Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 430, 2014 г.

А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. V. СЕРИЯ $D(3\mathcal{K})$ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ, ОТЛИЧНОЙ ОТ 2

§1. Введение

В работе [1] была вычислена алгебра когомологий Хохшильда для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ в случае, когда основное (алгебраически замкнутое) поле имеет характеристику 2. В настоящей работе вычисляются группы когомологий Хохшильда для алгебр этой серии в случае основного поля, имеющего характеристику, отличную от двух.

Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [2]).

Как и в [1], мы сначала строим бимодульную резольвенту для алгебр рассматриваемой серии, а затем используем её в вычислениях групп когомологий. Ранее подобный поход был применён к некоторым другим сериям алгебр кватернионного, диэдрального и полудиэдрального типов. В [3] алгебра когомологий Хохшильда была вычислена для одной из серий локальных алгебр кватернионного типа, а в [4–6] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для серии $Q(2\mathcal{B})_1$ над основным полем характеристики 2 и 3. В [7, 8] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для локальных алгебр диэдрального типа. В [9] вычислены группы когомологий Хохшильда для некоторой части алгебр серии $D(2\mathcal{B})$. В [10, 11] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для локальных алгебр полудиэдрального типа. Кроме того, в [12, 13] для алгебр полудиэдрального типа из серии $SD(2\mathcal{B})_2$ вычислены группы когомологий Хохшильда над алгебраически замкнутым полем характеристики 2, а в ряде случаев описаны и умножения в соответствующей алгебре когомологий. Кроме того, подход из [1] был использован для вычисления алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр Лю–Шульца (см. [14]).

Ключевые слова: группы когомологий Хохшильда, алгебры диэдрального типа, бимодульная резольвента.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00902).

Имеются также результаты, относящиеся к описанию алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, полученные для так называемой алгебры Мёбиуса (см. [15–18]) и для самоинъективных алгебр конечного типа представления, имеющих древесный тип D_n (см. [19–25]), а также для некоторого семейства самоинъективных алгебр конечного типа представления, имеющих древесный тип E_6 (см. [26]).

Кратко опишем структуру работы. В § 2 приводится формулировка основного результата работы – теоремы 2.1, в которой описываются группы когомологий Хохшильда для рассматриваемой серии алгебр диэдрального типа над основным алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от двух. В § 3 строится минимальная проективная резольвента алгебры R, рассматриваемой как модуль над своей обёртывающей алгеброй $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$. Наконец, используя эту резольвенту, в § 4 мы вычисляем группы $\mathrm{HH}^n(R)$.

§2. Формулировка основного результата

Пусть K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики $p := \operatorname{char} K$, R – конечномерная K-алгебра, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R).

Таким образом, если $P_\bullet \to R$ – Λ-проективная резольвента алгебры R, то $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\bullet, R))$.

Алгебры R_{n_1,n_2,n_3}, где $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, серии $D(3\mathcal{K})$ описываются с помощью следующего колчана $\mathcal{Q}^{(\mathcal{K})} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1)$ с соотношениями:

$$\mathcal{Q}^{(\mathcal{K})}: \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, shift left, "a_{21}"] \arrow[dr, shift left, "a_{31}"] & & 2 \arrow[ll, shift left, "a_{12}"] \arrow[dl, shift left, "a_{32}"] \\ & 3 \arrow[ul, shift left, "a_{13}"] \arrow[ur, shift left, "a_{23}"] & \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 = a_{21}a_{13} = a_{31}a_{12} = a_{32}a_{21} = a_{12}a_{23} = a_{13}a_{32} = a_{23}a_{31}, \\ (a_{12}a_{21})^{n_3} = (a_{13}a_{31})^{n_2}, \\ (a_{23}a_{32})^{n_1} = (a_{21}a_{12})^{n_3}, \\ (a_{31}a_{13})^{n_2} = (a_{32}a_{23})^{n_1}; \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

композицию путей мы записываем справа налево. Кроме того, вершины колчана считаем элементами кольца вычетов $\mathbb{Z}_3$, а в обозначениях, связанных с вершинами колчана, индексы также рассматриваются по модулю 3.

Поскольку алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R_{n_1,n_2,n_3})$ для случая $p = 2$ уже была вычислена (см. [1]), в дальнейшем, если не оговорено иное, мы предполагаем, что $p \neq 2$.

Введём дополнительные обозначения: положим $N := n_1 + n_2 + n_3$; кроме того, рассмотрим следующие 3×3-матрицы над K

$$C = \begin{pmatrix} n_3 & 0 & -n_2 \\ -n_3 & n_1 & 0 \\ 0 & -n_1 & n_2 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} n_3 & 0 & n_2 \\ n_3 & n_1 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Заметим, что ранг $\operatorname{rk} C$ матрицы C не превосходит 2.

Основной результат работы – это следующее описание групп когомологий Хохшильда для рассматриваемой серии алгебр в случае, когда $p \neq 2$.

Теорема 2.1. *Пусть $R = R_{n_1,n_2,n_3}$, и пусть $p \neq 2$. Тогда размерности групп $\mathrm{HH}^n(R)$ описываются следующим образом:*

(1) $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = N + 1$;
(2) $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = N + 1 - \operatorname{rk} C$;
(3) $\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = N + 2 - \operatorname{rk} C$;
(4) $\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = N + 2 - \operatorname{rk} C_1$;
(5) $\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = N + 1 - \operatorname{rk} C_1$;

(6) *для* $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 0, & \textit{если } n \equiv 0\,,4 \quad \textit{или} \;\; 5 \,(\mathrm{mod}\, 6), \\ 2, & \textit{если } n \equiv 1 \;\; \textit{или} \;\; 3 \,(\mathrm{mod}\, 6), \\ 4, & \textit{если } n \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 6). \end{cases}$$

Следствие 2.2. *Пусть* $R = R_{n_1,n_2,n_3}$ *и* $p \neq 2$. *Тогда для* $n \geqslant 13$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-12}(R) = 4.$$

§3. Резольвента

Пусть $R = R_{n_1,n_2,n_3}$ – алгебра, определённая в § 2. Через e_i, $i \in \{1,2,3\}$, обозначим идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана $\mathcal{Q}^{(\mathcal{K})}$. Тогда

$$P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j),\ i,j \in \{1,2,3\},$$

составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей, где $\Lambda = R^{\mathrm{e}}$.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм $\widehat{w}$ левого Λ-модуля Λ, кроме того, если

$$w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l),$$

то $\widehat{w}$ индуцирует гомоморфизм $\widehat{w}\colon P_{ij} \to P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w.

Введём краткие обозначения для некоторых элементов алгебры R:

$$\alpha_i = a_{i,i+1}a_{i+1,i}, \quad \beta_i = a_{i,i-1}a_{i-1,i} \ \ (i \in \mathbb{Z}_3).$$

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{B}_{ii} \cup \bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{B}_{i+1,i} \cup \bigcup_{i=1}^{3} \mathcal{B}_{i,i+1}, \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ii} &= \{\alpha_i^j, \beta_i^k \mid 0 \leqslant j \leqslant n_{i+2}, 1 \leqslant k \leqslant n_{i+1} - 1\}, \\ \mathcal{B}_{i+1,i} &= \{a_{i+1,i}\alpha_i^k \mid 0 \leqslant k \leqslant n_{i+2} - 1\}, \\ \mathcal{B}_{i,i+1} &= \{\alpha_i^k a_{i,i+1} \mid 0 \leqslant k \leqslant n_{i+2} - 1\}. \end{aligned}$$

Для описания бимодульной резольвенты алгебры R введём ряд дополнительных обозначений. Рассмотрим K-пространство

$$V := K\mathcal{Q}_0 \oplus K\mathcal{Q}_1.$$

Определим изоморфизм $s : V \to V$ так, что $s(e_i) = e_{i+1}, s(a_{i,j}) = a_{i+1,j+1}$. Он очевидным образом продолжается до K-линейного отображения

$$s : V \otimes V^{\mathrm{op}} \subset \Lambda \to V \otimes V^{\mathrm{op}} \subset \Lambda,$$

и затем введём обозначение

$$S(x,y,z) := \begin{pmatrix} x & y & z \\ s(z) & s(x) & s(y) \\ s^2(y) & s^2(z) & s^2(x) \end{pmatrix},$$

где $x, y, z \in \Lambda$.

Далее, определим кольцевой изоморфизм $\varphi : R \to R^{\mathrm{op}}$ такой, что $\varphi(e_i) = e_i$, $\varphi(a_{i,j}) = a_{j,i}$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$. В частности, $\varphi(\alpha_i) = \alpha_i$, $\varphi(\beta_i) = \beta_i$. Кроме того, φ продолжается до отображения $\varphi : \Lambda \to \Lambda$ так, что $\varphi(x \otimes y) = \varphi(y) \otimes \varphi(x)$, а затем мы естественным образом продолжим φ на множество 3×3-матриц над Λ.

