T}$ выбран перестановочным, все базисные характеры выражаются через χ_1 в виде $\chi_i = \chi_1^{\delta_i}$, $\delta_i \in G$, а следовательно, если $\chi_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \omega_j$, то $\chi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \omega_j^{\delta_i}$ (здесь полагаем $x_j := x_{1j}$). Заменяя каждый коэффициент $\omega_j^{\delta_i} \in L$ его разложением по базису L/k, получаем, что коэффициенты при разложении по базису всех χ_i, $i \neq 1$, полиномиально выражаются через коэффициенты χ_1. Аналогично коэффициенты всех χ_i^{-1} выражаются через коэффициенты χ_1^{-1}. Следовательно, целая модель T имеет вид $X = \operatorname{Spec} A(\widehat{T})$, где $A(\widehat{T}) = \mathcal{O}_k[x_j, y_j]$. Однако остаётся вопрос, выражаются ли коэффициенты χ_1^{-1} через коэффициенты χ_1. Рассмотрим характер $\chi = \chi_1 \chi_2 \ldots \chi_d$, где $d = \dim T$. Так как G действует на базисе $\widehat{T}$ перестановками, то очевидно, что $\chi \in (\widehat{T})^G$.

Из известного соотношения $L[\widehat{T}] = \bigoplus_{i=1}^{n}(L[\widehat{T}]^G\omega_i)$ следует, что $\chi = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\omega_i$, где $f_i \in k[T]$, а $\{\omega_i\}$ – какой-либо базис L/k. В частности, этот базис можно выбрать так, чтобы $\omega_1 = 1$, тогда $\omega_i \notin k$, $i > 1$ (возможно, выбранный базис не будет целым, но здесь это несущественно). Вместе с условием $\chi \in (\widehat{T})^G$ это означает, что $\chi = f_1 \cdot 1$. Пусть теперь $\{\xi_i\}$ – целый базис L/k. Элемент $1 = 1_L = 1_k$ имеет некоторое разложение по этому базису: $1 = \sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i$, причём $\forall i = \overline{1,n}$ $c_i \in \mathcal{O}_k$, так как базис $\{\xi_i\}$ целый. Отсюда $\chi = f_1 \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\omega_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f_1c_i\omega_i$. Причём, так как это разложение χ по целому базису L/k, выполняется условие $f_1c_i \in A(\widehat{T})$ $\forall i = \overline{1,n}$. Если бы при этом имело место $f_1 \notin A(\widehat{T})$, то есть $f_1 = gh^{-1}$, $g \in A(\widehat{T})$, $h \in \mathcal{O}_k$, то должно было бы выполняться $h \mid c_i$ $\forall i = \overline{1,n}$, но это невозможно, так как c_i являются коэффициентами при разложении элемента 1 по базису L/k и поэтому взаимно просты в совокупности. Следовательно, $f_1 \in A(\widehat{T})$. Так как элемент 1 обратен сам себе в L, то можем записать $f_1 = \chi \cdot 1$, так как оба сомножителя полиномиально выражаются через $\{x_{1j}\}$ над L, то f_1 является некоторой формой от переменных x_{1j}. В силу того, что $\chi \in \widehat{T}$, имеет место аналогичное разложение для обратного характера: $\chi^{-1} = g_1 \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\omega_i$, $g_1 \in A(\widehat{T})$. Если после этого рассмотреть очевидное равенство $\chi_1^{-1} = \chi_2\chi_3\cdots\chi_d\chi^{-1}$, то его можно переписать в виде $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\omega_j = (\prod\limits_{i=2}^{d}(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\omega_j^{\delta_i})) \cdot g_1 \cdot (\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\omega_i)$. Раскрыв скобки и заменив сомножители $\omega_j^{\delta_i}\omega_i$ их разложением по базису, получаем, что все y_j полиномиально выражаются через образующие x_j, $j = \overline{1,n}$, и g_1. Обозначив $f_1 = y$, $g_1 = y^{-1}$, можем окончательно записать $X = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_k[x_1, x_2, \ldots, x_n, y^{-1}]$. Предложение доказано. □

Теперь докажем свойство замкнутых вложений, также аналогичное свойству модели Воскресенского над локальным полем.

Предложение 3. *Пусть T_1, T_2 – k-торы, разложимые над полем L, такие, что существует эпиморфизм модулей характеров $\beta : \widehat{T_1} \to \widehat{T_2}$ (он индуцирует вложение самих торов $\alpha : T_2 \to T_1$ и эпиморфизм групповых колец $\beta_L : L[\widehat{T_1}] \to L[\widehat{T_2}]$). Тогда модель Воскресенского тора T_2 имеет вид $X = \mathrm{Spec}\ (A(\widehat{T_1})/I)$, где $I = J \cap A(\widehat{T_1})$, J – идеал* *в алгебре Хопфа* $k[T_1]$, *порождённый элементами* $(x_{ij} - c_j)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $I \equiv J$ *по модулю* π-*кручения.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $a \in \operatorname{Ker} \beta_L$, он имеет некоторое разложение по базису $\widehat{T}$ вида $a = \sum_{i=1}^d a_i\chi_i$, отсюда выполняется следующее равенство: $0 = \beta_L(a) = \beta_L(\sum\limits_{i=1}^{d} a_i\chi_i) = \sum\limits_{i=1}^{d} a_i\beta_L(\chi_i)$. Выделим во множестве базисных характеров $\{\chi_i\}$, $i = \overline{1,d}$ подмножества, соответствующие одинаковым значениям $\beta_L(\chi_i)$, и на их основе перенумеруем χ_i двойными индексами вида χ_{ij} так, что $\forall\ j_1, j_2\ \beta_L(\chi_{ij_1}) = \beta_L(\chi_{ij_2}) = \xi_i$. тогда предыдущее равенство принимает вид $0 = \sum\limits_i (\sum\limits_j a_{ij})\xi_i$. Так как при эпиморфизме линейно независимые элементы переходят в линейно независимые (а теперь они сгруппированы так, что все ξ_i различны), то из этого следует $\forall i \sum\limits_j a_{ij} = 0$.

