Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 430, 2014 г.

**Т. С. Бусел**

# О БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДЛИННОГО И КОРОТКОГО КОРНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ТИПА $B_r$

## §1. Введение

Изучается поведение произведения коммутирующих длинного и короткого корневых элементов группы типа $B_r$ в $p$-ограниченных неприводимых представлениях. Для представлений с определенными локальными свойствами старших весов установлено, что образы таких элементов имеют блоки Жордана всех возможных размерностей.

Далее $K$ – поле характеристики $p > 2$, $G = B_r(K)$, $r \geqslant 6$; $\omega(\varphi)$ – старший вес представления $\varphi$ группы $G$, $J_\varphi(x)$ – множество размерностей блоков Жордана элемента $\varphi(x)$ без учета их кратностей, $\mathbf{N}_a^b$ – совокупность целых чисел $i$ с $a \leqslant i \leqslant b$, $\alpha_i$ и $\omega_i$ – простые корни и фундаментальные веса группы $G$, $\mathcal{X}_{\pm i}$ и $x_{\pm i}(t)$ – корневая подгруппа и корневой элемент в $G$, ассоциированные с корнем $\pm\alpha_i$ и $t \in K$.

**Теорема 1.** *Пусть $\varphi$ – $p$-ограниченное представление группы $G$ со старшим весом $a_1\omega_1 + \dots + a_r\omega_r$ и $x = x_1(1)x_r(1)$. Положим*

$$d = d(\varphi) = 1 + 2a_1 + 3a_2 + 4(a_3 + \dots + a_{r-2}) + 2a_r.$$

*Предположим, что $a_j \neq p-1$ при некотором $j < r-1$.*

1) *Пусть $a_r \neq p-1$ и $\sum_{i=1}^{r-2} a_i \geqslant p-1$. Тогда $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_1^p$.*

2) *Пусть $2a_{r-1} + a_r < p$. Предположим, что $\sum_{i=1}^{r-3} a_i \neq 0$ при $2a_{r-1} + a_r = p-2$ или $p-1$ и $\sum_{i=1}^{r-3} a_i \neq 0$ или $(r-3)(p-1)$ при $a_r = p-1$. Тогда $J_\varphi(x) = \mathbf{N}_1^{\min(p,d)}$.*

---

*Ключевые слова*: представления алгебраических групп, унипотентные элементы, блочная структура.

Пусть $H$ – подгруппа в $G$, порожденная подгруппами $\mathcal{X}_{\pm 1}$, $\dots$, $\mathcal{X}_{\pm(r-2)}$. Тогда $H \cong A_{r-2}(K)$. Так как $H$ коммутирует с подгруппой типа $A_1$, порожденной подгруппами $\mathcal{X}_{+r}$ и $\mathcal{X}_{-r}$, все неединичные корневые элементы группы $H$ сопряжены и все неединичные элементы $x_{\pm r}(t)$ сопряжены, то утверждение теоремы 1 справедливо для произвольного произведения нетривиального корневого элемента из $H$ и нетривиального элемента $x_{\pm r}(t)$.

Естественно, что полностью определить блочную структуру образов унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп (т.е. найти все размерности блоков Жордана и их кратности) можно только для представлений, размерности которых известны. Так, Р. Лотер в [13] решил эту задачу для нетривиальных представлений минимальной размерности и присоединенных представлений простых алгебраических групп исключительных типов. Поскольку в общем случае проблема размерностей неприводимых представлений полупростых алгебраических групп в положительной характеристике далека от разрешения, целесообразно рассматривать задачу об определении размерностей блоков Жордана таких образов без учета их кратностей. В настоящее время полное решение этой задачи представляется реальным лишь для в определенном смысле "малых" унипотентных элементов – элементов, лежащих в подсистемных подгруппах малых рангов или произведениях таких подгрупп.

А. Е. Залесский и Ф. Тьеп в [18, теорема 2.20] описали все неприводимые представления простых алгебраических групп в характеристике $p > 3$, в которых размерности блоков Жордана образов корневых элементов принадлежат множеству $\{1, p, p-1\}$. Это описание было весьма существенно использовано ими для решения задачи о приводимости редукции комплексных представлений конечных групп Шевалле по модулю характеристики поля определения [18, теорема 1.2].

В ряде случаев М.В. Величко найдены размерности блоков Жордана образов корневых элементов в неприводимых рациональных представлениях простых алгебраических групп в нечетной характеристике. Задача решена для групп ранга, большего двух, с корнями одной длины; для длинных корневых элементов групп типов $B_r, C_r$ при $r > 2$ и $F_4$ и для коротких корневых элементов групп типа $C_r$ при $r > 3$ при некоторых дополнительных ограничениях (для групп типов $C_r$ и $F_4$) [3, 4, 19]. Для представлений с локально малыми старшими весами эти результаты получены А. А. Осиновской и И.Д. Супруненко в [14] для классических групп и А. А. Осиновской в [15] для исключительных. Понятие локально малого старшего веса определено в [14, определение 1]. Классы таких весов определяются в терминах значений определенных явно указанных линейных функций их коэффициентов, связанных с соседними корнями на схеме Дынкина. При этом на другие коэффициенты никаких условий не налагается. Выбор функции зависит от решаемой задачи.