Наконец, рассмотрим следующие вспомогательные проективные Λ-модули:

$$\begin{aligned} L_1 &= \bigoplus_{i=1}^{3} P_{ii}, \\ L_2' &= \bigoplus_{i=1}^{3} P_{i,i+1}, \\ L_2'' &= \bigoplus_{i=1}^{3} P_{i+1,i}, \\ L_2 &= L_2' \oplus L_2''. \end{aligned}$$

Теперь в категории (левых) Λ-модулей построим следующий бикомплекс $B_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$):

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d, "\sigma_3"'] & \cdots \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_2"] & \cdots \arrow[d, "\sigma_1"] & \cdots \\
L_1^2 \arrow[d, "\sigma_2"'] & L_2 \arrow[l, "-\tau_2"'] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_1"'] & L_2 \arrow[l, "-\widetilde{\tau}_1"'] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_3"] & \cdots \arrow[l, "-\tau_3"'] \\
L_2 \arrow[d, "\sigma_1"'] & L_2 \arrow[l, "\tau_1"'] \arrow[d, "\sigma_3"] & L_1^2 \arrow[l, "\widetilde{\tau}_3"'] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_2"] & \cdots \arrow[l, "\tau_2"'] \\
L_2 \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_3"'] & L_1^2 \arrow[l, "-\tau_3"'] \arrow[d, "\sigma_2"] & L_2 \arrow[l, "-\widetilde{\tau}_2"'] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_1"] & \cdots \arrow[l, "-\tau_1"'] \\
L_1^2 \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_2"'] & L_2 \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[d, "\sigma_1"] & L_2 \arrow[l, "\widetilde{\tau}_1"'] \arrow[d, "\sigma_3"] & \cdots \arrow[l, "\tau_3"'] \\
L_2 \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_1"'] & L_2 \arrow[l, "-\tau_1"'] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_3"] & L_1^2 \arrow[l, "-\widetilde{\tau}_3"'] \arrow[d, "\sigma_2"] & \cdots \arrow[l, "-\tau_2"'] \\
L_2 \arrow[d, "\sigma_3"'] & L_1^2 \arrow[l, "\tau_3"'] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_2"] & L_2 \arrow[l, "\widetilde{\tau}_2"'] \arrow[d, "\sigma_1"] & \cdots \arrow[l, "\tau_1"'] \\
L_1^2 \arrow[d, "\sigma_2"'] & L_2 \arrow[l, "-\tau_2"'] \arrow[d, "\widetilde{\sigma}_1"] & L_2 \arrow[l, "-\widetilde{\tau}_1"'] \arrow[d, "\rho_1"] & \cdots \arrow[l, "-\rho_2"'] \\
L_2 \arrow[d, "\sigma_1"'] & L_2 \arrow[l, "\tau_1"'] \arrow[d, "\widetilde{\rho}_1"] & L_1 \arrow[l, "\widetilde{\rho}_2"'] & \\
L_2 \arrow[d, "\rho_1"'] & L_1 \arrow[l, "-\rho_2"'] & & \\
L_1 \;. & & &
\end{tikzcd}
\tag{3.2}
$$

Здесь

$$\rho_1 = \left[\rho_1{}' \mid \rho_1{}''\right], \rho_1{}' = S\left(-e_1 \otimes a_{12}, 0, a_{31} \otimes e_1\right), \rho_1{}'' = -\varphi(\rho_1{}');$$

$$\rho_2 = \begin{bmatrix} \rho_2{}' \\ \rho_2{}'' \end{bmatrix},$$

$$\rho_2{}' = \begin{bmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^i \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{n_3-1} \beta_2^{n_3-1-i} a_{21} \otimes \beta_2^i & 0 \\ 0 & -\sum\limits_{i=0}^{n_1-1} \alpha_2^i \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{n_1-1} \beta_3^{n_1-1-i} a_{32} \otimes \beta_3^i \\ \sum\limits_{i=0}^{n_2-1} \beta_1^{n_2-1-i} a_{13} \otimes \beta_1^i & 0 & -\sum\limits_{i=0}^{n_2-1} \alpha_3^i \otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1-i} \end{bmatrix},$$

$$\rho_2{}'' = \varphi(\rho_2{}');$$

$$\widetilde{\rho}_1 = \left[\widetilde{\rho}_1{}' \mid \widetilde{\rho}_1{}''\right], \widetilde{\rho}_1{}' = S\left(e_1 \otimes a_{12}, 0, a_{31} \otimes e_1\right), \widetilde{\rho}_1{}'' = -\varphi(\widetilde{\rho}_1{}');$$

$$\widetilde{\rho}_2 = \begin{bmatrix} \widetilde{\rho}_2{}' \\ \widetilde{\rho}_2{}'' \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\rho}_2{}' = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^i \otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{n_3-1} \beta_2^{n_3-1-i} a_{21} \otimes \beta_2^i & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{n_1-1} \alpha_2^i \otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{n_1-1} \beta_3^{n_1-1-i} a_{32} \otimes \beta_3^i \\ \sum\limits_{i=0}^{n_2-1} \beta_1^{n_2-1-i} a_{13} \otimes \beta_1^i & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n_2-1} \alpha_3^i \otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1-i} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\rho}_2{}'' = \varphi(\widetilde{\rho}_2{}');$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1{}' \\ \sigma_1{}'' & 0 \end{bmatrix}, \sigma_1{}' = S(0, a_{31} \otimes e_2, e_1 \otimes a_{23}), \sigma_1{}'' = \varphi(\sigma_1{}');$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_2{}' & 0 \\ 0 & \sigma_2{}'' \end{bmatrix}, \sigma_2{}' = S(-e_1 \otimes a_{21}, a_{21} \otimes e_2, 0), \sigma_2{}'' = -\varphi(\sigma_2{}');$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3{}' \\ \sigma_3{}'' & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3{}' = S(a_{21} \otimes e_1, 0, e_1 \otimes a_{13}), \sigma_3{}'' = \varphi(\sigma_3{}');$$

$$\widetilde{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\sigma}_1{}' \\ \widetilde{\sigma}_1{}'' & 0 \end{bmatrix}, \widetilde{\sigma}_1{}' = S(0, a_{31} \otimes e_2, -e_1 \otimes a_{23}), \widetilde{\sigma}_1{}'' = \varphi(\widetilde{\sigma}_1{}');$$

$$\widetilde{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} \widetilde{\sigma}_2{}' & 0 \\ 0 & \widetilde{\sigma}_2{}'' \end{bmatrix}, \widetilde{\sigma}_2{}' = S(-e_1 \otimes a_{21}, -a_{21} \otimes e_2, 0), \widetilde{\sigma}_2{}'' = -\varphi(\widetilde{\sigma}_2{}');$$

$$\widetilde{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\sigma}_3{}' \\ \widetilde{\sigma}_3{}'' & 0 \end{bmatrix}, \widetilde{\sigma}_3{}' = S(-a_{21} \otimes e_1, 0, e_1 \otimes a_{13}), \widetilde{\sigma}_3{}'' = \varphi(\widetilde{\sigma}_3{}');$$

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & \tau_1{}' \\ \tau_1{}'' & 0 \end{bmatrix},$$
$$\tau_1{}' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3^{n_2-1}a_{31}\otimes e_2 & -e_1\otimes a_{23}\beta_3^{n_1-1} \\ -e_2\otimes a_{31}\beta_1^{n_2-1} & 0 & \alpha_1^{n_3-1}a_{12}\otimes e_3 \\ \alpha_2^{n_1-1}a_{23}\otimes e_1 & -e_3\otimes a_{12}\beta_2^{n_3-1} & 0 \end{bmatrix}, \tau_1{}'' = -\varphi(\tau_1{}');$$
$$\tau_2 = \begin{bmatrix} \tau_2{}' & 0 \\ 0 & \tau_2{}'' \end{bmatrix},$$
$$\tau_2{}' = \begin{bmatrix} e_1\otimes a_{12}\beta_2^{n_3-1} & 0 & -\alpha_3^{n_2-1}a_{31}\otimes e_1 \\ -\alpha_1^{n_3-1}a_{12}\otimes e_2 & e_2\otimes a_{23}\beta_3^{n_1-1} & 0 \\ 0 & -\alpha_2^{n_1-1}a_{23}\otimes e_3 & e_3\otimes a_{31}\beta_1^{n_2-1} \end{bmatrix}, \tau_2{}'' = \varphi(\tau_2{}');$$
$$\tau_3 = \begin{bmatrix} 0 & \tau_3{}' \\ \tau_3{}'' & 0 \end{bmatrix},$$
$$\tau_3{}' = \begin{bmatrix} -e_1\otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1} & \beta_2^{n_3-1}a_{21}\otimes e_2 & 0 \\ 0 & -e_2\otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & \beta_3^{n_1-1}a_{32}\otimes e_3 \\ \beta_1^{n_2-1}a_{13}\otimes e_1 & 0 & -e_3\otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \end{bmatrix}, \tau_3{}'' = -\varphi(\tau_3{}');$$
$$\widetilde{\tau}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\tau}_1{}' \\ \widetilde{\tau}_1{}'' & 0 \end{bmatrix},$$
$$\widetilde{\tau}_1{}' = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3^{n_2-1}a_{31}\otimes e_2 & -e_1\otimes a_{23}\beta_3^{n_1-1} \\ -e_2\otimes a_{31}\beta_1^{n_2-1} & 0 & -\alpha_1^{n_3-1}a_{12}\otimes e_3 \\ -\alpha_2^{n_1-1}a_{23}\otimes e_1 & -e_3\otimes a_{12}\beta_2^{n_3-1} & 0 \end{bmatrix}, \widetilde{\tau}_1{}'' = -\varphi(\widetilde{\tau}_1{}');$$
$$\widetilde{\tau}_2 = \begin{bmatrix} \widetilde{\tau}_2{}' & 0 \\ 0 & \widetilde{\tau}_2{}'' \end{bmatrix},$$
$$\widetilde{\tau}_2{}' = \begin{bmatrix} e_1\otimes a_{12}\beta_2^{n_3-1} & 0 & \alpha_3^{n_2-1}a_{31}\otimes e_1 \\ \alpha_1^{n_3-1}a_{12}\otimes e_2 & e_2\otimes a_{23}\beta_3^{n_1-1} & 0 \\ 0 & \alpha_2^{n_1-1}a_{23}\otimes e_3 & e_3\otimes a_{31}\beta_1^{n_2-1} \end{bmatrix}, \widetilde{\tau}_2{}'' = \varphi(\widetilde{\tau}_2{}');$$
$$\widetilde{\tau}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\tau}_3{}' \\ \widetilde{\tau}_3{}'' & 0 \end{bmatrix},$$
$$\widetilde{\tau}_3{}' = \begin{bmatrix} e_1\otimes a_{21}\alpha_1^{n_3-1} & \beta_2^{n_3-1}a_{21}\otimes e_2 & 0 \\ 0 & e_2\otimes a_{32}\alpha_2^{n_1-1} & \beta_3^{n_1-1}a_{32}\otimes e_3 \\ \beta_1^{n_2-1}a_{13}\otimes e_1 & 0 & e_3\otimes a_{13}\alpha_3^{n_2-1} \end{bmatrix}, \widetilde{\tau}_3{}'' = -\varphi(\widetilde{\tau}_3{}').$$

