Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 430, 2014 г.

С. В. Востоков, В. В. Волков, М. В. Бондарко

ЯВНАЯ ФОРМА СИМВОЛА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ МНОГОЧЛЕННЫХ ФОРМАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ В МНОГОМЕРНОМ ЛОКАЛЬНОМ ПОЛЕ. I

§1. Введение

Настоящая работа является продолжением работы [10], в которой давалась явная формула символа Гильберта для многочленных формальных групп. Полученный в [10] результат мы обобщим на случай многомерного локального поля. Аналогичные формулы для мультипликативного символа Гильберта в многомерном локальном поле были изучены в работах [6–8], для формальных групп Любина–Тейта в работе [9], для формальных групп Хонды в работах [4, 5]. В данной статье рассматривается случай многочленной формальной группы, то есть группы вида $F_c = X + Y + cXY$, где c – единица в некотором многомерном локальном поле.

Случай, рассматриваемый в данной статье, является примером явных формул для символа Гильберта на формальных группах, у которых кольцо эндоморфизмов вкладывается изоморфно, но не совпадает с кольцом, на котором задана группа. Мы рассматриваем случай разнохарактеристического многомерного поля, формулы для мультипликативного символа такого поля были описаны в работе [6]. В данной части работы строится формальный символ на K-группе Милнора мультипликативного модуля кривых Картье и приводятся его основные свойства. В следующей части будет показано, что это спаривание совпадает со стандартным символом Гильберта.

В данной работе мы будем следовать подходу, развитому в работах [6] и [10].

Ключевые слова: символ Гильберта, многомерное локальное поле, формальные группы, многочленные формальные группы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00393 А.

§2. Основные обозначения

В целом мы будем следовать обозначениям, принятым в работе [10], однако в силу некоторых явных различий между многомерным и одномерным случаем мы повторим их здесь для многомерного случая.

Пусть

- $p \geqslant 3$ – простое число;
- ζ – фиксированный первообразный корень степени p^m из 1;
- K – n-мерное локальное поле, содержащее ζ, характеристика которого отлична от характеристики его поля вычетов; оно является конечным расширением поля $k\{\{t_1\}\}\{\{t_2\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$, где k – конечное расширение $\mathbb{Q}_p$; его кольцо целых обозначим $\mathcal{O}_K$;
- $K^{(0)}, K^{(1)}, \dots, K^{(n)} = K$ – поля вычетов многомерного поля K;
- c – единица локального поля K;
- $t_1, \dots t_{n-1}, \pi$ – локальные униформизующие поля K;
- T – подполе инерции в K ([6, Введение, 5°]), с кольцом целых $\mathcal{O}_T$;
  обозначим $\mathcal{O} = \mathcal{O}_T\{\{t_1\}\}\{\{t_2\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$;
- $\triangle$ – автоморфизм Фробениуса в $T/\mathbb{Q}_p$;
- tr – оператор следа в $T/\mathbb{Q}_p$;
- $\mathfrak{M}$ – максимальный идеал $\mathcal{O}_K$ (как n-мерного локального кольца);
- $\mathfrak{R}$ – мультипликативная система представителей Тейхмюллера поля вычетов $K^{(0)}$ в кольце $\mathcal{O}_T$;
- $F_c = X + Y + cXY$ – многочленная формальная группа;
- $F_c(\mathfrak{M})$ – формальный $\mathbb{Z}_p$-модуль на $\mathfrak{M}$, заданный формальной группой F_c;
- $\lambda_c(X)$ – логарифм формальной группы F_c (формальная переменная X соответствует простому элементу π поля K);
- K_β – расширение поля K, полученное присоединением корней уравнения $[p^n]_c(X) = \beta$ для элемента $\beta \in F_c(\mathfrak{M})$;
- ξ – образующая ядра $[p^m]_c(X)$;
- d_i – оператор дифференцирования по t_i, d_n – оператор дифференцирования по X.