В [5] М. В. Величко и И. Д. Супруненко описана блочная структура образов квадратичных унипотентных элементов относительно малых корангов в представлениях специальной линейной группы с большими старшими весами общего вида. В ряде работ аналогичная задача изучалась для регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп малых рангов и представлений с определенными локальными свойствами старших весов: в [6, 7] рассматривалось поведение таких элементов из подгрупп типов $A_2$, $B_2$ и $C_2$ в представлениях групп типов $A_r$, $B_r$ и $C_r$ соответственно, в [8] и [11] – поведение элементов из подгрупп типов $A_3$ и $A_1 \times A_2$ в представлениях групп типа $A_r$.

Заметим, что задача о блочной структуре образов коротких корневых элементов в представлениях группы типа $B_r$ оказывается сложнее аналогичной задачи для элементов, рассматриваемых в этой статье. Для первых элементов и $p$-ограниченных представлений в настоящее время эта задача решена лишь в случае, когда значение старшего веса на максимальном коротком корне меньше $p$.

Детальная информация о блочной структуре образов унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп может быть использована для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию матриц определенного вида.

Работа поддержана Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы научных исследований “Конвергенция” (подпрограмма “Математика”, 2011–2015).

## §2. Обозначения и предварительные результаты

Далее $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Если $\Gamma$ – простая алгебраическая группа над $\mathbb{C}$ или $K$, то $X(\Gamma)$ – ее система весов, $\mathcal{X}_\beta$ и $x_\beta(t)$ – корневая подгруппа и корневой элемент, ассоциированные с корнем $\beta$ и элементом $t \in \mathbb{C}$ или $K$ соответственно, $\Gamma(\beta_1, \dots, \beta_k)$ – подгруппа в $\Gamma$, порожденная корневыми подгруппами $\mathcal{X}_{\pm\beta_1}, \dots, \mathcal{X}_{\pm\beta_k}$, $U^+(\Gamma)$

– группа, порожденная всеми корневыми подгруппами, ассоциированными с положительными корнями, $\langle \mu, \alpha \rangle$ – значение веса $\mu$ на корне $\alpha$ (в смысле [9, §1]). Символы $\omega_i$ и $\alpha_i$ используются не только для группы $G$, но и для других простых алгебраических групп, из контекста всегда ясно, о какой группе идет речь. Положим $\mathcal{X}_{\pm i} = \mathcal{X}_{\pm\alpha_i}$, $x_{\pm i}(t) = x_{\pm\alpha_i}(t)$, $\Gamma(i_1, \ldots, i_k) = \Gamma(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$. Используется также обозначение $\Gamma(i_1, \ldots, i_k, \beta)$ для группы $\Gamma(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}, \beta)$ и другие подобные обозначения. Ниже $X_{\pm i, m}$ – элемент гипералгебры группы $\Gamma$, ассоциированный с корнем $\pm\alpha_i$ и числом $m$.

Если $\omega$ – доминантный вес группы $\Gamma$, то $M(\omega)$ – неприводимый $\Gamma$-модуль со старшим весом $\omega$; $\omega(\varphi)$ $(\omega(M))$ – старший вес представления $\varphi$ (модуля $M$), $\omega(m)$ – вес весового вектора $m \in M$. Если $H$ – подгруппа в $\Gamma$, то $M|H$ – ограничение $\Gamma$-модуля $M$ на $H$. Предполагается, что веса и корни группы $\Gamma$ рассматриваются относительно фиксированного максимального тора $T$. Если $T \cap H$ – максимальный тор подгруппы $H$, то $\omega|H$ – ограничение веса $\omega$ на $T \cap H$. В этом случае для весового вектора $m$ из некоторого $\Gamma$-модуля полагаем $\omega_H(m) = \omega(m)|H$. Заметим, что $T \cap H$ – максимальный тор в $H$ для подсистемных подгрупп $H$. Если $M$ – $\Gamma$-модуль, то $\mathbf{X}(M)$ и $M_\mu$ – множество весов и весовое подпространство веса $\mu$. Далее $d_\varphi(z)$ – степень минимального многочлена образа элемента $z \in \Gamma$ в представлении $\varphi$, аналогично определяется $d_M(z)$ для $\Gamma$-модуля $M$. Символы $\varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, обозначают веса стандартного $G$-модуля. Нумерация весов $\varepsilon_i$ и $\omega_i$ и корней $\alpha_i$ соответствует [2, §13]. Веса группы $A_1(K)$ стандартным образом отождествляются с целыми числами: $a\omega_1 \mapsto a$. Для $G$-модуля $M$ множество $J_M(x)$ вводится аналогично $J_\varphi(x)$. Символ $J_a$ обозначает блок Жордана размерности $a$ с единицей на диагонали.

В доказательстве основной теоремы существенно используются следующие факты.