Пусть $Q_\bullet = (Q_n, d_n^Q)_{n\geqslant 0} = \mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet})$ – тотализация бикомплекса (3.2). В качестве пополняющего отображения $\mu\colon Q_0 = L_1 \to R$ мы берем каноническое отображение, индуцированное умножением в R: $\mu(r\otimes s) = rs$.

Теорема 3.1. *Пусть $R = R_{n_1,n_2,n_3}$. Тогда построенный выше комплекс $Q_\bullet$ вместе с пополняющим отображением $\mu\colon Q_0 \to R$ является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.*

Доказательство. То, что $Q_\bullet$ – комплекс и $\mu \cdot d_0^Q = 0$, проверяется прямыми вычислениями. Для доказательства ацикличности получающегося комплекса мы используем теорему 1 из [27]. А именно, нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu\colon Q_\bullet \to R$ на простой R-модуль S_i мы получаем минимальную проективную резольвенту модуля S_i (такие резольвенты модулей S_i, $i = 1, 2, 3$, описаны в [28]). Но это также проверяется прямыми вычислениями. Мы предоставляем читателю провести все необходимые проверки. □

Рассмотрим бикомплекс $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$, состоящий из двух первых ненулевых столбцов в бикомплексе $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ с номерами 0 и 1 (а остальные столбцы в $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$ нулевые). Пусть $X_\bullet = \mathrm{Tot}(\mathcal{A}_{\bullet\bullet})$; ясно, что $X_\bullet$ – подкомплекс комплекса $Q_\bullet$.

Предложение 3.2. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{3.3}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из строения комплекса $Q_\bullet$. □

§4. Группы когомологий

Пусть по-прежнему $R = R_{n_1,n_2,n_3}$ – K-алгебра, определённая в § 2, и $p = \operatorname{char} K$, причём $p \neq 2$. Для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем комплекс

$$\big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \delta^n = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R)\big)_{n \geqslant 0}, \tag{4.1}$$

где $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – бимодульная резольвента алгебры R, построенная в § 3. В дальнейшем мы часто для коцикла $f \in \operatorname{Ker} \delta^n$ его когомологический класс $\operatorname{cl} f \in \mathrm{HH}^n(R)$ также обозначаем через f.

Замечание 4.1. Поскольку $P_{ij} = \Lambda \cdot (e_i \otimes e_j)$, то имеется изоморфизм $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{ij}, R) \simeq e_i R e_j$, и мы используем его для отождествления указанных K-пространств, при этом множество $\mathcal{B}_{ij}$ (см. обозначения в (3.1)) образует K-базис пространства $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{ij},R)$. Далее, всякий Λ-гомоморфизм $f\colon Q_n\to R$ определяется набором своих значений на соответствующих образующих $e_i\otimes e_j$ тех P_{ij}, которые входят в разложение модуля Q_n; при этом $f(e_i\otimes e_j)\in e_iRe_j$. В дальнейшем мы отождествляем f с этим набором значений. Когда в таком наборе значений f встречается последовательность, состоящая из нулей, скажем, из r штук, то мы такую последовательность обозначаем через O_r. Аналогично нулевую $r\times t$-матрицу обозначаем через $\mathrm{O}_{r,t}$; при этом мы опускаем указание на размеры такой матрицы, если они ясны из контекста.

Нам понадобятся следующие утверждения, доказанные в [1].

Лемма 4.2. *Если* $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$, *то:*
а) $\dim_K\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{ij},R)=n_k$;
б) $\dim_K\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{ii},R)=n_j+n_k$.

Следствие 4.3. *Для любого* $n\geqslant 0$ *имеем:*

$$\dim_K\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n,R)=\begin{cases}(2k+1)2N, & \text{если } n=3k \text{ или } n=3k+1,\\ (2k+2)2N, & \text{если } n=3k+2,\end{cases}$$

для целого неотрицательного числа k.

Отметим, что если $w\colon\Lambda\to\Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w\in\Lambda$, то в соответствии с указанным выше отождествлением индуцированный гомоморфизм абелевых групп

$$w^*:=\mathrm{Hom}_\Lambda(w,R)\colon\ \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,R)\simeq R\to\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,R)\simeq R \tag{4.2}$$

действует следующим образом: $r\in R$ отображается в $w*r$ (где $*$ соответствует Λ-модульной структуре на R).

Тогда дифференциал $\delta^0\colon\ \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_0,R)\to\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1,R)$ описывается так: для $u_i\in e_iRe_i$ $(i=1,2,3)$

$$\delta^0(u_1,u_2,u_3)=(-u_1a_{12}+a_{12}u_2,\ -u_2a_{23}+a_{23}u_3,\ -u_3a_{31}+a_{31}u_1,\\ a_{21}u_1-u_2a_{21},\ a_{32}u_2-u_3a_{32},\ a_{13}u_3-u_1a_{13}).$$

Предложение 4.4. $\dim_K\mathrm{HH}^0(R)=N+1$, $\dim\mathrm{Im}\,\delta^0=N-1$.

Доказательство. Ввиду [2, лемма IX.1.4] центр $Z(R)=\mathrm{Ker}\,\delta^0$ алгебры R допускает в качестве базиса следующее множество

$$\{(\alpha_1^i,\beta_2^i,0)\}_{i=1}^{n_3-1}\cup\{(0,\alpha_2^i,\beta_3^i)\}_{i=1}^{n_1-1}\cup\{(\beta_1^i,0,\alpha_3^i)\}_{i=1}^{n_2-1}\\ \cup\{1,(\alpha_1^{n_3},\mathrm{O}_2),(0,\alpha_2^{n_1},0),(\mathrm{O}_2,\alpha_3^{n_2})\}.$$

Таким образом, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = N+1$ и

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{Im}\delta^0 &= \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_0,R) - \dim_K \operatorname{Ker}\delta^0\\ &= 2N-(N+1) = N-1.\end{aligned}$$

□

Замечание 4.5. Пространство $\operatorname{Im}\delta^0$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\big(-\alpha_1^i a_{12}, \mathrm{O}_2, a_{21}\alpha_1^i, \mathrm{O}_2\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_3-1; \tag{4.3}$$

$$\big(0, -\alpha_2^i a_{23}, \mathrm{O}_2, a_{32}\alpha_2^i, 0\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_1-1; \tag{4.4}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, -\alpha_3^i a_{31}, \mathrm{O}_2, a_{13}\alpha_3^i\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_2-1; \tag{4.5}$$

$$\big(-a_{12}, 0, a_{31}, a_{21}, 0, -a_{13}\big), \tag{4.6}$$

$$\big(a_{12}, -a_{23}, 0, -a_{21}, a_{32}, 0\big). \tag{4.7}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть значения δ^0 на элементах вида (u_1, O_2) (соответственно вида $(0, u_2, 0)$ и вида (O_2, u_3)), где u_1 пробегает множество $\mathcal{B}_{11}$ (соответственно r_2 пробегает множество $\mathcal{B}_{22}$, а r_3 – множество $\mathcal{B}_{33}$), и убедиться, что множество элементов из (4.3)–(4.7) порождает $\operatorname{Im}\delta^0$. Остаётся заметить, что мощность этого множества совпадает с $\dim \operatorname{Im}\delta^0$.