Имеющееся выражение для a можно преобразовать следующим образом: $a = \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij}\chi_{ij} = \sum\limits_i \chi_{i1}(\sum\limits_j a_{ij}\chi_{ij}\chi_{i1}^{-1})$. Поскольку

$$\beta_L(\chi_{i1})\beta_L(\chi_{i1}^{-1}) = \beta_L(\chi_{i1}\chi_{i1}^{-1}) = 1, \quad \text{то} \quad \beta(\chi_{i1}^{-1}) = \xi_i^{-1},$$

следовательно, получаем $\beta_L(\chi_{ij}\chi_{i1}^{-1}) = \beta_L(\chi_{ij})\beta_L(\chi_{i1}^{-1}) = \xi_i\xi_i^{-1} = 1$, отсюда $\chi_{ij}\chi_{i1}^{-1} \in \operatorname{Ker} \beta$.

Так как доказано, что $\sum\limits_j a_{ij} = 0$, то $a_{i1} = -\sum\limits_{j\geqslant 2} a_{ij}$. Тогда можно записать $\sum\limits_j a_{ij}\chi_{ij}\chi_{i1}^{-1} = a_{i1} + \sum\limits_{j\geqslant 2} a_{ij}\chi_{ij}\chi_{i1}^{-1} = -\sum\limits_{j\geqslant 2} a_{ij} + \sum\limits_{j\geqslant 2} a_{ij}\chi_{ij}\chi_{i1}^{-1} = \sum\limits_{j\geqslant 2} a_{ij}(\chi_{ij}\chi_{i1}^{-1} - 1)$.

Очевидно, что $\forall \chi \in \operatorname{Ker} \beta$ выполняется $(\chi - 1) \in \operatorname{Ker} \beta_L$. Это вместе с предыдущим соотношением означает, что $\operatorname{Ker} \beta_L$ является идеалом Хопфа, порождённым над L элементами вида $\chi - 1$, где $\chi \in \operatorname{Ker} \beta$.

Продолжим рассмотрение структуры $\operatorname{Ker} \beta_L$. Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_m$ – базис $\operatorname{Ker} \beta$ как G-модуля. Тогда произвольный характер $\chi \in \operatorname{Ker} \beta$ будет иметь разложение $\chi = \chi_1^{a_1}\chi_2^{a_2}\ldots\chi_m^{a_m}$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Так как мы рассматриваем нетривиальный элемент ядра, то есть $\chi \neq 1$, то $\exists\, i: \ a_i \neq 0$. Пусть $a_1 \neq 0$. Тогда для элемента $(\chi - 1) \in \operatorname{Ker} \beta_L$ имеет место равенство $\chi - 1 = \chi_1^{a_1}\chi_2^{a_2}\ldots\chi_m^{a_m} - 1 = \chi_1^{a_1}(\chi_2^{a_2}\ldots\chi_m^{a_m} - 1) + (\chi_1^{a_1} - 1)$. Если $a_1 > 0$, то можно выразить $\chi_1^{a_1} - 1 = (\chi_1 - 1)(\chi_1^{a_1-1} + \chi_1^{a_1-2} + \cdots + 1)$, если $a_1 < 0$, то $\chi_1^{a_1} - 1 = (\chi_1^{-1} - 1)(\chi_1^{a_1+1} + \chi_1^{a_1+2} + \dots + 1) = -\chi_1^{-1}(\chi_1 - 1)(\chi_1^{a_1+1} + \chi_1^{a_1+2} + \dots + 1)$. Повторяя процесс для всех $a_i \neq 0$, получаем, что $\mathrm{Ker}\,\beta_L$ как идеал Хопфа порождено над L элементами вида $\chi_i - 1$, $i = \overline{1,m}$.

Пусть теперь $\chi \in \widehat{T}_1$ – произвольный характер и $\xi = \beta(\chi)$. Тогда при замене χ его разложением по базису L/k имеет место выражение $\xi = \beta(f_1\omega_1 + \dots + f_n\omega_n) = \beta(f_1)\omega_1 + \dots + \beta(f_n)\omega_n$, где $f_i \in L[\widehat{T}_1]^G$, а значит, $\beta(f_i) \in L[\widehat{T}_2]^G$. Следовательно, это выражение является разложением по тому же базису L/k характера $\xi = \beta(\chi)$, то есть коэффициенты при разложении χ по базису под действием β переходят в координаты при разложении $\beta(\chi)$.

Пусть $\mathrm{rk}\,\widehat{T}_2 = d$, тогда $\mathrm{rk}\,\widehat{T}_1 = m + d$ и для $\widehat{T}_1$ можно выбрать такой базис $\chi_1, \dots, \chi_{m+d}$, что $\beta(\chi_1) = \dots = \beta(\chi_m) = 1$, $\beta(\chi_{m+i}) = \xi_i$, $i = \overline{1,d}$, где $\{\xi_i\}$ – базис $\widehat{T}_2$. При этом в силу предыдущего замечания образующие колец $A(\widehat{T}_1)$ и $k[T_1]$, получаемые при разложении характеров из базиса $\{\chi_j\}$, переходят в образующие колец $A(\widehat{T}_2)$ и $k[T_2]$, получаемые при разложении характеров из базиса $\{\xi_i\}$. Поэтому эпиморфизм β определяет также связанные с ним изоморфизмы $\beta_k : k[T_1] \to k[T_2]$ и $\beta_{\mathcal{O}_k} : A(\widehat{T}_1) \to A(\widehat{T}_2)$.