**Лемма 1** ([1, Табл. I, II, IV]). *Пусть* $\Gamma = A_n(K)$ *или* $D_n(K)$, $\alpha$ – *максимальный корень группы* $\Gamma$, $\omega = \sum\limits_1^n a_i \omega_i$. *Тогда*

$$\langle \omega, \alpha \rangle = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & \textit{при} \quad \Gamma = A_n(K), \\ a_1 + a_{n-1} + a_n + 2\sum\limits_{i=2}^{n-2} a_i & \textit{при} \quad \Gamma = D_n(K). \end{cases}$$

*Если* $\Gamma = B_n(K)$ *и* $\beta$ *– максимальный короткий корень, то* $\langle \omega, \beta \rangle = a_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_i$.

**Теорема 2** ([16]). *Пусть* $\Gamma$ *– полупростая алгебраическая группа,* $S = G(i_1, \ldots, i_k) \subseteq \Gamma$, $M$ *– неприводимый* $\Gamma$*-модуль со старшим весом* $\omega$, $v \in M$ *– ненулевой вектор старшего веса. Тогда подпространство* $KSv \subseteq M$ *является неприводимым* $S$*-модулем со старшим весом* $\omega|S$ *и прямым слагаемым* $S$*-модуля* $M$.

**Лемма 2** ([11, лемма 7]). *Пусть* $U$ *–* $A_1(K)$*-модуль и* $|a| < p$ *для всех весов* $a$ *модуля* $U$. *Тогда модуль* $U$ *вполне приводим.*

**Лемма 3** ([11, лемма 10]). *Пусть группа* $H = H_1 H_2$, *где* $H_1$ *и* $H_2$ *– коммутирующие подгруппы. Предположим, что* $H$*-модуль* $M$ *вполне приводим как* $H_1$*- и* $H_2$*-модуль. Тогда модуль* $M$ *– вполне приводимый* $H$*-модуль.*

**Лемма 4** ([14, лемма 12]). *Пусть* $\Gamma$ *– некоторая группа и* $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ *– прямая сумма* $\Gamma$*-модулей. Тогда для элемента* $z \in \Gamma$

$$J_U(z) = \bigcup_{j=1}^{k} J_{U_j}(z).$$

**Следствие 1** ([5, следствие 8]). *Пусть* $H$ *– подгруппа группы* $\Gamma$, $z \in H$. *Предположим, что для* $\Gamma$*-модуля* $U$ *ограничение* $U|H$ *вполне приводимо. Тогда* $J_M(z) \subset J_U(z)$ *для любого композиционного фактора* $M$ *модуля* $U$.

**Теорема 3** ([19]). *Пусть* $\Gamma \cong A_n(K)$ *или* $D_n(K)$, $n \geqslant 3$, $s \in K \setminus \{0\}$, $\alpha$ *– максимальный корень группы* $\Gamma$, $z = x_\alpha(s) \in \Gamma$, $\varphi$ *– неприводимое* $p$*-ограниченное представление группы* $\Gamma$, $\omega(\varphi) = m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n$. *Предположим, что* $m_i \neq p-1$ *для некоторого* $i$. *Положим* $a = \min\{p, 1 + \langle \omega(\varphi), \alpha \rangle\}$. *Тогда* $J_\varphi(z) = \mathbf{N}_1^a$.

**Теорема 4.** *Пусть* $\varphi$ *–* $p$*-ограниченное неприводимое представление группы* $G$, $x = x_1(1)x_r(1)$ *и* $\omega(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$. *Тогда*

$$d_\varphi(x) = \min\{p, 2a_1 + 3a_2 + 4(a_3 + \ldots a_{r-1}) + 2a_r + 1\}.$$

**Доказательство.** Положим $G_{\mathbb{C}} = B_r(\mathbb{C})$. Пусть $x_{\mathbb{C}} \in G_{\mathbb{C}}$ – элемент с той же нормальной формой Жордана в естественном модуле, что и

$x$, а $\varphi_{\mathbb{C}}$ – неприводимое представление группы $G_{\mathbb{C}}$ со старшим весом $\omega(\varphi)$. В силу [10, теорема 1.1]

$$d_{\varphi}(x) = \min\{p, d_{\varphi_{\mathbb{C}}}(x_{\mathbb{C}})\}.$$

Нетрудно установить, что $x_{\mathbb{C}}$ (и $x$) в естественном модуле имеет один блок Жордана размерности 3, два блока размерности 2 и блоки размерности 1. Положим

$$N(x) = (2, 1, 1, 0, \dots, 0, -1, -1, -2).$$

(в $N(x)$ $2r+1$ чисел). Пусть $\rho_j$ – неприводимые представления группы $G_{\mathbb{C}}$ со старшим весом $\omega_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$, $m_j = d_{\rho_j}(x_{\mathbb{C}}) - 1$. Ввиду [10, алгоритм 1.4] число $m_j$ равно сумме $j$ максимальных чисел из набора $N(x)$ при $j < r$, а $m_r$ равно половине суммы $r$ максимальных чисел из этой последовательности. Поэтому $m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = \dots = m_{r-1} = 4$ и $m_r = 2$. В силу [10, предложение 1.3]

$$d_{\varphi_{\mathbb{C}}}(x_{\mathbb{C}}) = 1 + \sum_{i=1}^{r} a_i m_i = 1 + 2a_1 + 3a_2 + 4(a_3 + \dots + a_{r-1}) + 2a_r.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