Если $f\colon X \to Y$ – гомоморфизм левых Λ-модулей, то аналогично (4.2) введём обозначение

$$f^* := \operatorname{Hom}_\Lambda(f,R)\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Y,R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(X,R).$$

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.6. *В обозначениях из* (3.2)

$$(\sigma_1)^* = 0, \quad (\tau_1)^* = 0, \quad (\widetilde{\sigma}_1)^* = 0, \quad (\widetilde{\tau}_1)^* = 0.$$

Доказательство. Утверждение проверяется прямыми вычислениями. □

Дифференциал

$$\delta^1 = \big(-\rho_2,\ \sigma_1\big)^* = \big(-(\rho_2)^*,\ \mathrm{O}\,\big)\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1,R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2,R)$$

описывается следующим образом: для $u_{ij} \in e_iRe_j$ $(i,j \in \{1,2,3\})$ имеем

$$\delta^1(u_{12},u_{23},u_{31},u_{21},u_{32},u_{13}) = (t_{11},t_{22},t_{33},\mathrm{O}_6),$$

где

$$\begin{aligned} t_{11} &= \sum_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^i \cdot u_{12} \cdot a_{21}\alpha_1^{n_3-1-i} - \sum_{i=0}^{n_2-1} \beta_1^{n_2-1-i} a_{13} \cdot u_{31} \cdot \beta_1^i \\ &+ \sum_{i=0}^{n_3-1} \alpha_1^{n_3-1-i} a_{12} \cdot u_{21} \cdot \alpha_1^i - \sum_{i=0}^{n_2-1} \beta_1^i \cdot u_{13} \cdot a_{31}\beta_1^{n_2-1-i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{22} &= \sum_{i=0}^{n_1-1} \alpha_2^i \cdot u_{23} \cdot a_{32}\alpha_2^{n_1-1-i} - \sum_{i=0}^{n_3-1} \beta_2^{n_3-1-i} a_{21} \cdot u_{12} \cdot \beta_2^i \\ &+ \sum_{i=0}^{n_1-1} \alpha_2^{n_1-1-i} a_{23} \cdot u_{32} \cdot \alpha_2^i - \sum_{i=0}^{n_3-1} \beta_2^i \cdot u_{21} \cdot a_{12}\beta_2^{n_3-1-i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{33} &= \sum_{i=0}^{n_2-1} \alpha_3^i \cdot u_{31} \cdot a_{13}\alpha_3^{n_2-1-i} - \sum_{i=0}^{n_1-1} \beta_3^{n_1-1-i} a_{32} \cdot u_{23} \cdot \beta_3^i \\ &+ \sum_{i=0}^{n_2-1} \alpha_3^{n_2-1-i} a_{31} \cdot u_{13} \cdot \alpha_3^i - \sum_{i=0}^{n_1-1} \beta_3^i \cdot u_{32} \cdot a_{23}\beta_3^{n_1-1-i}. \end{aligned}$$

Далее предположим, что $q = (u_{12}, u_{23}, u_{31}, u_{21}, u_{32}, u_{13}) \in \operatorname{Ker}\delta^1$. Представим компоненты этого 1-коцикла в виде

$$\left.\begin{aligned} u_{12} &= \sum_{w\in\mathcal{B}_{12}} \lambda_w w,\ u_{23} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{23}} \mu_w w,\ u_{31} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{31}} \nu_w w, \\ u_{21} &= \sum_{w\in\mathcal{B}_{21}} \lambda'_w w,\ u_{32} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{32}} \mu'_w w,\ u_{13} = \sum_{w\in\mathcal{B}_{13}} \nu'_w w \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

$(\lambda_w, \mu_w, \nu_w, \lambda'_w, \mu'_w, \nu'_w \in K)$. В этих обозначениях условия $t_{ii} = 0$, $i \in \{1,2,3\}$, равносильны однородной системе линейных уравнений относительно координат $\lambda_{a_{12}}, \mu_{a_{23}}, \nu_{a_{31}}, \lambda'_{a_{21}}, \mu'_{a_{32}}, \nu'_{a_{13}}$ из разложений (4.8) с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} n_3 & 0 & -n_2 & n_3 & 0 & -n_2 \\ -n_3 & n_1 & 0 & -n_3 & n_1 & 0 \\ 0 & -n_1 & n_2 & 0 & -n_1 & n_2 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Таким образом, $\dim_K \operatorname{Ker}\delta^1$ зависит от $\operatorname{rk} C$ (определение матрицы C см. в (2.2)), а решая систему с матрицей (4.9), легко приходим к описанию базиса $\operatorname{Ker}\delta^1$.

Замечание 4.7. В этом описании мы используем дополнительные предположения (которые не умаляют общности ввиду некоторой симметрии соотношений из определения алгебр R_{n_1,n_2,n_3}; – см. (2.1)): если ровно одно из чисел n_1, n_2, n_3 делится на p (в этом случае $\operatorname{rk} C = 2$), то считаем, что это именно n_1, а если ровно одно из этих чисел не делится на p (т.е. $\operatorname{rk} C = 1$), то это n_3.

Предложение 4.8. (а) *Пусть* $\operatorname{rk} C = 2$, *и пусть* p *не делит* $n_2 \cdot n_3$. *Тогда пространство* $\operatorname{Ker} \delta^1$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\left(\alpha_1^i a_{12}, \mathrm{O}_5\right) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.10}$$

$$\left(0, \alpha_2^i a_{23}, \mathrm{O}_4\right) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.11}$$

$$\left(\mathrm{O}_2, \alpha_3^i a_{31}, \mathrm{O}_3\right) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.12}$$

$$\left(\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^i, \mathrm{O}_2\right) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.13}$$

$$\left(\mathrm{O}_4, a_{32}\alpha_2^i, 0\right) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.14}$$

$$\left(\mathrm{O}_5, a_{13}\alpha_3^i\right) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.15}$$

$$\left(n_1 n_2 a_{12}, n_2 n_3 a_{23}, n_1 n_3 a_{31}, \mathrm{O}_3\right), \tag{4.16}$$

$$\left(a_{12}, \mathrm{O}_2, -a_{21}, \mathrm{O}_2\right), \tag{4.17}$$

$$\left(0, a_{23}, \mathrm{O}_2, -a_{32}, 0\right), \left(\mathrm{O}_2, a_{31}, \mathrm{O}_2, -a_{13}\right). \tag{4.18}$$

(б) *Пусть теперь* $\operatorname{rk} C = 1$, *и пусть* p *не делит* n_3. *Тогда пространство* $\operatorname{Ker} \delta^1$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из элементов, указанных в* (4.10)–(4.15), (4.17), *а также из элементов*

$$\left(0, a_{23}, \mathrm{O}_4\right), \left(\mathrm{O}_2, a_{31}, \mathrm{O}_3\right), \tag{4.19}$$

$$\left(\mathrm{O}_4, a_{32}, 0\right), \left(\mathrm{O}_5, a_{13}\right). \tag{4.20}$$

(в) *Пусть, наконец,* $\operatorname{rk} C = 0$ (*т.е.* p *делит все* n_i, $i = 1, 2, 3$). *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker} \delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (б), *элемент из* (4.17) *заменить на пару элементов*

$$\left(a_{12}, \mathrm{O}_5\right), \left(\mathrm{O}_3, a_{21}, \mathrm{O}_2\right).$$

Следствие 4.9.

$$
\begin{aligned}
&\text{(а)} && \dim_K \operatorname{Ker}\delta^1 = 2N - \operatorname{rk} C;\\
&\text{(б)} && \dim_K \operatorname{Im}\delta^1 = \operatorname{rk} C;\\
&\text{(в)} && \dim_K \mathrm{HH}^1(R) = N + 1 - \operatorname{rk} C.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Пункт (а) следует из предложения 4.8, а тогда пункт (б) получается с помощью следствия 4.3. Наконец, пункт (в) получается с использованием предложения 4.4. □

Теперь мы исследуем второй дифференциал комплекса (4.1)

$$\delta^2 = \begin{pmatrix} \widetilde{\rho}_1 & \mathrm{O} \\ \tau_1 & \sigma_2 \end{pmatrix}^* : \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R).$$

Ввиду сделанных выше соглашений он описывается следующей формулой: для $u_{ij} \in e_i R e_j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$,

$$
\begin{aligned}
\delta^2(&u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{12}, u_{23}, u_{31}, u_{21}, u_{32}, u_{13})\\
&= (t_{12}, t_{23}, t_{31}, t_{21}, t_{32}, t_{13}, t_{11}, t_{22}, t_{33}, t'_{11}, t'_{22}, t'_{33}),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&t_{12} = u_{11}a_{12} + a_{12}u_{22}, && t_{23} = u_{22}a_{23} + a_{23}u_{33}, && t_{31} = u_{33}a_{31} + a_{31}u_{11},\\
&t_{21} = -a_{21}u_{11} - u_{22}a_{21}, && t_{32} = -a_{32}u_{22} - u_{33}a_{32}, && t_{13} = -a_{13}u_{33} - u_{11}a_{13},\\
&t_{11} = -u_{12}a_{21} + a_{13}u_{31}, && t_{22} = -u_{23}a_{32} + a_{21}u_{12}, && t_{33} = -u_{31}a_{13} + a_{32}u_{23},\\
&t'_{11} = a_{12}u_{21} - u_{13}a_{31}, && t'_{22} = a_{23}u_{32} - u_{21}a_{12}, && t'_{33} = a_{31}u_{13} - u_{32}a_{23}.
\end{aligned}
$$

Отметим, что здесь мы учли, что $\tau_1^* = 0$ (см. лемму 4.6).