Пусть разложение по базису L/k базисных характеров χ_i, $i = \overline{1,m}$ имеет вид $\chi_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}\omega_j$, а разложение $1_L \in L[\widehat{T}_1]$ имеет вид $1 = \sum_{j=1}^n c_j\omega_j$, причём $x_{ij} \in \mathcal{O}_k$, $c_j \in \mathcal{O}_k$, так как базис $\{\omega_j\}$ целый. Тогда для любого характера вида $(\chi_i - 1) \in \mathrm{Ker}\,\beta_L$ имеет место следующее равенство: $0 = \beta_L(\chi_i - 1) = \beta_L(\sum\limits_{j=1}^n x_{ij}\omega_j) - \beta_L(\sum\limits_{j=1}^n c_j\omega_j) = \sum\limits_{j=1}^n \beta_L(x_{ij} - c_j)\omega_j = \sum\limits_{j=1}^n \beta_k(x_{ij} - c_j)\omega_j$. Это равносильно тому, что $\forall\, j = \overline{1,n}$ $(x_{ij} - c_j) \in \mathrm{Ker}\,\beta_k \subset \mathrm{Ker}\,\beta_L$.

При этом то же равенство означает, что образующие идеала $\mathrm{Ker}\,\beta_L$ вида $\chi_i - 1$, $i = \overline{1,m}$ линейно над $\mathcal{O}_L$ выражаются через элементы вида $(x_{ij} - c_j)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Значит, в качестве образующих идеала можно взять эти элементы. Причём, будучи также элементами $\mathrm{Ker}\,\beta_k$, они G-инвариантны.

Рассмотрим произвольный элемент $a \in \mathrm{Ker}\,\beta_k$. Так как $\mathrm{Ker}\,\beta_k \subset \mathrm{Ker}\,\beta_L$, то $a \in \mathrm{Ker}\,\beta_L$ и выражается через выбранные образующие, принимая вид $a = \sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{j=1}^n (x_{ij} - c_j)f_{ij}$, где $f_{ij} \in L[\widehat{T}_1]$. Дополним $1 \in k$

до базиса L/k. Хотя такой базис может не совпадать с базисом ω_j и не быть целым, но разложение, аналогичное (1), для него существует. Обозначим этот базис через η_j. Раскладывая f_{ij} по выбранному базису, получим $a = \sum\limits_{l=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_{ij}-c_j))f_{ij}^{\,l}\eta_l$, где $f_{ij}^{\,l} \in k[T_1]$. Пусть $\eta_1 = 1$. Тогда так как $a \in \operatorname{Ker}\beta_k$, то в полученном разложении a ненулевым будет только компонент, соответствующий η_1. Это означает, что $a = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_{ij}-c_j))f_{ij}^{\,1}\eta_1$. В силу произвольности a получаем, что $\operatorname{Ker}\beta_k$ как идеал Хопфа в алгебре $k[T_1]$ порождён элементами вида $x_{ij}-c_j$.

Интересующий нас идеал I при этом имеет вид $I = A(\widehat{T}_1)\cap\operatorname{Ker}\beta_k$. Предложение доказано. $\square$

Замечание 1. Вновь вернёмся к слою $X_\wp = X\times_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_k}\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{k_\wp}$. Утверждения предложений 1 – 3 выполняются также и для целых моделей вида $X_\wp = \operatorname{Spec} A_\wp(\widehat{T})$, где $A_\wp(\widehat{T}) = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$, так как $\mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}] = \mathcal{O}_{k_\wp}\otimes_{\mathcal{O}_k}\mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$. Те отличия, что ω_j в расширениях локальных полей является не базисом, а системой образующих, и что относительно действия $G_\wp$ на $\widehat{T}$ по сравнению с действием G на $\widehat{T}$ каждой орбите сооответствует некоторое дизъюнктное объединение орбит, как можно проверить, не меняют доказательство, так как эти отличия в структуре $\widehat{T}$ нигде не используются.

Докажем ещё одно свойство, которое сформулируем только для $X_\wp$.

Предложение 4. *В условиях ранее введённых обозначений группа $\mathcal{O}_{k_\wp}$-точек $X(\mathcal{O}_{k_\wp})$ схемы $X_\wp = \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$ совпадает с максимальной компактной подгруппой U группы $k_\wp$-точек $T_\wp(k_\wp)$ тора $T_\wp$.*

Доказательство. Напомним, что коэффициенты x_{ij}, y_{ij} берутся из разложений по формуле (1) базисных характеров $\widehat{T}$ и обратных им, имеющих вид $\chi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}\omega_j$, $\chi_i^{-1} = \sum\limits_{j=1}^{n} y_{ij}\omega_j$.

Вначале докажем, что доказываемое свойство выполняется для случая простейшего квазиразложимого тора, то есть для

$$T_\wp = R_{L_\mathfrak{P}/k_\wp}(G_m).$$

Для этого тора известно (см. [2]), что $T_\wp(k_\wp) = L_{\mathfrak{P}}^\times$, а $U = \mathcal{O}_{L_{\mathfrak{P}}}^\times$ и по определению $X(\mathcal{O}_{k_\wp}) = Hom(A_\wp(\widehat{T}), \mathcal{O}_{k_\wp})$. Относительно структуры $A_\wp(\widehat{T})$ известно (см. замечание перед формулировкой предложения), что $\mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}] = \mathcal{O}_{k_\wp}[x_{1j}, y^{-1}]$, где y – некоторая форма от переменных x_{1j}, причём имеет место выражение $y \cdot 1_L = \prod_{j=1}^n \chi_1^{\delta_j}$, где $\delta_1 = 1$.