Легко видеть, что $F_c(X,Y) = c^{-1}((1 + cX)(1 + cY) - 1)$, поэтому $\lambda_c(X) = c^{-1}\log(1+cX)$ и $\xi = c^{-1}(\zeta - 1)$. Обозначим также пополнение максимального неразветвленного над T p-расширения через $\widetilde{T}$, а φ –

автоморфизм Фробениуса топологической группы Галуа $\mathrm{Gal}(\widetilde{T}/T)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_p \arrow[r, dash, "\Delta"] & T \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\varphi"'] & T(\zeta) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\varphi"'] & T(\zeta,c) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\varphi"'] & T(\zeta,c)\{\{t_1\}\}\{\{t_2\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\varphi"'] & K \arrow[d, dash, "\varphi"'] \\
& \widetilde{T} \arrow[r, dash] & \widetilde{T}(\zeta) \arrow[r, dash] & \widetilde{T}(\zeta,c) \arrow[r, dash] & \widetilde{T}(\zeta,c)\{\{t_1\}\}\{\{t_2\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\} \arrow[r, dash] & \widetilde{T}K
\end{tikzcd}$$

Фиксируем некоторые ряды $\underline{c}, \underline{\zeta}$ и $\underline{\xi} = \underline{c}^{-1}(\underline{\zeta} - 1)$ из $\mathcal{O}[[X]]$ такие, что $\underline{c}(\pi) = c$, $\underline{\zeta}(\pi) = \zeta$ и $\underline{\xi}(\pi) = \xi$.

Рассмотрим мультипликативный модуль кривых Картье $\mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$ (см. [9]) и формальный $\mathbb{Z}_p$-модуль $\mathcal{H}_{\mathrm{c}} = \mathcal{O}[[X]]_0$, то есть ряды лексикографической степени не ниже $(1, \dots, 0)$ с действием заданным формальной группой F_c [множество $\mathcal{O}[[X]]_0$ является формальным аналогом модуля $\mathfrak{M}$].

Структура $\mathbb{Z}_p$-модуля задана на $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ формальной группой $F_{\underline{c}} = X + Y + \underline{c}XY$, которая является аналогом группы F, а аналогом логарифма будет ряд $\lambda_{\underline{c}} = \underline{c}^{-1}\log(1 + \underline{c}X)$.

На кольце $\mathcal{O}((X))$ введем оператор $\triangle$, продолжив его как $\triangle\, t_i = t_i^p$, $\triangle\, X = X^p$.

Определим, далее, ряды

- $s_c = [p^m]_c(\underline{\xi}) = \underline{c}^{-1}((1 + \underline{c} \cdot \underline{\xi})^{p^m} - 1)$;
- $s_{m-1,\,c} = [p^{m-1}]_c(\underline{\xi})$;
- $u_c = s_c / s_{m-1,\,c}$.

Заметим, что если далее определить $s = (\underline{\zeta}^{p^m} - 1)$ и $s_{m-1} = (\underline{\zeta}^{p^{m-1}} - 1)$, где $\underline{\zeta} = 1 + \underline{c} \cdot \underline{\xi}$, то

$$u_c = s_c / s_{m-1,\,c} = s / s_{m-1} = u,$$

где s, s_{m-1} и u определены так же, как в [6, Введение, 5°] (см. также [1, §3], [10]).

Рассмотрим функции E и ℓ, введенные в [6, §1, 1°] :

$$\ell(\alpha) = \frac{1}{p}\log\left(\frac{\alpha^p}{\alpha^{\Delta}}\right), \text{ где } \alpha \in \mathcal{H}_{\mathfrak{m}};$$

$$E(\beta) = \exp\left(1 + \frac{\Delta}{p} + \frac{\Delta^2}{p^2} + \dots\right)\beta, \text{ где } \beta \in \mathcal{O}[[X]]_0$$

(см. также [1, §1], [10]).