Предложение 4.10. *Пространство* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *допускает (при любом* $\operatorname{rk} C$*) в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов:*

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\alpha_1^i, -\beta_2^i, \mathrm{O}_7\bigr) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1;\\
&\bigl(0, \alpha_2^i, -\beta_3^i, \mathrm{O}_6\bigr) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1;\\
&\bigl(-\beta_1^i, 0, \alpha_3^i, \mathrm{O}_6\bigr) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1;\\
&\bigl(\alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_8\bigr),\ \bigl(0, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_7\bigr),\ \bigl(\mathrm{O}_2, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_6\bigr),\\
&\bigl(\mathrm{O}_3, \alpha_1^{n_3-1}a_{12}, \alpha_2^{n_1-1}a_{23}, \alpha_3^{n_2-1}a_{31}, \mathrm{O}_3\bigr),\\
&\bigl(\mathrm{O}_6, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}\bigr).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Пусть
$$q = (u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{12}, u_{23}, u_{31}, u_{12}, u_{32}, u_{13}) \in \operatorname{Ker} \delta^2.$$
Представим компоненты u_{ij} этого 2-коцикла при $i \neq j$ в виде (4.8) и аналогично положим
$$u_{11} = \sum_{w \in \mathcal{B}_{11}} \widetilde{\lambda}_w w, \quad u_{22} = \sum_{w \in \mathcal{B}_{22}} \widetilde{\mu}_w w, \quad u_{33} = \sum_{w \in \mathcal{B}_{33}} \widetilde{\nu}_w w \tag{4.21}$$
$(\widetilde{\lambda}_w, \widetilde{\mu}_w, \widetilde{\nu}_w \in K)$. Тогда условия $t_{12} = t_{23} = t_{31} = 0$ приводят к соотношениям
$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\lambda}_{e_1} + \widetilde{\mu}_{e_2} &= 0,\\ \widetilde{\mu}_{e_2} + \widetilde{\nu}_{e_3} &= 0,\\ \widetilde{\nu}_{e_3} + \widetilde{\lambda}_{e_1} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$
$$\widetilde{\lambda}_{\alpha_1^i} + \widetilde{\mu}_{\beta_2^i} = 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1, \tag{4.23}$$
$$\widetilde{\mu}_{\alpha_2^i} + \widetilde{\nu}_{\beta_3^i} = 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1, \tag{4.24}$$
$$\widetilde{\nu}_{\alpha_3^i} + \widetilde{\lambda}_{\beta_1^i} = 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1. \tag{4.25}$$
К этим же соотношениям приводят условия $t_{21} = t_{32} = t_{13} = 0$. Так как $p \neq 2$, то из (4.22) сразу следует, что
$$\widetilde{\lambda}_{e_1} = \widetilde{\mu}_{e_2} = \widetilde{\nu}_{e_3} = 0.$$

Далее, условия $t_{ii} = 0$ для $i = 1, 2, 3$ равносильны следующим условиям:
$$\lambda_{\alpha_1^i a_{12}} = 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 2, \tag{4.26}$$
$$\mu_{\alpha_2^i a_{23}} = 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 2, \tag{4.27}$$
$$\nu_{\alpha_3^i a_{31}} = 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 2; \tag{4.28}$$
$$\lambda_{\alpha_1^{n_3-1} a_{12}} = \mu_{\alpha_2^{n_1-1} a_{23}} = \nu_{\alpha_3^{n_2-1} a_{31}}. \tag{4.29}$$
Наконец, по симметрии получаем, что условия: $t'_{ii} = 0$ для $i = 1, 2, 3$, равносильны следующим условиям:
$$\lambda'_{a_{21} \alpha_1^i} = 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 2, \tag{4.30}$$
$$\mu'_{a_{32} \alpha_2^i} = 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 2, \tag{4.31}$$
$$\nu'_{a_{13} \alpha_3^i} = 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 2; \tag{4.32}$$
$$\lambda'_{a_{21} \alpha_1^{n_3-1}} = \mu'_{a_{32} \alpha_2^{n_1-1}} = \nu'_{a_{13} \alpha_3^{n_2-1}}. \tag{4.33}$$

Теперь простой анализ соотношений (4.23)–(4.33) доказывает приведённое выше описание базиса пространства $\operatorname{Ker}\delta^2$. □

Следствие 4.11.

(а) $\dim_K \operatorname{Ker}\delta^2 = N+2$;

(б) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^2 = 3N-2$;

(в) $\dim_K \operatorname{HH}^2(R) = N+2-\operatorname{rk} C$.

Доказательство. Приведённые в следствии соотношения вытекают из предыдущих вычислений. □

В матрице дифференциала

$$\delta^3 = \begin{pmatrix} \widetilde{\rho}_2 & \widetilde{\sigma}_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\tau_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}^* : \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R)$$

ввиду леммы 4.6 имеем $(\widetilde{\sigma}_1)^* = 0$. Поэтому если для $u_{ij} \in e_iRe_j$, $i,j \in \{1,2,3\}$, и $u'_{ii} \in e_iRe_i$, $i \in \{1,2,3\}$, элемент

$$q = (u_{12}, u_{23}, u_{31}, u_{21}, u_{32}, u_{13}, u_{11}, u_{22}, u_{33}, u'_{11}, u'_{22}, u'_{33})$$

лежит в $\operatorname{Ker}\delta^3$, то вектор, состоящий из первых шести компонент q, лежит в $\operatorname{Ker}(\widetilde{\rho}_2)^*$, а вектор, состоящий из последних шести компонент, лежит в

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -\tau_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}^* = \operatorname{Ker}(\tau_2)^* \cap \operatorname{Ker}(\sigma_3)^*.$$

Вновь запишем u_{ij}, $i \neq j$, в виде (4.8). Тогда аналогично исследованию $\operatorname{Ker}\delta^1$, проведённому выше, получаем, что $\lambda_{a_{12}}, \mu_{a_{23}}, \nu_{a_{31}}, \lambda'_{a_{21}}, \mu'_{a_{32}}, \nu'_{a_{13}}$ удовлетворяют однородной системе линейных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} n_3 & 0 & n_2 & n_3 & 0 & n_2 \\ n_3 & n_1 & 0 & n_3 & n_1 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & 0 & n_1 & n_2 \end{pmatrix},$$

и потому размерность $\operatorname{Ker}(\widetilde{\rho}_2)^*$ зависит от $\operatorname{rk} C_1$ (см. определение матрицы C_1 в (2.3)).

Замечание 4.12. В случае, когда $\operatorname{rk} C_1 = 2$, ровно одно из чисел $\{n_i\}_{i=1}^3$ делится на p, и мы всегда будем предполагать, что $p \mid n_1$. Аналогично, не умаляя общности, в случае, когда $\operatorname{rk} C_1 = 1$, считаем, что $p \mid n_i$ для $i \in \{1,2\}$.

С другой стороны, представляя u_{ii}, $i \in \{1,2,3\}$, в виде (4.21), из условия $(\sigma_3')^*(u_{11},u_{22},u_{33}) = 0$ (см. обозначения из (3.2)) выводим, что

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{e_1} + \mu_{e_2} &= 0,\\ \mu_{e_2} + \nu_{e_3} &= 0,\\ \nu_{e_3} + \lambda_{e_1} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha_1^i} + \mu_{\beta_2^i} &= 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1,\\ \mu_{\alpha_2^i} + \nu_{\beta_3^i} &= 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1,\\ \nu_{\alpha_3^i} + \lambda_{\beta_1^i} &= 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1. \end{aligned}$$

Но условие $(\tau_2')^*(u_{11},u_{22},u_{33}) = 0$ равносильно соотношению

$$\lambda_{e_1} = \mu_{e_2} = \nu_{e_3},$$

и ввиду (4.34) получаем, что на самом деле $\lambda_{e_1} = \mu_{e_2} = \nu_{e_3} = 0$. Аналогично анализируются соотношения, связывающие $u_{11}', u_{22}', u_{33}'$, а именно, соотношения $(\sigma_3'')^*(u_{11}',u_{22}',u_{33}') = 0$ и $(t_2'')^*(u_{11}',u_{22}',u_{33}') = 0$, и мы приходим (ср. с доказательствами предложений 4.8 и 4.10) к следующему описанию базиса $\operatorname{Ker}\delta^3$.

Предложение 4.13. (a) *Пусть* $\operatorname{rk} C_1 = 3$. *Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1^i a_{12}, \mathrm{O}_{11}) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1;\\
&(0, \alpha_2^i a_{23}, \mathrm{O}_{10}) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1;\\
&(\mathrm{O}_2, \alpha_3^i a_{31}, \mathrm{O}_9) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1;\\
&(\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^i, \mathrm{O}_8) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1;\\
&(\mathrm{O}_4, a_{32}\alpha_2^i, \mathrm{O}_7) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1;\\
&(\mathrm{O}_5, a_{13}\alpha_3^i, \mathrm{O}_6) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1;\\
&\left.\begin{aligned}&(a_{12}, \mathrm{O}_2, -a_{21}, \mathrm{O}_8),\ (0, a_{23}, \mathrm{O}_2, -a_{32}, \mathrm{O}_7),\\ &(\mathrm{O}_2, a_{31}, \mathrm{O}_2, -a_{13}, \mathrm{O}_6);\end{aligned}\right\} \qquad (4.35)\\
&(\mathrm{O}_6, \alpha_1^i, -\beta_2^i, \mathrm{O}_4) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1;\\
&(\mathrm{O}_7, \alpha_2^i, -\beta_3^i, \mathrm{O}_3) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1;\\
&(\mathrm{O}_6, -\beta_1^i, 0, \alpha_3^i, \mathrm{O}_3) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1;\\
&(\mathrm{O}_9, \alpha_1^i, -\beta_2^i, 0) \ \textit{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{O}_{10}, \alpha_2^i, -\beta_3^i\big) \ \textit{для} \ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1;\\
&\big(\mathrm{O}_9, -\beta_1^i, 0, \alpha_3^i\big) \ \textit{для} \ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1;\\
&\big(\mathrm{O}_6, \alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_5\big), \ \big(\mathrm{O}_7, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_4\big), \ \big(\mathrm{O}_8, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_3\big),\\
&\big(\mathrm{O}_9, \alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_2\big), \ \big(\mathrm{O}_{10}, \alpha_2^{n_1}, 0\big), \ \big(\mathrm{O}_{11}, \alpha_3^{n_2}\big).
\end{aligned}$$

(б) *Пусть теперь* $\operatorname{rk} C_1 = 2$, *и пусть* p *не делит* $n_2 \cdot n_3$. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker} \delta^3$ *в множестве, указанном в пункте* (а), *элемент* $\big(0, a_{23}, \mathrm{O}_2, -a_{32}, \mathrm{O}_7\big)$ *из* (4.35) *надо заменить на пару элементов* $\big(0, a_{23}, \mathrm{O}_{10}\big), \big(\mathrm{O}_4, a_{32}, \mathrm{O}_7\big)$.