Возьмём произвольный гомоморфизм $\psi \in X(\mathcal{O}_{k_\wp})$. Его можно задать значениями на образующих алгебры $A_\wp(\widehat{T})$, пусть $\psi(x_{1j}) = a_j$, $a_j \in \mathcal{O}_{k_\wp}$ (значение на y^{-1} выражается через них и его задавать не нужно). Рассмотрим элемент $\alpha = \sum_{j=1}^n a_j\omega_j$. По построению $\alpha \in \mathcal{O}_{L_{\mathfrak{P}}}$. Тогда из выражения для y и задания ψ, приведённых выше, следует, что если $[L_{\mathfrak{P}} : k_\wp] = [L : k]$, то $\psi(y) = N_{L_{\mathfrak{P}}/k_\wp}(\alpha) \in \mathcal{O}_{k_\wp}$, если же $[L_{\mathfrak{P}} : k_\wp] < [L : k]$ и $\mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/k_\wp) \subset \mathrm{Gal}(L/k)$, то $\psi(y) = (N_{L_{\mathfrak{P}}/k_\wp}(\alpha))^c$, где $[L : k] = c \cdot [L_{\mathfrak{P}} : k_\wp]$, $c \in \mathbb{N}$, и снова $\psi(y) \in \mathcal{O}_{k_\wp}$. Причём значение $\psi(y^{-1})$ также определено и лежит в $\mathcal{O}_{k_\wp}$, следовательно, $\psi(y) \in \mathcal{O}_{k_\wp}^\times$ и отсюда $\alpha \in \mathcal{O}_{L_{\mathfrak{P}}}^\times$.

Таким образом, $X(\mathcal{O}_{k_\wp}) \subset \mathcal{O}_{L_{\mathfrak{P}}}^\times$. Обратно, возьмём произвольный обратимый элемент кольца $\mathcal{O}_{L_{\mathfrak{P}}}$. Пусть его разложение по системе образующих ω_j имеет вид $\alpha = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\omega_j$. Так как он обратим, то

$$N_{L_{\mathfrak{P}}/k_\wp}(\alpha) \in \mathcal{O}_{k_\wp}^\times$$

и для любого $c \in \mathbb{N}$ также $(N_{L_{\mathfrak{P}}/k_\wp}(\alpha))^c \in \mathcal{O}_{k_\wp}^\times$. Тогда можно рассмотреть гомоморфизм $\psi \in X(\mathcal{O}_{k_\wp})$ такой, что $\psi(x_{1j}) = a_j$, $a_j \in \mathcal{O}_{k_\wp}$, и по построению это будет $\mathcal{O}_{k_\wp}$-гомоморфизм.

Далее, докажем утверждение для произвольного тора такого, что он вкладывается в простейший квазиразложимый тор $R_{F_{\mathfrak{P}}/k_\wp}(G_m)$. В этом случае аналогично предложениям 1 и 3 (см. замечание перед формулировкой предложения) известно, что определён эпиморфизм $\beta_{\mathcal{O}_{k_\wp}} : A_\wp(\widehat{S}) \to A_\wp(\widehat{T})$. Любой гомоморфизм $A_\wp(\widehat{T}) \to \mathcal{O}_{k_\wp}$ однозначно продолжается до гомоморфизма $k_\wp[T_\wp] \to k_\wp$. Отсюда имеем вложение $X(\mathcal{O}_{k_\wp}) \to T(k_\wp)$. Группа $X(\mathcal{O}_{k_\wp})$ компактна, поэтому $X(\mathcal{O}_{k_\wp}) \subset U$. Как было доказано выше, $X_S(\mathcal{O}_{k_\wp})$ (где $X_S = \mathrm{Spec}\ A_\wp(\widehat{S})$) совпадает с максимальной компактной подгруппой $U_S \subset S(k_\wp)$. Так как эпиморфизм $\beta : \widehat{S} \to \widehat{T}$ индуцирует вложение $\alpha : T_\wp \to S_\wp$, то можно утверждать, что $U = T_\wp(k_\wp) \cap X_S(\mathcal{O}_{k_\wp})$. Докажем, что $U = X(\mathcal{O}_{k_\wp})$, одно из двух вложений уже доказано.

Пусть $u \in U$, тогда $u \in T_\wp(k_\wp) = Hom(k_\wp[T_\wp], k_\wp)$ и отсюда $u \circ \beta = \alpha(u) \in Hom(k_\wp[S_\wp], k_\wp)$. Тогда, так как ограничение $u \circ \beta$ на $A(\widehat{S})$ будет лежать в $X_S(\mathcal{O}_{k_\wp})$, то $u \circ \beta(A(\widehat{S})) = u(A(\widehat{T})) = \mathcal{O}_{k_\wp}$. Отсюда $u \in X(\mathcal{O}_{k_\wp})$, то есть $U \subset X(\mathcal{O}_{k_\wp})$.

Наконец, докажем утверждение для произвольного тора, который не может быть вложен в $R_{F_\mathfrak{P}/k_\wp}(G_m)$. В этом случае известно (см. [2]), что он вкладывается в квазиразложимый тор вида

$$S = \prod_{i=1}^{t} R_{F_{\mathfrak{P}_i}/k_\wp}(G_m),$$

где $F_{\mathfrak{P}_i} \subset L_\mathfrak{P}$ – некоторые промежуточные поля. Повторяя дословно для каждого компонента доказательство предыдущего случая, получаем, что утверждение предложения выполняется. Предложение доказано. $\square$

Как уже говорилось выше, такое свойство $X_\wp$ даёт возможность использовать её в качестве начального шага при построении модели Нерона над локальным полем аналогично стандартной модели Воскресенского.