**Лемма 5** ([14, лемма 10]). *Пусть $H = A_1(K)$, $\varphi$ – неприводимое представление группы $H$ со старшим весом $a$, $0 \leqslant a < p$. Тогда $\dim\varphi = a + 1$ и для неединичного унипотентного элемента $z \in H$ преобразование $\varphi(z)$ имеет единственный блок Жордана размерности $a + 1$.*

**Теорема 5** (часть результата [14, теорема 2]). *Пусть $\Gamma = B_n(K)$, $z$ – короткий корневой элемент группы $\Gamma$, $\varphi$ – $p$-ограниченное неприводимое представление со старшим весом $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\omega_i$, $m = m_n + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} m_i$. Предположим, что $m < p$. Тогда $J_{\varphi}(z) = \{k | 1 \leqslant k \leqslant m+1,\ k \equiv m_n+1 \pmod 2\}$.*

**Лемма 6** (часть результата [17, лемма 2.46]). *Пусть $M$ – неразложимый $G$-модуль со старшим весом $\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$ и $v \in M$ – ненулевой вектор старшего веса. Пусть $1 \leqslant s, t < r$. Предположим, что $0 < a_i < p$. Для целого $d$ с $0 < d \leqslant a_i$ определим вектор $v(s, t, d)$ следующим образом. Пусть $d_t = d$. Если $s < t$, положим $d_k = a_k + d_{k+1}$ при $s \leqslant k < t$. Если $s > t$, положим $d_k = a_k + d_{k-1}$ при $s \geqslant k > t$. Теперь запишем*

$$v(s, t, d) = X_{-s,d_s} \dots X_{-k,d_k} \dots X_{-t,d}v.$$

*При* $s = t$ *положим* $v(s,t,d) = X_{-s,d}v$. *Тогда* $v(s,t,d) \neq 0$ *и* $X_{m,b}v(s,t,d) = 0$ *для положительного* $m \neq s$ *и* $b > 0$. *Следовательно, группа* $\mathcal{X}_m$ *фиксирует* $v(s,t,d)$.

В предложении 1 и следствиях 2– 3 $J(h)$ – множество размерностей блоков (без учета кратностей) в форме Жордана элемента $h$ из соответствующей линейной группы.

**Предложение 1** ([12, гл. VIII, теорема 2.7]). *Пусть* $1 \leqslant s \leqslant t \leqslant p$. *Тогда*

$$J(J_s \otimes J_t) = \begin{cases} \{t-s+2i+1 \mid \quad 0 \leqslant i \leqslant s-1\}, & \text{если } s+t \leqslant p; \\ \{p; t-s+2i+1 \quad \mid 0 \leqslant i \leqslant p-t-1\}, & \text{если } s+t > p. \end{cases}$$

*В частности,* $J(J_s \otimes J_p) = \{p\}$.

**Следствие 2** ([4, следствие 2.2.4]). *Пусть* $0 < a \leqslant p$, $0 < b \leqslant a$, $b < p$. *Тогда*

$$\bigcup_{i=1}^{a} J(J_i \otimes J_b) = \begin{cases} \mathbf{N}_1^{a+b-1}, & \text{если } a+b < p+2; \\ \mathbf{N}_1^{p}, & \text{если } a+b \geqslant p+2. \end{cases}$$

**Следствие 3.** *Пусть* $1 < a, b \leqslant p$. *Тогда*

$$\bigcup_{i=1}^{a} \quad \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant b,\ j \equiv b \pmod 2} J(J_i \otimes J_j) = \begin{cases} \mathbf{N}_1^{a+b-1}, & \text{если } a+b < p+2; \\ \mathbf{N}_1^{p}, & \text{если } a+b \geqslant p+2. \end{cases}$$

**Доказательство.** Ввиду следствия 2 можно считать, что $b > a$.

Пусть $I$ – рассматриваемое объединение. Предположим сначала, что $a \equiv b \pmod 2$. Ясно, что $\bigcup_{i=1}^{a} J(J_i \otimes J_a) \subset I$. В силу следствия 2 $\mathbf{N}_1^{2a-1} \subset I$ при $2a-1 \leqslant p$ и $\mathbf{N}_1^{p} = I$ при $2a-1 > p$. Таким образом, можно считать, что $2a-1 < p$. Фиксируем максимальное число $c$ такое, что $a < c \leqslant b$, $c \equiv b \pmod 2$ и $a+c-1 \leqslant p$. Пусть $a < d \leqslant c$ и $d \equiv b \pmod 2$. Ввиду предложения 1 $a+d-1 \in J(J_a \otimes J_d)$ и $a+d-2 \in J(J_{a-1} \otimes J_d)$. Отсюда следует, что $\mathbf{N}_{2a}^{a+c-1} \subset I$. Поэтому $\mathbf{N}_1^{a+c-1} \subset I$, что доказывает следствие при $a \equiv b \pmod 2$.

