Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 430, 2014 г.

А. И. Генералов

ЗАМЕТКА О ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРЕДТРИАНГУЛИРОВАННЫХ КАТЕГОРИЙ

1. Теория локализации триангулированных категорий, имеющая довольно заметное число применений, была развита, и весьма подробно, Вердье [1] (см. также [2]). Один из инструментов теории – понятие локализующего класса морфизмов, согласованного с триангуляцией. Одно из условий "согласованности" в определении этого понятия – это некоторое условие (S6) (см. определение ниже). Как следует из анализа доказательств, это условие накладывают на локализующий класс для того, чтобы обеспечить выполнение аксиомы TR3 (в обозначениях из [1]) для "локализованной" категории $\mathcal{D}[\mathcal{S}^{-1}]$, полученной из триангулированной категории $\mathcal{D}$ "обращением" стрелок из $\mathcal{S}$. Позднее оказалось [3] (см. также последний раздел настоящей статьи), что аксиома TR3 вытекает из остальных аксиом триангулированной категории, и, таким образом, условие (S6) оказывается излишним (конечно, надо заметить, что если $\mathcal{S}$ – насыщенный локализующий класс, совместимый с триангуляцией, то условие (S6) в $\mathcal{S}$ выполняется автоматически).

С другой стороны, автору в [4] удалось распространить Вердьевскую теорию локализации на предтриангулированные категории (в которых, в отличие от триангулированных категорий, не требуется выполнение аксиомы октаэдра). В этом случае выполнение аксиомы TR3 в локализованной категории должно-таки гарантироваться некоторым условием, накладываемым на класс $\mathcal{S}$. В настоящей заметке мы предлагаем некоторое ослабление условия (S6), которое всё ещё обеспечивает выполнение аксиомы TR3 в $\mathcal{D}[\mathcal{S}^{-1}]$.

2. Напомним определения некоторых понятий, используемых в теории локализации.

Определение 1. *Пусть $\mathcal{C}$ – произвольная категория. Класс морфизмов $\mathcal{S}$ в $\mathcal{C}$ называется локализующим справа, если выполняются условия:*

(S0) *для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ имеем $1_X \in \mathcal{S}$;*

Ключевые слова: предтриангулированная категория, триангулированная категория, локализующий класс морфизмов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00902).

(S1) *если* $s, t \in \mathcal{S}$ *и существует* st, *то* $st \in \mathcal{S}$;

(S2) *для морфизмов* $f : X \to Y$ *и* $s : Z \to Y$ *в* $\mathcal{C}$, *где* $s \in \mathcal{S}$, *существует коммутативный квадрат*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

в котором $t \in \mathcal{S}$;

(S3) *для морфизмов* s, f *в* $\mathcal{C}$, *где* $s \in \mathcal{S}$ *таков, что* $sf = 0$, *существует* $t \in \mathcal{S}$, *для которого* $ft = 0$.

Локализующий слева класс морфизмов определяется дуально. Если $\mathcal{S}$ *– локализующий справа и слева класс, то его называем локализующим.*

Определение 2. *Класс морфизмов* $\mathcal{S}$ *в категории* $\mathcal{C}$ *называется насыщенным, если в* $\mathcal{S}$ *выполняется условие:*

(S4) *если морфизмы* f, g, h *в* $\mathcal{C}$ *таковы, что* $fg, gh \in \mathcal{S}$, *то* $g \in \mathcal{S}$.

Определение 3. *Пусть* $\mathcal{S}$ *– локализующий справа класс морфизмов в категории* $\mathcal{C}$, $\widehat{\mathcal{C}} := \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ *– локализация* $\mathcal{C}$ *относительно* $\mathcal{S}$ (*см., напр.*, [5]), *и пусть* $Q\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ *– соответствующий функтор локализации. Класс морфизмов в* $\mathcal{C}$

$$\overline{\mathcal{S}} = \{s \mid Q(s) \text{ – изоморфизм}\}$$

назовём насыщением класса $\mathcal{S}$.

Замечание 1. Легко проверяется (см., напр., [4]), что насыщение $\overline{\mathcal{S}}$ – это насыщенный локализующий класс.

Определение 4. *Пусть* $\mathcal{D}$ *– предтриангулированная категория с функтором сдвига* T. *Класс морфизмов* $\mathcal{S}$ *в* $\mathcal{D}$ *назовём* T*-замкнутым, если выполняется условие:*

(S5) $s \in \mathcal{S}$, *если и только если* $Ts \in \mathcal{S}$.

T*-замкнутый локализующий справа класс морфизмов* $\mathcal{S}$ *назовём* T*-локализующим справа, если дополнительно выполняется следующее условие:*

(S6′) *пусть в $\mathcal{D}$ дан коммутативный квадрат*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ A' & \xrightarrow{u'} & B', \end{array} \tag{1}$$

и выполняется одно из условий:

(a) $f = \mathrm{id}_A$, $g \in \mathcal{S}$,

(b) $g = \mathrm{id}_B$, $f \in \mathcal{S}$;

тогда этот квадрат вкладывается в следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & TA \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle h} & & \big\downarrow{\scriptstyle Tf} \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & TA', \end{array} \tag{2}$$

в которой строки – треугольники в $\mathcal{D}$, а $h \in \overline{\mathcal{S}}$.