Закончив рассмотрение интересующих нас свойств моделей Воскресенского, перейдём к разбору конкретной задачи, в решении которой эти модели используются, а именно к построению модели Нерона максимального тора без аффекта в полупростой группе. Об этом будет рассказано в следующем пункте.

§5. Модель Нерона максимального алгебраического тора без аффекта в полупростой группе для случая системы корней B_n

Рассмотрим один из случаев задачи о построении модели Нерона максимального тора без аффекта в полупростой группе. Вначале объясним постановку задачи.

Как уже говорилось выше, модель Нерона является канонической гладкой целой моделью алгебраического тора, чем и обусловлен интерес к ней. Но можно поставить и более узкую задачу: построение модели Нерона в случаях, когда рассматривается семейство алгебраических торов, имеющих какую-нибудь специфическую, неслучайную, но при этом нетривиальную структуру. В таких случаях можно ожидать появления заслуживающей отдельного исследования закономерности также в структуре их моделей Нерона.

В частности, к таковым относятся максимальные торы без аффекта в полупростых группах. Они обладают действительно неслучайной структурой и из-за того, что очень специфические условия наложены на их группы Галуа, и по самой их природе. Напомним основные сведения о максимальных торах без аффекта.

В любом евклидовом пространстве E можно задать систему корней – систему векторов $\Phi = \{\varepsilon_i\}, i \in I$, порождающую E и удовлетворяющую ряду специальных свойств (подробно этот объект и его свойства описываются, например, в [9]), из которых сейчас существенно только то, что она инвариантна относительно всех отражений σ_{ε_i}, задаваемых её векторами (здесь σ_{ε_i} – такое отражение, которое переводит ε_i в $-\varepsilon_i$). Классификация неприводимых систем корней известна и совпадает с классификацией простых алгебр Ли конечной размерности. Подгруппа группы автоморфизмов пространства E, порождённая всеми отражениями $\sigma_{\varepsilon_i}, i \in I$, называется группой Вейля системы корней Φ и обозначается $W(\Phi)$. На Φ она действует перестановками.

Системы корней можно связать с алгебраическими торами следующим образом. Пусть G – полупростая связная алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ – её алгебра Ли. В G всегда существует максимальный алгебраический тор T, пусть $\mathfrak{h}$ – соответствующая ему подалгебра в $\mathfrak{g}$ (она называется подалгеброй Картана). Каждому характеру $\chi \in \widehat{T}$ можно поставить в соответствие его дифференциал, вычисленный в единице группы (обозначим его $d\chi$), это соответствие является изоморфизмом и группа характеров $\chi(T)$ тора T отображается в некоторую дискретную подгруппу $\widehat{T} \subset \mathfrak{h}$, порождающую пространство $\mathfrak{h}$ и имеющую одинаковый с ним ранг. Эта подгруппа называется решёткой характеров тора T. Если взять в качестве системы корней множество R всех таких элементов $\alpha \in \widehat{T}$, что $\alpha \neq 0$ и $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$, где $\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X \ \forall X \in \mathfrak{h}\}$ – инвариантное подпространство присоединённого действия характера χ тора T на $\mathfrak{g}$, то, как можно проверить, полученный объект будет удовлетворять определению системы корней (более подробно см. [5, 1]). В качестве группы Вейля для R выступает факторгруппа $W = N/T$, где N – нормализатор T в G, $T \subset N \subset G$.

Общим тором группы G называется схема H_x, определённая над полем функций $M = k(x)$, такая, что T – её специализация над полем L. Строение H_x накладывает ограничения на группы Галуа всех максимальных торов в G. Известно, что $W(R) \subset \varphi(\Pi) \subset A(R)$, где $W(R) = W$, Π – группа Галуа поля разложения H_x над основным полем, $A(R)$ – группа всех линейных преобразований $\mathfrak{h}^*$, переводящих R саму в себя, $\varphi : \Pi \to A(R)$ – гомоморфизм, определённый действием Π на R. Напомним, что $\varphi(\Pi)$ называется группой разложения тора H_x. В свою очередь, для группы Галуа Γ любого максимального k-тора T в G справедливо условие $W(R) \subset \varphi(\Gamma) \subset \varphi(\Pi)$. Максимальный k-тор T группы G называется максимальным тором без аффекта, если его группа разложения изоморфна группе разложения общего тора H_x.

С точки зрения неслучайности структуры наибольший интерес представляют те максимальные торы без аффекта в полупростой группе, у которых $H_x = W(R)$. Известно (см. [1]), что это равносильно тому, что G является внутренней k-формой.

Как было предложено ранее, чтобы построить модель Нерона исследуемого тора, необходимо построить его стандартную целую модель вида Spec $\mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, затем получить из неё целые модели Spec $\mathcal{O}_{k_\wp}[x_{ij}, y_{ij}]$, где $\wp \subset \mathcal{O}_k$ – все возможные простые идеалы, и для каждой из этих моделей построить соответствующую модель Нерона над кольцом $\mathcal{O}_{k_\wp}$. На технической стороне реализации этих алгебр Хопфа в виде аффинных схем останавливаться не будем, этот процесс подробно описан в [10]. Применив последовательно к $\mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$ все дилатации, использованные при построении моделей Нерона над локальными кольцами, получим интересующую нас модель Нерона. Чтобы реализовать условие $H_x = W(R)$, необходимо взять группу характеров $\widehat{T}$ с базисом $\chi_1, \ldots, \chi_n$, где χ_i соответствуют мультипликативной записи α_i, а действие $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ на $\widehat{T}$ согласовано с действием W на R. При этом сами по себе структуры объектов $\widehat{T}$ и R не согласованы, но в $\mathbb{R}^n$ можно выделить подобъект, соответствующий аддитивной записи $\widehat{T}$ и порождённый выбранным базисом R (он называется решёткой весов).