(в) *Если* $\operatorname{rk} C_1 = 1$ *и* p *не делит* n_3, *то для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker} \delta^3$ *в множестве, указанном в пункте* (б), *элемент* $\big(\mathrm{O}_2, a_{31}, \mathrm{O}_2, -a_{13}, \mathrm{O}_6\big)$ *из* (4.35) *надо заменить на пару элементов* $\big(\mathrm{O}_2, a_{31}, \mathrm{O}_9\big), \big(\mathrm{O}_5, a_{13}, \mathrm{O}_6\big)$.

(г) *Пусть, наконец,* $\operatorname{rk} C_1 = 0$. *Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker} \delta^3$ *надо в множестве, указанном в части* (в), *элемент* $\big(a_{12}, \mathrm{O}_2, -a_{21}, \mathrm{O}_8\big)$ *из* (4.35) *заменить на пару элементов*

$$\big(a_{12}, \mathrm{O}_{11}\big), \ \big(\mathrm{O}_3, a_{21}, \mathrm{O}_8\big).$$

Следствие 4.14.

$$\begin{aligned}
&\text{(а)} \qquad \dim_K \operatorname{Ker} \delta^3 = 4N - \operatorname{rk} C_1;\\
&\text{(б)} \qquad \dim_K \operatorname{Im} \delta^3 = 2N + \operatorname{rk} C_1;\\
&\text{(в)} \qquad \dim_K \mathrm{HH}^3(R) = N + 2 - \operatorname{rk} C_1.
\end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение о размерности группы $\mathrm{HH}^3(R)$ следует из описания размерности $\operatorname{Ker} \delta^3$, а также из следствия 4.11. □

Аналогично предыдущему осуществляется описание ядра дифференциала

$$\delta^4 = \begin{pmatrix} \rho_1 & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ -\widetilde{\tau}_1 & \widetilde{\sigma}_2 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \tau_3 & \widetilde{\sigma}_1 \end{pmatrix}^* : \ \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_5, R).$$

Ввиду леммы 4.6 в матрице этого дифференциала $(\widetilde{\tau}_1)^* = 0$ и $(\widetilde{\sigma}_1)^* = 0$, кроме того, $\rho_1^* = \delta^0$. Поэтому

$$\operatorname{Ker} \delta^4 = \operatorname{Ker} \delta^0 \oplus \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}^*.$$

Пусть

$$q := (u_{12}, u_{23}, u_{31}, u_{21}, u_{32}, u_{13}, u'_{12}, u'_{23}, u'_{31}, u'_{21}, u'_{32}, u'_{13})$$

лежит в $\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}^*$. Компоненты $u_{ij}, i \neq j$, представим в виде (4.8). Аналогично компоненты $u'_{ij}, i \neq j$, запишем в виде

$$\begin{aligned} u'_{12} &= \sum_{w \in \mathcal{B}_{12}} \zeta_w w,\ u'_{23} = \sum_{w \in \mathcal{B}_{23}} \eta_w w,\ u'_{31} = \sum_{w \in \mathcal{B}_{31}} \theta_w w, \\ u'_{21} &= \sum_{w \in \mathcal{B}_{21}} \zeta'_w w,\ u'_{32} = \sum_{w \in \mathcal{B}_{32}} \eta'_w w,\ u'_{13} = \sum_{w \in \mathcal{B}_{13}} \theta'_w w. \end{aligned}$$

Тогда условие $q \in \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}^*$ приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha_1^i a_{12}} &= \lambda'_{a_{21}\alpha_1^i} = 0 \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant n_3 - 2, \\ \mu_{\alpha_2^i a_{23}} &= \mu'_{a_{32}\alpha_2^i} = 0 \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant n_1 - 2, \\ \nu_{\alpha_3^i a_{31}} &= \nu_{a_{13}\alpha_3^i} = 0 \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant n_2 - 2, \end{aligned}$$

а также к двум однородным системам линейных уравнений относительно

$$\lambda_{\alpha_1^{n_3-1} a_{12}}, \mu_{\alpha_2^{n_1-1} a_{23}}, \nu_{\alpha_3^{n_2-1} a_{31}}, \zeta'_{a_{21}}, \eta'_{a_{32}}, \theta'_{a_{13}}$$

и соответственно относительно

$$\lambda'_{a_{21}\alpha_1^{n_3-1}}, \mu'_{a_{32}\alpha_2^{n_1-1}}, \nu'_{a_{13}\alpha_3^{n_2-1}}, \zeta_{a_{12}}, \eta_{a_{23}}, \theta_{a_{31}}$$

с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Простой анализ этих систем уравнений с учётом доказательства предложения 4.4 приводит к следующему описанию базиса $\operatorname{Ker} \delta^4$.

Предложение 4.15. *Пространство* $\operatorname{Ker}\delta^4$ *допускает* (*при любых* $\operatorname{rk} C$ *и* $\operatorname{rk} C_1$) *в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_1^i, \beta_2^i, \mathrm{O}_{13}) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1;\\
&(0, \alpha_2^i, \beta_3^i, \mathrm{O}_{12}) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1;\\
&(\beta_1^i, 0, \alpha_3^i, \mathrm{O}_{12}) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1;\\
&(\mathrm{O}_9, \alpha_1^i a_{12}, \mathrm{O}_5) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1;\\
&(\mathrm{O}_{10}, \alpha_2^i a_{23}, \mathrm{O}_4) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1;\\
&(\mathrm{O}_{11}, \alpha_3^i a_{31}, \mathrm{O}_3) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1;\\
&(\mathrm{O}_{12}, \beta_2^i a_{21}, \mathrm{O}_2) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1;\\
&(\mathrm{O}_{13}, \beta_3^i a_{32}, 0) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1;\\
&(\mathrm{O}_{14}, \beta_1^i a_{13}) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1;\\
&(e_1, e_2, e_3, \mathrm{O}_{12}),\ (\alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_{14}),\ (0, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_{13}),\ (\mathrm{O}_2, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_{12}),\\
&(\mathrm{O}_3, \alpha_1^{n_3-1} a_{12}, 0, -\alpha_3^{n_2-1} a_{31}, \mathrm{O}_7, a_{32}, 0),\\
&(\mathrm{O}_3, -\alpha_1^{n_3-1} a_{12}, \alpha_2^{n_1-1} a_{23}, \mathrm{O}_9, a_{13}),\\
&(\mathrm{O}_4, -\alpha_2^{n_1-1} a_{23}, \alpha_3^{n_2-1} a_{31}, \mathrm{O}_6, a_{22}, \mathrm{O}_2),\\
&(\mathrm{O}_6, \beta_2^{n_3-1} a_{21}, 0, -\beta_1^{n_2-1} a_{13}, 0, a_{23}, \mathrm{O}_4),\\
&(\mathrm{O}_6, -\beta_2^{n_3-1} a_{21}, \beta_3^{n_1-1} a_{32}, \mathrm{O}_3, a_{31}, \mathrm{O}_3),\\
&(\mathrm{O}_7, -\beta_3^{n_1-1} a_{32}, \beta_1^{n_2-1} a_{13}, a_{12}, \mathrm{O}_5).
\end{aligned}
$$

Следствие 4.16.

$$
\begin{aligned}
&(\text{а}) \qquad \dim_K \operatorname{Ker}\delta^4 = 3N + 1;\\
&(\text{б}) \qquad \dim_K \mathrm{HH}^4(R) = N + 1 - \operatorname{rk} C_1.
\end{aligned}
$$

Пусть $\mathcal{X}^\bullet := \operatorname{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$, где $X_\bullet$ – комплекс из предложения 3.2. Как и выше, мы отождествляем элементы

$$f \in \operatorname{Hom}_\Lambda(X_n, R) \subset \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$$

с соответствующими наборами значений $f(e_i \otimes e_j)$ (см. замечание 4.1).

Из описания бимодульной резольвенты алгебры R, построенной в §3, вытекает, что комплекс $\mathcal{X}^\bullet$ в больших степенях 6-периодичен; более точно, при $n \geqslant 9$

$$\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet} = \delta^{n-6}_{\mathcal{X}^\bullet},$$

и, следовательно,

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^{n-6}(\mathcal{X}^\bullet)$$

при $n \geqslant 10$. Кроме того, $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = \mathrm{HH}^n(R)$ при $0 \leqslant n \leqslant 2$.

В следующем предложении мы опишем $\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ для $4 \leqslant n \leqslant 9$.