Отметим, что функция ℓ корректно задана на любом ряде из $\mathcal{O}\{\{X\}\}$, а E на любом ряде из $t_i\mathcal{O}_i[[t_i]]$, где

$$\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_T\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{i-1}\}\}\{\{t_{i+1}\}\}\dots\{\{t_n\}\}$$

(см. [6, §1, 1°]).

Рассмотрим аналоги этих функций для формальной группы $F_{\underline{c}}$:

$$\begin{aligned} \ell_c(\beta) &= \underline{c}^{-1}\ell(1+\underline{c}\beta), && \text{где } \beta \in \mathcal{H}_c, \\ E_c(\beta) &= \underline{c}^{-1}(E(\underline{c}\beta)-1), && \text{где } \beta \in \mathcal{O}[[X]]_0. \end{aligned}$$

Аналогично соответствующему одномерному утверждению о функциях ℓ, E (см. [1, §1, предложение 1]) легко получается следующий результат.

Предложение 1. *Функции ℓ_c и E_c являются взаимно обратными изоморфизмами между аддитивным $\mathbb{Z}_p$-модулем $\mathcal{O}((X))_0$ и формальным $\mathbb{Z}_p$-модулем $\mathcal{H}_c$.*

В дальнейшем мы будем использовать обозначение F_c для формальной группы $F_{\underline{c}}$ и λ_c для логарифма $\lambda_{\underline{c}}$, так как по контексту всегда будет ясно идет ли речь о рядах или о числах.

Напомним также определение символа Гильберта $(\cdot,\cdot)_c$ относительно формальной группы F_c:

$$\begin{gathered} (\cdot,\cdot)_c\colon K_n^{\mathrm{top}}(K)\times F_c(\mathfrak{M}) \to \ker[p^m]_c = \langle\xi\rangle_c, \\ (\alpha,\beta)_c = B^{\sigma(\alpha)} -_{F_c} B, \end{gathered}$$

где $\alpha \in K_n^{\mathrm{top}}(K)$, $\beta \in F_c(\mathfrak{M})$, B – решение уравнения $[p^n]_c(B) = \beta$, $\sigma\colon K_n^{\mathrm{top}} \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ – отображение взаимности Паршина–Като.

§3. Формальное спаривание на модулях $\mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$ и $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$

Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in (\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})^n$, $\beta \in \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$. Зададим спаривание

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_c : (\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})^n \times \mathcal{H}_{\mathrm{c}} \to \mathcal{O}/p^m,$$

$$\alpha, \beta \mapsto \operatorname{res}_X \Phi(\alpha,\beta)/s_c \mod p^m,$$

где $\Phi(\alpha,\beta) = \ell_c(\beta) D'_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p^{n-i}} \ell(\alpha_i) D'_i$,

$$D'_{n+1} = \det(\delta_i(\alpha_j))_{ij},$$

$$D'_i = \det \begin{vmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \dots & \delta_n(\alpha_1) \\ \hdotsfor{3} \\ \delta_1(\alpha_{i-1}) & \dots & \delta_n(\alpha_{i-1}) \\ \underline{c}^{-1} \mathrm{d}_1 \frac{\triangle}{p} \underline{c} \lambda_c(\beta) & \dots & \underline{c}^{-1} \mathrm{d}_n \frac{\triangle}{p} \underline{c} \lambda_c(\beta) \\ \delta_1(\alpha_{i+1}^{\triangle}) & \dots & \delta_n(\alpha_{i+1}^{\triangle}) \\ \hdotsfor{3} \\ \delta_1(\alpha_n^{\triangle}) & \dots & \delta_n(\alpha_n^{\triangle}) \end{vmatrix},$$

$\delta_i(\gamma) = \gamma^{-1} \mathrm{d}_i \gamma$ – логарифмическая производная,

$\operatorname{res}_X = \operatorname{res}_{t_1 t_2 \dots t_{n-1} X}$.