В качестве конкретного примера решения такой задачи рассмотрим тор для случая $R = B_n$. Система корней $B_n \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид $B_n = \{\pm\varepsilon_i;\ \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}$, где $i, j = \overline{1, n}$, $\{\varepsilon_i\}$ – ортонормированный базис $\mathbb{R}^n$ как векторного пространства. В качестве базиса B_n можно взять $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\ldots$, $\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, $\alpha_n = \varepsilon_n$.

Как уже говорилось выше, W действует на R перестановками. Это означает, что в $\widehat{T}$ под действием G любой базисный характер χ_i переходит в характер вида либо $\chi_s^{\pm 1}$, либо $\chi_s^{\pm 1}\chi_t^{\pm 1}$. Так как W порождено отражениями системы корней, то элемент $R \subset \mathbb{R}^n$, который можно рассматривать как элемент векторного пространства $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$, может перейти только в вектор – элемент R с такой же длиной (понятие длины в евклидовом пространстве определено). Следовательно, α_n переходит только в $\pm\varepsilon_i$, а α_j, $j < n$ – только в $\pm\varepsilon_s \pm \varepsilon_t$. С другой стороны, для любых i, j можно подобрать такой элемент W, то есть отражение или композицию отражений, что $\pm\varepsilon_i$ переходит в $\pm\varepsilon_j$: ε_i в ε_j переводит отражение $\sigma_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$, ε_i в $-\varepsilon_i$ – отражение σ_{ε_i}, а любые другие пары – композиция отражений такого вида. Аналогично можно подобрать элемент W, переводящий $\pm\varepsilon_{i_1} \pm \varepsilon_{j_1}$ в $\pm\varepsilon_{i_2} \pm \varepsilon_{j_2}$: $\varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{j_1}$ в $\varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{j_2}$ переводит $\sigma_{\varepsilon_{j_1} - \varepsilon_{j_2}}$, а другие пары – композиция отражений такого вида и вида σ_{ε_i}. Для $\widehat{T}$ это означает, что $O_G(\chi_n) = \{\chi_n; \chi_n^{-1}; (\chi_{n-1}\chi_n), (\chi_{n-1}\chi_n)^{-1}, \ldots, (\chi_1 \cdots \chi_n); (\chi_1 \cdots \chi_n)^{-1}\}$ (так как $\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n + \varepsilon_n = \alpha_{n-1} + \alpha_n$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+1} = \alpha_i + \varepsilon_{i+1}$). Следовательно, $|O_G(\chi_n)| = 2n$. Очевидно, что перемножением элементов $O_G(\chi_n)$ можно получить все базисные характеры χ_i, следовательно, $O_G(\chi_n)$ можно использовать для построения эпиморфизма пермутационного G-модуля на $\widehat{T}$. Можно также сделать вывод, что $|\mathrm{Stab}_G(\chi_n)| = n$ и стандартная целая модель X тора T разложима над полем $L_1 \subset L$ таким, что $[L_1 : k] = 2n$. Правда, как объясняется в [7], в случае расширения глобальных полей может оказаться, что целый базис существует только для некоторого поля разложения, вообще говоря, не являющегося минимальным, то есть для расширения F/k, $L \subset F$, но если мы в нашем примере положим $k = \mathbb{Q}$, то известно (см. [11]), что целый базис существует для любого алгебраического расширения L/k.

Итак, возьмём модуль с пермутационным базисом $\widehat{S} = \langle f_1, \ldots, f_{2n}\rangle$. Пусть под действием гомоморфизма $\varphi : \widehat{S} \to \widehat{T}$ каждый базисный характер f_i переходит в элемент $O_G(\chi_n)$ с номером i относительно того порядка, в котором они были ранее записаны. Возьмём произвольный элемент $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. Пусть $f = \prod\limits_{i=1}^{2n} f_i^{a_i}$, $a_i \in \mathbb{Z}$. Выразив через известные образы базисных характеров $\varphi(f_i) = \prod\limits_{j=1}^{n} \chi_j^{c_{ij}}$ элемент $\varphi(f)$ в условии

$\varphi(f) = 1_{\widehat{T}}$, получим уравнение $\prod\limits_{j=1}^{n} \chi_j^{\sum\limits_{i=1}^{2n} c_{ij} a_i} = 1$, что равносильно системе уравнений $\forall\, i = \overline{1,2n}$ $\sum\limits_{i=1}^{2n} c_{ij} a_i = 0$. В нашем случае, как можно проверить, последняя система имеет вид $CA^t = 0$, где A – строка переменных, а $C \in \mathrm{Mat}(n \times 2n, \mathbb{Z})$ – следующая матрица:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как легко проверить, такая система уравнений равносильна системе вида $a_{2i} = a_{2i-1}$, $i = \overline{1,n}$. ФСР этой системы состоит из векторов, у которых $2i$-й и $(2i-1)$-й компоненты имеют значение 1, а остальные 0. Если перейти обратно к характерам, то получаем, что рассматриваемый тор задаётся системой уравнений вида $\varphi(f_{2i-1})\varphi(f_{2i}) = 1$. Эти уравнения соответствуют равенствам $\chi_n \chi_n^{-1} = 1$, $\chi_{n-1}\chi_n(\chi_{n-1}\chi_n)^{-1} = 1$ и т.д. Как можно заметить, левая часть каждого уравнения представляет собой произведение характера из $\widehat{T}$ на обратный ему характер. По построению для любого $\varphi(f_{2i-1})$ существует элемент G, переводящий в него $\varphi(f_1)$ (они лежат в орбите одного элемента $\widehat{T}$). Из свойств гомоморфизма групп следует, что $\varphi(f_2) = (\varphi(f_1))^{-1}$ тот же элемент G переводит в $\varphi(f_{2i}) = (\varphi(f_{2i-1}))^{-1}$. Это означает, что все уравнения системы сопряжены относительно действия G и рассматриваемый тор можно задать одним уравнением $\varphi(f_1)\varphi(f_2) = 1$. С учётом действия G уравнение принимает вид $\varphi(f_1)\varphi(f_1)^{\delta} = 1$, где δ – элемент G порядка 2, так как он переводит характер в обратный ему. Таким образом, это норменное уравнение второго порядка и T имеет вид $T = R_{L_2/k}(R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m))$, где $L_2 \subset L_1$, $[L_1 : L_2] = 2$.