Замечание 2. Обычно (см., например, [5]) в теории локализации триангулированных категорий рассматривается следующее более сильное, чем (S6′), условие:

(S6) любой коммутативный квадрат в $\mathcal{D}$ вида (1) такой, что $f, g \in \mathcal{S}$, вкладывается в коммутативную диаграмму вида (2), в которой $h \in \mathcal{S}$ (а строки – треугольники).

При этом T-замкнутый справа класс морфизмов, удовлетворяющий этому условию, называют совместимым с триангуляцией.

Замечание 3. Если $\mathcal{S}$ – локализующий справа класс морфизмов, совместимый с триангуляцией, то его насыщение $\overline{\mathcal{S}}$ обладает свойствами (S0) – (S6) (см., например, [4]).

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{D}$ – предтриангулированная категория, $\mathcal{S}$ – T-локализующий справа класс морфизмов в $\mathcal{D}$. Тогда на категории $\widehat{\mathcal{D}} := \mathcal{D}[\mathcal{S}^{-1}]$ можно задать структуру предтриангулированной категории так, что соответствующий функтор локализации $Q\colon \mathcal{D} \to \widehat{\mathcal{D}}$ является точным функтором.*

Доказательство. Доказательство следует линии доказательства в [4, предложение 2.1]. Сначала стандартно (ср. [5]) вводится функтор сдвига $\widehat{T}\colon \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathcal{D}}$, а также определяется класс $\widehat{T}$-последовательностей ("треугольников") в $\widehat{\mathcal{D}}$, для которого и должны проверяться аксиомы предтриангулированной категории. При этом единственное изменение в этой проверке – это проверка аксиомы TR3.

Сначала докажем следующий вспомогательный факт.

Лемма 2. *Если класс морфизмов $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию* (S6′)*, то он удовлетворяет также следующему условию:*

если в $\mathcal{D}$ дан коммутативный квадрат вида (1)*, в котором $f, g \in \mathcal{S}$, то этот квадрат вкладывается в коммутативную диаграмму вида* (2)*, в которой строки – треугольники, а $h \in \overline{\mathcal{S}}$.*

Доказательство. Построим следующую коммутативную диаграмму, в которой строки – треугольники, а морфизмы h_1, h_2 лежат в $\overline{\mathcal{S}}$ (существование которых обеспечивается условием (S6′)):

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & TA \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{TA}} \\
A & \xrightarrow{u'f} & B' & \xrightarrow{\widetilde{v}} & V & \xrightarrow{\widetilde{w}} & TA \\
{\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{B'}} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle Tf} \\
A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & TA'.
\end{array}$$

Тогда $h := h_2 h_1$ – это искомый морфизм (из $\overline{\mathcal{S}}$), делающий коммутативной диаграмму вида (2). □

Теперь докажем аксиому TR3 для $(\widehat{\mathcal{D}}, \widehat{T}, \widehat{\mathcal{T}})$. Пусть в категории $\widehat{\mathcal{D}}$ дан коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{u} & B \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\
A' & \xrightarrow{u'} & B',
\end{array} \tag{3}$$

где $f = f_1(f_2)^{-1}, g = g_1(g_2)^{-1}$, а f_i, g_i – морфизмы в $\mathcal{D}$, причём $f_2, g_2 \in \mathcal{S}$. Поскольку треугольники в $\widehat{\mathcal{D}}$ изоморфны образам (относительно Q) подходящих треугольников в $\mathcal{D}$, можно сразу считать, что u и u' лежат в $\mathcal{D}$ (мы зачастую отождествляем морфизмы в $\mathcal{D}$ с соответствующими "дробями со знаменателем один"). Используя свойство (S2), находим морфизмы $\widetilde{u}, \widetilde{g}$ в $\mathcal{D}$ такие, что $u\widetilde{g} = g_2\widetilde{u}$, причём $\widetilde{g} \in \mathcal{S}$. Тогда (в $\widehat{\mathcal{D}}$) имеем: $(u'f_1)(f_2)^{-1} = (g_1\widetilde{u})(\widetilde{g})^{-1}$. Следовательно, в $\mathcal{D}$ найдутся морфизмы

r, s такие, что

$$u' f_1 r = g_1 \widetilde{u} s, \quad f_2 r = \widetilde{g} s, \text{ при этом } f_2 r \in \mathcal{S}.$$

Пусть $\overline{u} := \widetilde{u} s$. Тогда получаем следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle f_2 r}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g_2} \\ \overline{A} & \xrightarrow{\overline{u}} & \overline{B} \\ {\scriptstyle f_1 r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_1} \\ A' & \xrightarrow{u'} & B'. \end{array} \tag{4}$$