Предложение 4.17.

$$\begin{aligned}
&\dim_K \mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet) = 0,\\
&\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 2 \ \ \textit{для} \ \ n \in \{5, 9\},\\
&\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 4 \ \ \textit{для} \ \ n \in \{6, 7, 8\}.
\end{aligned}$$

Доказательство. 1) Аналогично доказательству предложения 4.8, а также замечанию 4.5 устанавливаем, что в качестве базиса пространства $\operatorname{Ker} \delta^4_{\mathcal{X}^\bullet}$ можно взять множество, состоящее из элементов

$$\big(\,\mathrm{O}_6, \alpha_1^i a_{12}, \mathrm{O}_5\,\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.36}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_7, \alpha_2^i a_{23}, \mathrm{O}_4\,\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.37}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_8, \alpha_3^i a_{31}, \mathrm{O}_3\,\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.38}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_9, a_{21}\alpha_1^i, \mathrm{O}_2\,\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.39}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_{10}, a_{32}\alpha_2^i, 0\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.40}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_{11}, a_{13}\alpha_3^i\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.41}$$

$$\begin{gathered}\big(0, -\alpha_2^{n_1-1}a_{23}, \alpha_3^{n_2-1}a_{31}, \mathrm{O}_6, a_{21}, \mathrm{O}_2\,\big),\\ \big(\alpha_1^{n_3-1}a_{12}, 0, -\alpha_3^{n_2-1}a_{31}, \mathrm{O}_7, a_{32}, 0\big),\end{gathered} \tag{4.42}$$

$$\begin{gathered}\big(-\alpha_1^{n_3-1}a_{12}, \alpha_2^{n_1-1}a_{23}, \mathrm{O}_9, a_{13}\big),\\ \big(\,\mathrm{O}_4, -a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, a_{12}, \mathrm{O}_2\,\big),\end{gathered} \tag{4.43}$$

$$\begin{gathered}\big(a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, 0, -a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, 0, a_{23}, \mathrm{O}_4\,\big),\\ \big(\,\mathrm{O}_3, -a_{12}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, \mathrm{O}_3, a_{31}, \mathrm{O}_3\,\big),\end{gathered} \tag{4.44}$$

а для пространства $\operatorname{Im} \delta^4_{\mathcal{X}^\bullet}$ в качестве базиса можно взять множество, состоящее из элементов

$$\big(\alpha_1^i, \beta_2^i, \mathrm{O}_{10}\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.45}$$
$$\big(0, \alpha_2^i, \beta_3^i, \mathrm{O}_9\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.46}$$
$$\big(\beta_1^i, 0, \alpha_3^i, \mathrm{O}_9\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.47}$$
$$\big(\mathrm{O}_3, \alpha_1^i, \beta_2^i, \mathrm{O}_7\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_3 - 1; \tag{4.48}$$
$$\big(\mathrm{O}_4, \alpha_2^i, \beta_3^i, \mathrm{O}_6\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1; \tag{4.49}$$
$$\big(\mathrm{O}_3, \beta_1^i, 0, \alpha_3^i, \mathrm{O}_6\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n_2 - 1; \tag{4.50}$$
$$\big(\alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_{11}\big),\ \big(0, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_{10}\big),\ \big(\mathrm{O}_2, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_{11}\big), \tag{4.51}$$
$$\big(\mathrm{O}_3, \alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_8\big),\ \big(\mathrm{O}_4, \alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_7\big),\ \big(\mathrm{O}_5, \alpha_3^{n_2}, \mathrm{O}_6\big). \tag{4.52}$$

Но такими же вычислениями показывается, что $\operatorname{Im}\delta^3_{\mathcal{X}^\bullet}$ допускает в качестве базиса множество, состоящее из элементов, указанных в (4.36)–(4.44), и потому $\mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet) = 0$.

2) Вновь прямыми вычислениями показывается, что базисом для пространства $\operatorname{Ker}\delta^5_{\mathcal{X}^\bullet}$ служит множество, состоящее из элементов, указанных в (4.45)–(4.52), а также из элементов

$$\big(e_1, e_2, e_3, \mathrm{O}_9\big),\ \big(\mathrm{O}_3, e_1, e_2, e_3, \mathrm{O}_6\big), \tag{4.53}$$

и, следовательно, классы элементов из (4.53) образуют базис $\mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet)$.

3) Аналогичные вычисления, детальное проведение которых мы оставляем читателю, показывают, что классы элементов

$$\big(a_{12}, \mathrm{O}_{11}\big),\ \big(\mathrm{O}_3, a_{21}, \mathrm{O}_8\big), \tag{4.54}$$
$$\big(\mathrm{O}_6, e_1, e_2, e_3, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_9, e_1, e_2, e_3\big) \tag{4.55}$$

образуют базис пространства $\mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet)$, классы элементов

$$\big(\alpha_1^{n_3-1}a_{12}, \alpha_2^{n_1-1}a_{23}, \alpha_3^{n_2-1}a_{31}, \mathrm{O}_9\big),\ \big(-\alpha^{n_3-1}a_{12}, \mathrm{O}_8, a_{21}, \mathrm{O}_2\big), \tag{4.56}$$
$$\left.\begin{array}{l}\big(\mathrm{O}_3, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}, \mathrm{O}_6\big),\\ \big(\mathrm{O}_3, -a_{21}\alpha^{n_3-1}, \mathrm{O}_2, a_{12}, \mathrm{O}_5\big)\end{array}\right\} \tag{4.57}$$

образуют базис пространства $\mathrm{H}^7(\mathcal{X}^\bullet)$, классы элементов

$$\left.\begin{array}{l}\big(\alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_{11}\big),\ \big(\mathrm{O}_3, \alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_8\big),\\ \big(\mathrm{O}_6, \alpha_1^{n_3-1}a_{12}, \alpha_2^{n_1-1}a_{23}, \alpha_3^{n_2-1}a_{31}, \mathrm{O}_3\big),\end{array}\right\} \tag{4.58}$$
$$\big(\mathrm{O}_9, a_{21}\alpha_1^{n_3-1}, a_{32}\alpha_2^{n_1-1}, a_{13}\alpha_3^{n_2-1}\big) \tag{4.59}$$

образуют базис $\mathrm{H}^8(\mathcal{X}^\bullet)$, и, наконец, классы элементов

$$\left(\mathrm{O}_6, \alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_5\right), \ \left(\mathrm{O}_9, \alpha_1^{n_3}, \mathrm{O}_2\right) \tag{4.60}$$

образуют базис $\mathrm{H}^9(\mathcal{X}^\bullet)$. □

Замечание 4.18. Отметим для полноты информации, что с помощью аналогичных вычислений доказывается, что

$$\dim_K \mathrm{H}^3(\mathcal{X}^\bullet) = N + 2.$$

Предложение 4.19. *Для* $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R)$$
$$= \begin{cases} 0, & \textit{если } n \equiv 0 \ \textit{ или } \ 4 \ \textit{ или } \ 5 \pmod 6, \\ 2, & \textit{если } n \equiv 1 \ \textit{ или } \ 3 \pmod 6, \\ 4, & \textit{если } n \equiv 2 \pmod 6. \end{cases}$$

Доказательство. Короткая точная последовательность (3.3) после применения функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(\,-\,, R)$ даёт короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{\imath^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

которая, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\imath^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots \ . \tag{4.61}$$

Из точности этой последовательности получаем соотношение

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \dim_K \mathrm{Ker}\,\Delta^n - \dim_K \mathrm{Im}\,\Delta^{n-1}. \tag{4.62}$$

Таким образом, нам достаточно описать ядра и образы связывающих гомоморфизмов из последовательности (4.61).

Лемма 4.20. *Для* $n \geqslant 4$

(а) $$\dim_K \mathrm{Im}\,\Delta^n = \begin{cases} 2, & \textit{если } n \equiv 0 \ \textit{ или } \ 5 \pmod 6, \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(б) $$\dim_K \mathrm{Ker}\,\Delta^n = \begin{cases} 0, & \textit{если } n \equiv 4 \ \textit{ или } \ 5 \pmod 6, \\ 2, & \textit{если } n \equiv 0 \ \textit{ или } \ 3 \pmod 6, \\ 4, & \textit{если } n \equiv 1 \ \textit{ или } \ 2 \pmod 6. \end{cases}$$

Доказательство. Напомним, что связывающий гомоморфизм Δ^n строится следующим образом. Пусть $u \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$, и пусть

$$\widetilde{u} := (\mathrm{O}, u) \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R) \tag{4.63}$$

– доопределение u нулём на всё $Q_n = Q_{n-4} \oplus X_n$. Так как $\imath^*(\widetilde{u}) = u$, то существует $v \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R)$ такой, что $\pi^*(v) = \delta^n(\widetilde{u})$, при этом v – коцикл, и тогда полагают $\Delta(\operatorname{cl} u) := \operatorname{cl} v$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R) & \xrightarrow{\pi^*} & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R) & \xrightarrow{\imath^*} & \mathcal{X}^n & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\delta^{n-4}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta^n} & & \downarrow{\scriptstyle\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}} & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R) & \xrightarrow{\pi^*} & \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n+1}, R) & \xrightarrow{\imath^*} & \mathcal{X}^{n+1} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Так как $X_n = B_{1,n-1} \oplus B_{0,n}$ (где $B_{\bullet\bullet}$ из (3.2)), то нам будет удобно представлять $u \in \operatorname{Hom}_\Lambda(X_n, R)$ в виде $u = (u', u'')$, где

$$u' \in \operatorname{Hom}_\Lambda(B_{1,n-1}, R), \quad u'' \in \operatorname{Hom}_\Lambda(B_{0,n}, R),$$

при этом, как обычно, u', u'' описываются наборами своих значений на образующих неразложимых прямых слагаемых Λ-модулей $B_{1,n-1}, B_{0,n}$ (ср. замечание 4.1).