Теперь предположим, что $a \equiv b-1 \pmod 2$. Используя следствие 2, получаем, что $\mathbf{N}_1^{2a-3} \subset I$ при $2a-3 \leqslant p$ и $\mathbf{N}_1^{p} = I$ при $2a-3 > p$, поскольку $a-1 \equiv b \pmod 2$. При $2a-3 \geqslant p$ наше утверждение доказано. Пусть $2a-3 < p$. Выберем число $c$, как выше. Применяя предложение 1 к элементам $J_a \otimes J_d$ и $J_{a-1} \otimes J_d$ при $a-1 \leqslant d < c$ и $d \equiv b \pmod 2$, убедимся, что $\mathbf{N}_{2a-2}^{a+c-1} \subset I$. Следствие доказано. □

## §3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\omega = \omega(\varphi)$, $M$ – модуль, где реализуется представление $\varphi$, $v \in M$ – ненулевой вектор старшего веса. Ясно, что можно считать, что $\omega \neq 0$. Очевидно, что $J_M(x) \subset \mathbf{N}_1^p$. Положим $x_1 = x_1(1)$, $x_2 = x_r(1)$ и напомним, что $x = x_1 x_2$.

Доказательство теоремы основано на анализе ограничений представлений группы $G$ на различные подсистемные подгруппы с двумя простыми компонентами, содержащие $x$. При этом $x_1$ и $x_2$ оказываются длинным и коротким корневыми элементами из разных компонент такой подгруппы.

1) Предположим, что $\sum_{i=1}^{r-2} a_i \geqslant p-1$, $a_r \neq p-1$ и $a_j < p-1$ при некотором $j < r-1$. Положим

$$
\begin{aligned}
&H_1 = G(1, 2, \ldots, r-2),\ H_2 = G(r),\ H = H_1 H_2,\\
&M_1 = M((a_1\omega_1 + \cdots + a_{r-2}\omega_{r-2})|H_1),\ M_2 = M((a_r\omega_r)|H_2).
\end{aligned}
$$

Ясно, что $H_1 \cong A_{r-2}(K)$ и $H_2 \cong A_1(K)$. В силу теоремы 2 в модуле $M|H$ имеется прямое слагаемое $U \cong M_1 \otimes M_2$. Ввиду леммы 4 $J_U(x) \subset J_M(x)$. По лемме 5 $a_r + 1 \in J_{M_2}(x_2)$. Напомним, что $a_r < p-1$. Ввиду теоремы 3 $J_{M_1}(x_1) = \mathbf{N}_1^p$. Поэтому в силу следствия 2 $J_U(x) = J_M(x) = \mathbf{N}_1^p$.

2) Предположим, что $a_r + 2\sum_{i=1}^{r-1} a_i < p$. Положим

$$
\begin{aligned}
\beta &= \varepsilon_{r-3} + \varepsilon_{r-2} = \alpha_{r-3} + 2\alpha_{r-2} + 2\alpha_{r-1} + 2\alpha_r,\\
H_1 &= G(1, 2, \ldots, r-3, \beta), H_2 = G(r-1, r),\\
H &= H_1 H_2, S_1 = G(1), S_2 = G(r), S = S_1 S_2.
\end{aligned}
$$

Ясно, что $H_1 \cong D_{r-2}(K)$, $H_2 \cong B_2(K)$ и $S_i \cong A_1(K)$, $i = 1, 2$.

Используя обозначения из леммы 6, положим $m = v(r-2, 1, a_1)$ при $\omega \neq a_1\omega_1$, $m = v(r-2, 1, a_1-1)$ при $\omega = a_1\omega_1$, $a_1 > 1$ и $m = v$ при $\omega = \omega_1$. Тогда ввиду той леммы $m \neq 0$ и подгруппы $\mathcal{X}_i$ сохраняют $m$ при $i \neq r-2$ (при $m = v$ это очевидно). Ясно, что $\mathcal{X}_\beta$ тоже сохраняет вектор $m$. Поэтому группа $U^+(H)$ сохраняет $m$ и $M|H$ имеет композиционный фактор $N$ со старшим весом $\omega_H(m)$. Положим $N_i = M(\omega(m)|H_i)$, $i = 1, 2$. Тогда $N \cong N_1 \otimes N_2$. Легко видеть, что

$$
\omega_{H_1}(m) = a_2\omega_1 + a_3\omega_2 + \cdots + a_{r-2}\omega_{r-3} + (a_{r-2} + 2a_{r-1} + a_r)\omega_{r-2}
$$

при $\omega \neq a_1\omega_1$ и $\omega_{H_1}(m) = \omega_1$ при $\omega = a_1\omega_1$;

$$\omega_{H_2}(m) = (\sum_{i=1}^{r-1} a_i)\omega_1 + a_r\omega_2$$

при $\omega \neq a_1\omega_1$ и $\omega_{H_2}(m) = (a_1 - 1)\omega_1$ при $\omega = a_1\omega_1$.