Известно (см. [4]), что если существует плоский морфизм дедекиндовых схем $S^{'} \to S$ и существует модель Нерона $X^{'}$схемы $X^{'} \times_{S'}$ Spec $K^{'}$, где Spec $K^{'}$ – схема общих точек схемы $S^{'}$, то результат применения функтора Вейля $X = R_{S'/S}(X^{'})$ существует, является S-схемой и является моделью Нерона схемы $X \times_S$ Spec K, где Spec K – схема общих точек схемы S. Наш случай соответствует этим условиям, если положить $K = k$, $K^{'} = L_2$, $S = \mathcal{O}_k$, $S^{'} = \mathcal{O}_{L_2}$, X – модель

Нерона тора T, а $X^{'}$ – модель Нерона тора $T^{'} = R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m)$. Таким образом, можно не строить далее непосредственно X, а построить $X^{'}$ и получить искомую модель Нерона как спуск от неё с помощью функтора Вейля.

Здесь следует заметить, что при построении с использованием стандартной целой модели над полем алгебраических чисел явное задание модели Нерона возможно не всегда. Это связано с тем, что над основным полем k может оказаться не определена дилатация, определённая над его пополнением $k_\wp$. Если простой идеал $\wp$ главный, то униформизующий элемент $\pi \in k_\wp$ будет лежать и в k, тогда дилатация определена. Но если $\wp$ 2-порождённый (известно, что более чем 2-порождённым идеал в кольце целых поля алгебраических чисел быть не может), то есть $\wp = (\alpha, \beta)$, то $\pi \notin k$. Поэтому в нашем случае будем считать, что основное поле L_2 тора $T^{'}$ одноклассное, то есть в нём все простые идеалы главные (таково, например, поле $\mathbb{Q}$, но уже среди его квадратичных расширений одноклассны не все). Целый базис у расширения L_1/L_2 существует, так как известно, что для расширений степени 2 полей алгебраических чисел он существует всегда.

Построим $X^{'}$. Тор $T^{'} = R^{(1)}_{L_1/L_2}(G_m)$ – это одномерный норменный тор. Модель Нерона и стандартная модель Воскресенского такого тора неоднократно рассматривались, например, его модель Воскресенского построена в [2], а модель Нерона в [12]. Как и тор T, он задаётся одним уравнением относительно характеров вида $\varphi(f_1)\varphi(f_1)^\delta = 1$. Далее необходимо перейти к системе уравнений, определённых над L_1, а от неё – к системе над L_2. Получим $(ay_1 + by_2)(\overline{a}y_1 + \overline{b}y_2) = 1$, где $\{a; b\}$ – целый базис L_1 над L_2. Отсюда $a\overline{a}y_1^2 + (a\overline{b} + b\overline{a})y_1y_2 + b\overline{b}y_2^2 = 1$, причём все коэффициенты многочлена в левой части лежат в $\mathcal{O}_{L_2}$.

Далее нужно для каждого простого идеала $\wp \subset \mathcal{O}_{L_2}$ рассмотреть соответствующую модель тора $T^{'} \otimes_{L_2} L_{2\wp}$. Эта модель задаётся тем же уравнением, что и $X^{'}$, но теперь над локальным полем $L_{2\wp}$. Известно (см. [2]), что если $\pi \nmid 2$ (где π – униформизующий элемент $k_\wp$), то редукция этого тора не содержит нильпотентов, а если $\pi \mid 2$, то редукция всегда имеет особенность вида μ_2, то есть алгебра Хопфа $A(\widehat{T})$ содержит нильпотент вида $(b_1y_1 + b_2y_2 + 1)^2 = 0$. Таким образом, сглаживание необходимо произвести только в случае $\pi \mid 2$.

Уточним вид коэффициентов полученного уравнения. Известно, что при условии $\pi \mid 2$ выполняется $a\overline{b} + b\overline{a} \equiv 0 \pmod{\pi}$. Как легко проверить, из двух коэффициентов $a\overline{a}$ и $b\overline{b}$ хотя бы один (пусть для определённости первый из них) не делится на π. Таким образом, уравнение, задающее рассматриваемую целую модель, имеет вид $c_1y_1^2 + c_2y_1y_2 + c_3y_2^2 = 1$, где $c_1 \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, $c_2 \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Так как нильпотент при этих условиях $A(\widehat{T})$ содержит всегда, то этому уравнению удовлетворяет некоторая особая точка $a = (r, 0)$, где $r \in r_{k_\wp}$, $r_{k_\wp} = \mathcal{O}_{k_\wp}/(\wp)$ (очевидно, что тогда эта точка лежит в редукции модели и что $r \neq 0$). Найдём дефект гладкости модели в точке a. По определению (см. [4]) необходимо найти в этой точке матрицу Якоби, состоящую из частных производных всех функций, задающих сглаживаемую модель как многообразие, по всем переменным. В нашем случае матрица Якоби имеет вид $J(y_1, y_2) = \left(\begin{smallmatrix} 2c_1y_1+c_2y_2 & 2c_3y_2+c_2y_1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}(1 \times 2, \mathbb{Z})$ и в точке a она принимает вид $J(a) = \left(\begin{smallmatrix} 2c_1r & c_2r \end{smallmatrix}\right)$. Причём из доказанного следует, что

$$\nu_\pi(2c_1) = \nu_\pi(2) \geq 1, \quad \nu_\pi(c_2) \geq 1,$$

поэтому значение дефекта гладкости в a равно

$$\delta(a) = \min_{i=1, j=\overline{1,2}} \nu_2(a_{ij}) = \min(\nu_\pi(2), \nu_\pi(c_2)) = s$$