С помощью легко проверяемых равенств

$$\mathrm{d}_i \gamma^{\triangle} = p X^{-1} (X \mathrm{d}_i \gamma)^{\triangle}; \ \mathrm{d}\ell(\gamma) = \gamma^{-1} \mathrm{d}_i \gamma - X^{-1} (X \gamma^{-1} \mathrm{d}_i \gamma)^{\triangle} \tag{1}$$

определение ряда $\Phi(\alpha,\beta)$ можно переписать в виде

$$\Phi(\alpha,\beta) = \ell_c(\beta) D_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \ell(\alpha_i) D_i,$$

где

$$D_i = \det \begin{vmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \dots & \delta_n(\alpha_1) \\ \hdotsfor{3} \\ \delta_1(\alpha_{i-1}) & \dots & \delta_n(\alpha_{i-1}) \\ \eta_1(\alpha_{i+1}) & \dots & \eta_n(\alpha_{i+1}) \\ \hdotsfor{3} \\ \eta_1(\alpha_n) & \dots & \eta_n(\alpha_n) \\ \underline{c}^{-1} \mathrm{d}_1 \frac{\triangle}{p} \underline{c} \lambda_c(\beta) & \dots & \underline{c}^{-1} \mathrm{d}_n \frac{\triangle}{p} \underline{c} \lambda_c(\beta) \end{vmatrix},$$

$\eta_i(\gamma) = \delta_i(\gamma) - \mathrm{d}_i \ell(\gamma)$.

Эти определения согласуются с определениями, данными в [6, 9], и с определением в одномерном случае [10].

Теорема 1. *Спаривание* $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ *отвечает следующим элементарным свойствам:*
1) *Аддитивность*

$$\begin{aligned}\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_i\alpha_i',\ldots\alpha_n\},\beta\rangle_c &= \langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots\alpha_n\},\beta\rangle_c\\ &\quad+\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_i',\ldots\alpha_n\},\beta\rangle_c;\\ \langle\alpha,\beta_1+_{F_c}\beta_2\rangle_c &= \langle\alpha,\beta_1\rangle_c+\langle\alpha,\beta_2\rangle_c;\\ \langle\alpha,[a]_c\beta\rangle_c &= a\langle\alpha,\beta\rangle_c,\quad a\in\mathbb{Z}_p.\end{aligned}$$

2) *Гиперболичность*

$$\langle\{\ldots,\alpha,\ldots,-\alpha,\ldots\},\beta\rangle_c=0.$$

3) *Соотношение Стейнберга*

$$\langle\{\ldots,\alpha,\ldots,1-\alpha,\ldots\},\beta\rangle_c=0.$$

4) *Кососимметричность*

$$\langle\{\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_k,\ldots\},\beta\rangle_c=-\langle\{\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_i,\ldots\},\beta\rangle_c.$$

5) *Символьное свойство:*

$$\langle\{\ldots,\alpha,\ldots\},\underline{c}^{p^m-1}\alpha\rangle_c=0.$$

Доказательство. 1) Аддитивность очевидно следует из определения, линейности логарифмических производных δ_i и функции λ_c.
2), 3), 4) Эти свойства непосредственно следуют из определения символа и аналогичных свойств в мультипликативном случае, доказанных в [6], §2. Достаточно применить предложенный там метод, разложения определителей по строке, и свести данный случай к мультипликативному.
5) Это свойство сводится к соотношению Стейнберга для мультипликативного случая. А именно заметим, что

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_i\frac{\triangle}{p}\underline{c}\lambda_c(\underline{c}^{p^m-1}\alpha) &= \eta_i(1+\underline{c}^{p^m}\alpha),\\ \ell_c(\underline{c}^{p^m-1}\alpha) &= \underline{c}^{-1}\ell(1+\underline{c}^{p^m}\alpha),\\ s_c &= \underline{c}^{-1}s.\end{aligned}$$