Покажем, что модуль $M|S$ вполне приводим. Пусть $\alpha$ и $\alpha_s$ соответственно – максимальный и максимальный короткий корни группы $G$. Ввиду [1, таблица II] $\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \omega_2$, $\alpha_s = \varepsilon_1 = \omega_1$. Поэтому $\langle \mu, \alpha_s \rangle \leqslant \langle \omega, \alpha_s \rangle$ и $\langle \mu, \alpha \rangle \leqslant \langle \omega, \alpha \rangle$ для любого веса $\mu \in X(M)$. Так как $\alpha = \alpha_1 + 2\sum\limits_{i=2}^{r} \alpha_i$ и $\alpha_s = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i$, то

$$\langle \omega, \alpha \rangle = a_1 + a_r + 2\sum_{i=2}^{r-1} a_i \leqslant a_r + 2\sum_{i=1}^{r-1} a_i = \langle \omega, \alpha_s \rangle < p.$$

Тогда $\langle \mu, \alpha \rangle < p$ и $\langle \mu, \alpha_s \rangle < p$ для любого веса $\mu \in X(M)$. В силу леммы 2 модули $M|G(\alpha)$ и $M|G(\alpha_s)$ вполне приводимы. Поэтому вполне приводимы и ограничения $M|S_1$ и $M|S_2$. Из леммы 3 следует полная приводимость модуля $M|S$. Тогда ввиду следствия 1 $J_N(x) \subset J_M(x)$.

Предположим сначала, что $\omega \neq a_1\omega_1$. Положим

$$t = a_2 + a_r + 2\sum_{i=3}^{r-1} a_i,\ \ k = a_r + 2\sum_{i=1}^{r-1} a_i,\ \ l = \min(p, t + k + 1).$$

В силу теоремы 3 $J_{N_1}(x_1) = \mathbf{N}_1^{t+1}$ и в силу теоремы 5

$$J_{N_2}(x_2) = \begin{cases} 1, 3, \ldots, k+1, & \text{если } a_r \text{ четно}, \\ 2, 4, \ldots, k+1, & \text{если } a_r \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Заметим, что $t \neq 0$. Тогда ввиду следствия 3 $J_N(x) = \mathbf{N}_1^l$. В силу теоремы 4 $d_\varphi(x) = l$. Поэтому $\varphi(x)$ не может иметь блоков Жордана размерности, большей $l$, и $J_N(x) = J_M(x)$.

Теперь пусть $\omega = a_1\omega_1$. По теореме 3 $J_{N_1}(x_1) = \{1, 2\}$. Ввиду теоремы 5

$$J_{N_2}(x_2) = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant 2a_1 - 1, i \equiv 1 \pmod 2\}.$$

При $a_1 = 1$ очевидно, что $J_N(x) = J_{N_1}(x_1)$. В силу следствия 3 $J_N(x) = \mathbf{N}_1^{2a_1}$ при $a_1 > 1$. В обоих случаях из сказанного выше следует утверждение теоремы, ибо $d_\varphi(x) = 2a_1 + 1$ по теореме 4.

3) Предположим теперь, что $a_r + 2\sum\limits_{i=1}^{r-1} a_i \geqslant p$, но $2a_{r-1} + a_r < p$.

Положим $H_1 = G(1, 2, \dots, r-3)$, $H_2 = G(r-1, r)$, $H = H_1H_2$. Ясно, что $H_1 \cong A_{r-3}(K)$ и $H_2 \cong B_2(K)$. Определим подгруппы $S_1$, $S_2$ и $S$ как в пункте 1.

3.1) Пусть $2a_{r-1} + a_r < p-2$. В силу доказанного в пункте 1 можем предположить, что $\sum\limits_{i=1}^{r-2} a_i < p-1$.

В ограничении $M|H$ построим прямое слагаемое $U$ и его композиционный фактор $N$ такие, что $U$ – вполне приводимый $S$-модуль и $J_N(x) = \mathbf{N}_1^p$. Тогда $J_M(x) = \mathbf{N}_1^p$, поскольку в силу следствия 1 и леммы 4 $J_N(x) \subset J_U(x) \subset J_M(x)$.

Для целого неотрицательного $t$ пусть $X_t \subset X(M)$ – совокупность всех весов вида $\omega - t\alpha_{r-2} - \sum_{i \neq r-2} x_i\alpha_i$ и $M_t \subset M$ – сумма всех весовых подпространств с весами из $X_t$. Ясно, что $M_t$ – прямое слагаемое модуля $M|H$. В качестве $U$ выберем модуль $M_t$ при подходящем $t$.