(здесь a_{ij} – элементы $J(a)$, $s \in \mathbb{N}$ – параметр). Это означает, что для сглаживания понадобится не более s дилатаций.

После первой замены переменных $y_1 = \pi y_1^{(1)} + 1$, $y_2 = \pi y_2^{(1)}$ (для краткости здесь и далее после замены верхние индексы писать не будем) особая точка, в которой происходит сглаживание, будет иметь вид $\widetilde{a} = (0, 0)$ и далее не изменится, поэтому дальнейшие дилатации (если они понадобятся) все будут иметь вид $y_1^{(i)} = \pi y_1^{(i+1)}, y_2^{(i)} = \pi y_2^{(i+1)}$. Учитывая, что операции замены переменных и сокращения на максимально возможную степень π перестановочны, весь процесс сглаживания можно представить как замену переменных $y_1 = \pi^s y_1^{(1)} + 1$, $y_2 = \pi^s y_2^{(1)}$ с последующим сокращением. После раскрытия скобок и приведения подобных уравнение можно будет сократить на π^{2s}, в результате получим следующее уравнение:

$$c_1y_1^2 + 2\pi^{-s}c_1y_1 + c_2y_1y_2 + c_2\pi^{-s}y_2 + c_3y_2^2 = 0.$$

Найдём дефект гладкости аффинного многообразия, задаваемого этим уравнением, в произвольной точке. Матрица Якоби имеет следующий вид:

$$J(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2c_1y_1+2\pi^{-s}c_1+c_2y_2 & c_2y_1+c_2\pi^{-s}+2c_3y_2 \end{pmatrix}.$$

Как легко убедиться, для такой матрицы $\min\,(\nu_\pi(a_{11}), \nu_\pi(a_{12})) = 0$ при любых значениях y_1, y_2, следовательно, дефект гладкости в любой точке равен 0 и это аффинное многообразие является моделью Нерона $X'_\wp$. Тем же уравнением, но рассматриваемым снова как уравнение над полем алгебраических чисел L_2 (как можно проверить, мы не вышли из этого поля) задаётся модель Нерона X'.

Явное задание модели Нерона X тора T можно получить, произведя в уравнении, задающем X', замену $c_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j$, $\pi^{-s} = \sum_{j=1}^{n} p_j\omega_j$, $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}\omega_j$, где $\{\omega_j\}$ – какой-либо целый базис $L_2/\mathbb{Q}$. Для экономии места не будем описывать результат, так как он получается путём простого раскрытия скобок.

Литература

1. В. Е. Воскресенский, *Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп.* МЦНМО, М., 2009. 408 с.
2. S. Yu. Popov, *Standard Integral Models of Algebraic Tori.* — Preprintreihe des SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik. 2003. 31 pp.
3. В. П. Платонов, А. С. Рапинчук, *Алгебраические группы и теория чисел.* Наука, М. , Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 656 с.
4. S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron Models.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990. 325 pp.
5. Ch. Ching-Li, Yu. Jiu-Kang, *Congruences of Néron models for tori and the Artin conductor.* — National Center for Theoretical Science, National Tsing-Hua University, Hsinchu, Taiwan, 1999. 30 pp.
6. *Алгебраическая теория чисел.* Под ред. Дж. Касселса и А. Фрёлиха. М.: Мир, 1969. 484 с.
7. В. Е. Воскресенский, Б. Э. Кунявский, Б. З. Мороз, *О целых моделях алгебраических торов.* — Алгебра и анализ **14**, No. 1 (2002), 46–70.
8. M. V. Bondarko, *Ideals in an extension of a number field as modules over the ring of integers in a ground field.* — In: Proceedings of the Session in analytic number theory and Diophantine equations (ed. by D.R. Heath-Brown and B.Z. Moroz), Bonner Math. Schriften, 360 (2003).
9. Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* М.: МЦНМО, 2003. 216 с.

10. Ю. Ю. Крутиков, *Аффинные представления трехмерных алгебраических торов.* — Вестник Самарского государственного университета, естественнонаучная серия, No. 7 (57) (2007), 92–106.
11. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. 504 с.
12. Q. Liu, D. Lorenzini, *Special fibers of Néron models and wild ramification.* Preprint, 1999. 40 pp.

Grehov M. V. Integral models of algebraic tori over number fields.

An algebraic torus can be defined over an arbitrary field but if a ground field has an arithmetic type one can additionally consider schemes over the ring of integers of this field. These schemes are linked to the original tori and called integral models. Néron model and Voskresenskiĭ model are most well-known among them. This paper is dedicated to the research of main integral models of algebraic tori over number fields and to the comparison of their properties. A particular family of the maximal algebraic tori without an affect of semisimple groups of type B_n is taken into account as a polygon for the realization of the previously researched constructions.

Самарский государственный университет
механико-математический факультет
кафедра алгебры и геометрии
ул. Академика Павлова, д. 1
443011, г. Самара, Россия
E-mail: m.grekhov@yandex.ru

Поступило 1 ноября 2014 г.