Рассмотрим треугольники в $\mathcal{D}$, содержащие морфизмы $u, \overline{u}$ и u' соответственно:

$$\begin{aligned} \Delta: \quad & A \xrightarrow{u} B \to C \to TA, \\ \overline{\Delta}: \quad & \overline{A} \xrightarrow{\overline{u}} \overline{B} \to \overline{C} \to T\overline{A}, \\ \Delta': \quad & A' \xrightarrow{u'} B' \to C' \to TA'. \end{aligned}$$

Поскольку $f_2 r, g_2 \in \mathcal{S}$, то применяя лемму 2, находим морфизм $h_2 \in \overline{\mathcal{S}}$ такой, что $(f_2 r, g_2, h_2)\colon \overline{\Delta} \to \Delta$ – это изоморфизм треугольников над $\widehat{\mathcal{D}}$. Таким образом, заменяя треугольник Δ на $\overline{\Delta}$, мы можем считать, что в диаграмме (4) $f_2 r$ и g_2 – тождественные морфизмы, т.е. что морфизмы f и g из диграммы (3), как и u, u', лежат в $\mathcal{D}$. Тогда ситуация сводится к применению аксиомы TR3, выполняющейся в категории $\mathcal{D}$. $\square$

3. В этом разделе мы подробнее обсудим сделанное ранее замечание об упрощении достаточного условия для локализации ТРИАНГУЛИРОВАННОЙ категории.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{D}$ – триангулированная категория, $\mathcal{S}$ – T-замкнутый локализующий справа класс морфизмов в $\mathcal{D}$. Тогда на категории $\widehat{\mathcal{D}} := \mathcal{D}[\mathcal{S}^{-1}]$ можно задать структуру триангулированной категории так, что соответствующий функтор локализации $Q\colon \mathcal{D} \to \widehat{\mathcal{D}}$ является точным функтором.*

Доказательство. Достаточно следовать линии доказательства в [5, теорема IV.2.2] и заметить, что в стандартной проверке аксиом TR1, TR2 и TR4 (для категории $\widehat{\mathcal{D}}$) используются только условия (S0) – (S3) и (S5). Лишь при проверке аксиомы TR3 в [5] возникает необходимость в условии (S6). Однако, как мы отметили выше, аксиома TR3 в определении триангулированной категории может быть опущена (см. [3]). □

4. В заключение приведём рассуждение, в котором аксиома TR3 выводится из аксиомы октаэдра TR4 (плюс, конечно, аксиома TR1) без использования (в отличие от [3]) аксиомы TR2.

Пусть в категории $\mathcal{D}$, удовлетворяющей аксиомам TR1 и TR4, дан коммутативный квадрат (1), который включён в следующую диаграмму, строки которой – треугольники:

$$\begin{array}{cccccccc} \Delta\colon & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & TA \\ & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & & & \downarrow{\scriptstyle Tf} \\ \Delta'\colon & A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & TA'. \end{array} \tag{5}$$

Применяя аксиому TR4 к паре морфизмов (u, g), получаем следующую коммутативную диаграмму, в которой нижняя строка – треугольник:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & TA \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{TA}} \\ A & \xrightarrow{gu} & B' & \xrightarrow{\widetilde{v}} & V & \xrightarrow{\widetilde{w}} & TA. \end{array}$$

(Здесь мы использовали только часть свойств, гарантируемых аксиомой октаэдра.) Затем применим TR4 к паре морфизмов (f, u') и получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & W \arrow[r] \arrow[d] & TA \arrow[d, "\mathrm{id}_{TA}"] \\
A \arrow[r, "u'f"] & B' \arrow[r, "\widetilde{v}"] \arrow[d, "v'"] & V \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "h_2"] & TA \\
 & C' \arrow[r, "\mathrm{id}_{C'}"] \arrow[d, "w'"] & C' \arrow[d] & \\
 & TA' \arrow[r] & TW, &
\end{tikzcd}$$

причём $w'h_2 = Tf \cdot \widetilde{w}$. Положим $h := h_2 h_1$. Прямые вычисления дают:

$$hv = v'g, \quad w'h = Tf \cdot w,$$

т.е. мы получаем, что $(f, g, h)\colon \Delta \to \Delta'$ – это требуемый морфизм треугольников из диаграммы (5).

Литература

1. J.-L. Verdier, *Catégories dérivées.* – Lect. Notes Math., **569** (1977), 262–311.
2. J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes.* – Astérisque, **239** (1996).
3. R. Virk, *The octahedron axiom*, preprint (2009).
4. А. И. Генералов, *Локализация предтриангулированных категорий.* – Алгебра и анализ, **11**, No 3 (1999), 20–52.
5. С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры*, т. 1, М., Наука, 1988.

Generalov A. I. A note on localization of pretriangulated categories.

For a localising class $\mathcal{S}$ of morphisms in a pretriangulated category $\mathcal{D}$, a weak version of a sufficient condition that guarantees carrying the structure of pretriangulated category onto the localisation $\mathcal{D}[\mathcal{S}^{-1}]$ is proposed. Moreover, we get a similar weakness of a sufficient condition in the context of triangulated categories.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com

Поступило 23 сентября 2014 г.