Фиксируем множество всех индексов $j$ с $1 \leqslant j \leqslant r-2$ таких, что $a_j > 0$. Для таких $j$ и $b \in \mathbf{N}_1^{a_j}$ положим

$$q = q(b, j) = b + \sum_{i=j+1}^{r-2} a_i$$

при $j < r-2$ и $q = b$ при $j = r-2$;

$$f = f(b, j) = 2(b + \sum_{i=j+1}^{r-1} a_i) + a_r \text{ и } s = s(b, j) = q + \sum_{i=1}^{r-3} a_i.$$

Ясно, что $f(b_1, j_1) > f(b, j)$ и $s(b_1, j_1) > s(b, j)$, если $j_1 < j$ или $j_1 = j$, $b_1 > b$. Выберем такие $b$ и $j$, что $f(b, j)$ и $s(b, j)$ оба меньше $p$, но $f(b_1, j_1)$ или $s(b_1, j_1) \geqslant p$ при $j_1 < j$ или $b_1 > b$. Такие $b$ и $j$ существуют, так как $\sum\limits_{i=1}^{r-3} a_i < p-1$, $2a_{r-1} + a_r < p-2$, а $f(a_1, 1) \geqslant p$.

Покажем, что $S$-модуль $M_q$ вполне приводим при $q = q(b, j)$.

Пусть $\gamma = \alpha_1 + \dots + \alpha_{r-3}$. Тогда $\gamma$ – максимальный корень группы $H_1$. Так как корни $\alpha_1$ и $\gamma$ лежат в одной орбите относительно группы Вейля группы $H_1$, то $\max_{\mu \in X_q} \langle \mu, \alpha_1 \rangle = \max_{\mu \in X_q} \langle \mu, \gamma \rangle$. Заметим, что $\langle \alpha_{r-2}, \gamma \rangle = -1$, $\langle \alpha_1, \gamma \rangle = \langle \alpha_{r-3}, \gamma \rangle = 1$ и $\langle \alpha_k, \gamma \rangle = 0$ при $k \notin \{1, r-3, r-2\}$. Поэтому $\max_{\mu \in X_q} \langle \mu, \gamma \rangle \leqslant \langle \omega, \gamma \rangle + q = s < p$.

Положим $\sigma = \alpha_{r-1} + \alpha_r$. Тогда $\sigma$ – максимальный короткий корень группы $H_2$. Поскольку $\alpha_r$ и $\sigma$ находятся в одной орбите относительно группы Вейля группы $H_2$, то $\max_{\mu \in X_q} \langle \mu, \alpha_r \rangle = \max_{\mu \in X_q} \langle \mu, \sigma \rangle$.

Заметим, что $\langle\alpha_{r-2},\sigma\rangle = -2$ и $\langle\alpha_i,\sigma\rangle = 0$ при $i \neq r-2$. Поэтому $\max_{\mu\in X_q}\langle\mu,\sigma\rangle = \langle\omega,\sigma\rangle + 2q = f < p$. Теперь из леммы 2 следует, что $U$ – вполне приводимый $S_1$- и $S_2$-модуль. Ввиду леммы 3 $S$-модуль $U$ вполне приводим.

Пусть $m = v(r-2,j,b)$ в обозначениях леммы 6 и $N_i = M(\omega|H_i(m))$, $i = 1,2$. В силу той же леммы $m \neq 0$ и группы $\mathcal{X}_k$ фиксируют $m$ при $k \neq r-2$. Поэтому $U^+(H)$ сохраняет $m$. Отсюда следует, что $H$-модуль $KHm$ имеет композиционный фактор $N \cong N_1 \otimes N_2$. Легко видеть, что

$$\omega_{H_1}(m) = a_1\omega_1 + \cdots + a_{j-2}\omega_{j-2} + (a_{j-1}+b)\omega_{j-1} + (a_j + a_{j+1} - b)\omega_j + a_{j+2}\omega_{j+1} + \cdots + a_{r-2}\omega_{r-3}$$

при $j < r-3$,

$$\omega_{H_1}(m) = (a_1\omega_1 + \cdots + a_{r-5}\omega_{r-5} + (a_{r-4}+b)\omega_{r-4} + (a_{r-3}+a_{r-2}-b)\omega_{r-3}$$

при $j = r-3$ и

$$\omega_{H_1}(m) = (\sum_{i=1}^{r-4} a_i\omega_i) + (a_{r-3}+b)\omega_{r-3}$$

при $j = r-2$;

$$\omega_{H_2}(m) = (b + \sum_{i=j+1}^{r-1} a_i)\omega_{r-1} + a_r\omega_r.$$

Ясно, что $KHm \subset U$, поэтому $N$ – композиционный фактор $H$-модуля $U$. Положим $A = \sum_{i=1}^{r-2} a_i$ при $j < r-2$ и $A = \sum_{i=1}^{r-3} a_i + b$ при $j = r-2$. Ввиду теоремы 3 $J_{N_1}(x_1) = \mathbf{N}_1^{A+1}$ и в силу теоремы 5 $J_{N_2}(x_2)$ есть совокупность всех чисел из $\mathbf{N}_1^{f+1}$, сравнимых с $f+1$ по модулю 2.