Поэтому вынося и сокращая $\underline{c}^{-1}$ и переписывая последнюю строчку в каждом D_i надлежащим образом, мы получаем

$$\begin{aligned}\langle\{\dots,\alpha,\dots\},\underline{c}^{p^m-1}\alpha\rangle_c =&\langle\{\dots,\alpha,\dots,1+\underline{c}^{p^m}\alpha\}\rangle\\ =&\langle\{\dots,-\underline{c}^{p^m}\alpha,\dots,1+\underline{c}^{p^m}\alpha\}\rangle=0,\end{aligned}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – обычный мультипликативный символ, рассмотренный в [6, §2]. $\square$

Рассмотрим теперь K-группу Милнора $K_n(\mathcal{H}_\mathfrak{m})$. Теорема 1 позволяет нам задать спаривание $\{\cdot,\cdot\}_c$ на группах

$$\begin{aligned}\{\cdot,\cdot\}_c\colon K_n(\mathcal{H}_\mathfrak{m})\times\mathcal{H}_\mathrm{c}\to\ker[p^m]_c,\\ \{\alpha,\beta\}_c=[\operatorname{tr}\langle\alpha,\beta\rangle_c]_c(\xi).\end{aligned}$$

В следующей работе будет показано, что это спаривание совпадает с $(\cdot,\cdot)_c$.

Литература

1. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **42** (1978), No. 6, 1288–1321.
2. И. Р. Шафаревич, *Общий закон взаимности.* — Матем. сб., **26 (68)** (1950), No. 1, 113–146.
3. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions.* Second Edition, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 2002.
4. F. Lorenz, S. Vostokov, *Honda Groups and Explicit Pairings on the Modules of Cartier Curves.* — Contemp. Math., **300** (2002), 143–170.
5. С. В. Востоков, Ф. Лоренц, *Явная формула символа Гильберта для групп Хонды в многомерном локальном поле.* — Матем. сб. **194**, No. 2 (2003), 3–36.
6. С. В. Востоков, *Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **49** (1985), No. 2, 283–308.
7. С. В. Востоков, *Спаривание Гильберта в полном многомерном поле.* — Тр. МИАН, Наука, Физматлит, М., **208** (1995), 80–92.
8. Т. Б. Беляева, С. В. Востоков, *Символ Гильберта в полном поле. I.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **281** (2001), 5–34.
9. С. С. Афанасьева, Б. М. Беккер, С. В. Востоков, *Символ Гильберта в многомерных локальных полях для формальной группы Любина–Тейта.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **400** (2012), 20–49.
10. С. В. Востоков, В. В. Волков, *Явная форма символа Гильберта для многочленных формальных модулей.* — Алгебра и анализ, **26** (2014), No. 5, 125–141.

Vostokov S. V., Volkov V. V., Bondarko M. V. Explicit form of Hilbert symbol for polynomial formal groups over multidimensional local field. I.

Let K be a multidimensional local field with characteristic different from characteristic of its residue field, c be a unit of K and $F_c(X,Y) = X+Y+cXY$ be a polynomial formal group, which defines formal module $F_c(\mathfrak{M})$ over maximal ideal of ring of integers in K. Assume that K contains group of the roots of isogeny $[p^m]_c(X)$, which we denote by $\mu_{F_c,m}$. Let $\mathcal{H}$ be the multiplicative group of Cartier curves and $\mathcal{H}_c$ be a formal analogue of the module $F_c(\mathfrak{M})$. In the current work we construct formal symbol $\{\cdot,\cdot\}_c\colon K_n(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}_c \to \mu_{F_c,m}$ and check its basic properties. This is the first step in construction of the explicit formula for the Hilbert symbol.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: sergei.vostokov@gmail.com

E-mail: vladvolkov239@gmail.com

E-mail: mbondarko@hotmail.com

Поступило 30 сентября 2014 г.