1) Предположим, что $n \equiv 0 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$, и пусть $u = (u', u'') \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$. Ввиду описания базиса для $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet)$, полученного в доказательстве предложения 4.17, можем считать, что u – один из элементов, приведённых в (4.54), (4.55). Заметим, что дифференциал d^Q_n имеет следующий блочно-треугольный вид:

$$d^Q_n = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{d^Q_{n-4}} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & -\tau_3 & \sigma_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \tau_2 & \widetilde{\sigma}_3 \end{array}\right).$$

При этом в матрице дифференциала d^Q_{n-4} в правом нижнем углу стоит 6×6-блок, равный σ_2. Тогда (в предыдущих обозначениях) имеем

$$\delta^n(\widetilde{u}) = \big(\mathrm{O}, -\tau_3^*(u'), \mathrm{O}_{12}\big).$$

Для $u_1 = \big(a_{12}, \mathrm{O}_{11}\big)$

$$\delta^n(\widetilde{u}_1) = \big(\mathrm{O}, -\alpha_1^{n_3}, -\alpha_2^{n_1}, \mathrm{O}_{13}\big) = \pi^*(v_1),$$

где $v_1 = \big(\mathrm{O}, -\alpha_1^{n_3}, -\alpha_2^{n_1}, 0\big)$. Но легко видеть, что $\big(\mathrm{O}_3, -\alpha_1^{n_3}, -\alpha_2^{n_1}, 0\big)$ не лежит в $\operatorname{Im} \sigma_2^*$, тогда $v_1 \notin \operatorname{Im} \delta^{n-4}$, и потому $\Delta(\operatorname{cl} u_1) \neq 0$. Для $u_2 = \big(\mathrm{O}_3, a_{21}, \mathrm{O}_8\big)$ аналогично доказывается, что также $\Delta(\operatorname{cl} u_2) \neq 0$.

При этом если u – один из элементов, указанных в (4.55), то сразу ясно, что $\delta^n(\widetilde{u}) = 0$, и потому элементы из (4.55) лежат в $\operatorname{Ker}\Delta^n$. Таким образом, в этом случае

$$\dim_K \operatorname{Im}\Delta^n = \dim_K \operatorname{Ker}\Delta^n = 2.$$

2) Предположим, что $n \equiv 1 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$, и пусть $u \in \operatorname{Ker}\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$. Ввиду описания базиса для $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^7(\mathcal{X}^\bullet)$, полученного в доказательстве предложения 4.17, можем считать, что u – один из элементов, приведённых в (4.56), (4.57). Сейчас дифференциал d^Q_n имеет следующий вид:

$$d^Q_n = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{d^Q_{n-4}} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & \widetilde{\tau}_1 & \sigma_2 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & -\tau_3 & \sigma_1 \end{array}\right),$$

но ввиду леммы 4.6 $(\widetilde{\tau}_1)^* = 0$, и потому сразу получаем, что $\delta^n(\widetilde{u}) = 0$. Следовательно, $\Delta^n = 0$, таким образом, в этом случае

$$\dim_K \operatorname{Im}\Delta^n = 0, \quad \dim_K \operatorname{Ker}\Delta^n = 4.$$

3) Предположим, что $n \equiv 2 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$, и пусть $u \in \operatorname{Ker}\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$. Ввиду описания базиса для $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^8(\mathcal{X}^\bullet)$, полученного в доказательстве предложения 4.17, можем считать, что u – один из элементов, приведённых в (4.58), (4.59). Сейчас дифференциал d^Q_n имеет следующий вид:

$$d^Q_n = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{d^Q_{n-4}} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & -\widetilde{\tau}_2 & \sigma_3 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \tau_1 & \sigma_2 \end{array}\right).$$

Тогда сразу ясно, что (вновь в обозначениях из (4.63)) имеем $\delta^n(\widetilde{u}) = 0$, следовательно, $\Delta^n = 0$, и, таким образом, в этом случае

$$\dim_K \operatorname{Im}\Delta^n = 0, \quad \dim_K \operatorname{Ker}\Delta^n = 4.$$

4) Предположим, что $n \equiv 3 \pmod 6$ $(n \geqslant 4)$, и пусть $u \in \operatorname{Ker}\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$. Вновь можно считать, что u – это один из элементов, приведённых в (4.60), и тогда, учитывая вид этих элементов, сразу получаем, что $\Delta^n = 0$, и, таким образом,

$$\dim_K \operatorname{Im}\Delta^n = 0, \quad \dim_K \operatorname{Ker}\Delta^n = 2.$$

5) Если $n \equiv 4 \pmod 6$, то $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet) = 0$, и потому

$$\dim_K \operatorname{Im} \Delta^n = \dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n = 0.$$

6) Предположим, что $n \equiv 5 \pmod 6$, и пусть $u \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$ – один из элементов, приведённых в (4.53). Сейчас дифференциал d_n^Q имеет следующий вид:

$$d_n^Q = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{d_{n-4}^Q} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ \hline \mathrm{O} & \widetilde{\tau}_2 & \widetilde{\sigma}_3 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & -\tau_1 & \widetilde{\sigma}_2 \end{array} \right).$$

При этом в матрице дифференциала d_{n-4}^Q в правом нижнем углу стоит 6×6-блок, равный σ_1. Пусть $u := \big(e_1, e_2, e_3, \mathrm{O}_9\,\big)$. Тогда (в предыдущих обозначениях) имеем

$$\begin{aligned} \delta^n(\widetilde{u}) &= \big(\,\mathrm{O}, \alpha_1^{n_3-1} a_{12}, \alpha_2^{n_1-1} a_{23}, \alpha_2^{n_2-1} a_{31}, \mathrm{O}_{15}\,\big) \\ &= \pi^*\big(\,\mathrm{O}, \alpha_1^{n_3-1} a_{12}, \alpha_2^{n_1-1} a_{23}, \alpha_2^{n_2-1} a_{31}, \mathrm{O}_3\,\big). \end{aligned}$$

Легко видеть, что соответствующий “отрезок” элемента

$$\big(\,\mathrm{O}, \alpha_1^{n_3-1} a_{12}, \alpha_2^{n_1-1} a_{23}, \alpha_2^{n_2-1} a_{31}, \mathrm{O}_3\,\big),$$

а именно,

$$\big(\alpha_1^{n_3-1} a_{12}, \alpha_2^{n_1-1} a_{23}, \alpha_2^{n_2-1} a_{31}, \mathrm{O}_3\,\big),$$

не лежит в $\operatorname{Im}(\sigma_1'')^*$, и потому $\Delta(\operatorname{cl} u) \neq 0$. Для $u := \big(\,\mathrm{O}_3, e_1, e_2, e_3, \mathrm{O}_6\,\big)$ аналогично получаем, что $\Delta(\operatorname{cl} u) \neq 0$. Следовательно,

$$\dim_K \operatorname{Im} \Delta^n = 2, \quad \dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n = 0.$$

□

Из леммы 4.20 следует, что при $n \geqslant 5$

$$\begin{aligned} &\dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n - \dim_K \operatorname{Im} \Delta^{n-1} \\ &\quad = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 0 \ \text{ или } \ 4 \ \text{ или } \ 5 \pmod 6, \\ 2, & \text{если } n \equiv 1 \ \text{ или } \ 3 \pmod 6, \\ 4, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 6, \end{cases} \end{aligned}$$

и это с учётом формулы (4.62) завершает доказательство предложения 4.19. □

Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана.

Следствие 4.21. *Для любого* $n \geqslant 13$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-12}(R) = 4.$$

Доказательство. Доказательство проводится с помощью последовательного рассмотрения всех возможных остатков n по модулю 12. $\square$

Литература

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике* 2. — Алгебра и анализ, **16**, No. 6 (2004), 53–122.
2. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lect. Notes Math., **1428** (1990).
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ, **18**, No. 1 (2006), 55–107.
4. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II. *Серия* $Q(2\mathcal{B})_1$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **349** (2007), 53–134.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **356** (2008), 46–84.
6. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия* $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ *над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып.1 (2010), 63–72.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 92–129.
8. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 28–38.
9. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 67–104.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ, **21**, No. 2 (2009), 1–51.
11. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 144–202.
12. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **400** (2012), 133–157.

13. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* IV. *Алгебра когомологий для серии $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ при $c=0$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **413** (2013), 45–92.
14. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ, **18**, No. 4 (2006), 39–82.
15. K. Erdmann, Th. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n*, II. — Algebras and Repr.Theory, **5** (2002), 457–482.
16. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **321** (2005), 36–66.
17. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **330** (2006), 173–200.
18. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 210–246.
19. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **343** (2007), 121–182.
20. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **365** (2009), 63–121.
21. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 100–128.
22. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 48–99.
23. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. — Алгебра и анализ, **23**, No.5 (2011), 99–139.
24. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 100–118.
25. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **394** (2011), 140–173.
26. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа E_6*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 205–243.
27. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 61–70.
28. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* II. — Алгебра и анализ, **13**, No. 1 (2002), 3–25.

Generalov A. I., Zilberbord I. M., Romanova D. B. Hochschild cohomology for algebras of dihedral type. V. The family $D(3\mathcal{K})$ in characteristic different from 2.

We compute the Hochschild cohomology groups for algebras of dihedral type which form the family $D(3\mathcal{K})$ (from the famous K.Erdmann's classification) over an algebraically closed field with characteristic different from 2. In the calculation, we use the beforehand construction of the bimodule resolution for algebras from the family under discussion.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com
E-mail: igorr-5@yandex.ru
E-mail: dashhh@gmail.com

Поступило 31 октября 2014 г.