Докажем, что $1+A+f \geqslant p$. Заметим, что $A+f > s$. Действительно,

$$s = \sum_{i=1}^{r-3} a_i + \sum_{i=j+1}^{r-2} a_i + b < \sum_{i=1}^{r-2} a_i + 2(\sum_{i=j+1}^{r-1} a_i + b) + a_r = A + f$$

при $j < r-2$ и

$$s = \sum_{i=1}^{r-3} a_i + b = A < A + f$$

при $j = r-2$. Ясно, что $A > 0$, так как $\sum\limits_{i=1}^{r-2} a_i > 0$ в силу предположений этого пункта и $b > 0$. Учитывая выбор параметров $b$ и $j$, легко заключить, что $s = p-1$ или $f = p-2$ или $p-1$. Отсюда следует, что $1 + A + f \geqslant p$.

В силу следствия 3 $J_N(x) = \mathbf{N}_1^p$, что и требовалось.

3.2) Пусть $2a_{r-1} + a_r = p-2$ или $p-1$. Напомним, что $\sum\limits_{i=1}^{r-3} a_i \neq 0$. Положим $M_i = M(\omega|H_i)$, $i = 1, 2$. В силу теоремы 2 $H$-модуль $U = KHv \cong M_1 \otimes M_2$. Пусть $n = \min(p, 1 + \sum\limits_{i=1}^{r-3} a_i)$. Предположим сначала, что $a_i \neq p-1$ для некоторого $i < p-2$. Тогда в силу теоремы 3 $J_{M_1}(x_1) = \mathbf{N}_1^n$. Ввиду теоремы 5 $J_{M_2}(x_2)$ есть совокупность четных чисел от 2 до $p-1$ или нечетных чисел от 1 до $p$. Тогда в силу следствия 3 $J_M(x) = \mathbf{N}_1^p$.

Пусть теперь $a_1 = \ldots = a_{r-3} = p-1$. Тогда $a_{r-2}$ и $a_r \neq p-1$. Поэтому выполняются условия пункта 1 теоремы, и значит $J_M(x) = \mathbf{N}_1^p$.

## Литература


1. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. IV–VI. Мир, М., 1972. 331с.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. VII–VIII. Мир, М., 1978. 342с.
3. М. В. Величко, *О поведении корневых элементов в модулярных представлениях симплектических групп.* — Труды Ин-та математики НАН Беларуси **14**, No. 2 (2006), 28–34.
4. М. В. Величко, *Свойства малых унипотентных элементов в модулярных представлениях классических алгебраических групп.* — Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Институт математики НАН Беларуси. Минск, 2007. 16с.
5. М. В. Величко, И. Д. Супруненко, *Малые квадратичные элементы в представлениях специальной линейной группы с большими старшими весами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 84–120.
6. А. А. Осиновская, *Регулярные унипотентные элементы из естественно вложенных подгрупп ранга 2 в модулярных представлениях классических групп.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **356** (2008), 159–178.
7. А. А. Осиновская, *Регулярные унипотентные элементы из подсистемных подгрупп типа $C_2$ в представлениях.* — Труды Ин-та математики НАН Беларуси **17**, No. 1 (2009), 119–126.
8. А. А. Осиновская, И. Д. Супруненко, *Блочная структура унипотентных элементов из естественно вложенных подгрупп типа $A_3$ в специальных модулярных представлениях групп типа $A_n$.* — Доклады НАН Беларуси **51**, No. 6 (2007), 25–29.

9. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М., 1975. 262с.
10. И. Д. Супруненко, *Минимальные полиномы элементов порядка p в неприводимых представлениях групп Шевалле над полями характеристики p.* — Вопросы алгебры и логики. Труды Ин-та математики СО РАН. Новосибирск **30** (1996), 126–163.
11. И. Д. Супруненко, *О блочной структуре регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типа $A_1 \times A_2$ в представлениях специальной линейной группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 247–269.
12. У. Фейт, *Теория представлений конечных групп.* Наука, М., 1990. 465с.
13. R. Lawther, *Jordan block sizes of unipotent elements in exceptional algebraic groups.* — Commun. in Algebra **25** (1995), 4125–4156.
14. A. A. Osinovskaya, I. D. Suprunenko, *On the Jordan block structure of images of some unipotent elements in modular irreducible representations of the classical algebraic groups.* — J. Algebra **273** (2004), 586–600.
15. A. A. Osinovskaya, *Restrictions of representations of algebraic groups of types $E_n$ and $F_4$ to naturally embedded $A_1$-subgroups and the behavior of root elements.* — Commun. Algebra **33** (2005), 213–220.
16. S. Smith, *Irreducible modules and parabolic subgroups.* — J. Algebra **75** (1982), 286–289.
17. I. D. Suprunenko, *The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic.* — Memoirs Amer. Math. Soc. **200**, No. 939 (2009).
18. P. H. Tiep, A. E. Zalesskii, *Mod p reducibility of unramified representations of finite groups of Lie type.* — Proc. London Math. Soc. **84** (2002), 439–472.
19. M. V. Velichko, *On the behaviour of the root elements in irreducible representations of simple algebraic groups.* — Труды Ин-та математики НАН Беларуси **13**, No. 2 (2005), 116–121.

Busel T. S. On the Jordan block structure of a product of long and short root elements in irreducible representations of algebraic groups of type $B_r$.

The behaviour of a product of commuting long and short root elements of the group of type $B_r$ in $p$-restricted irreducible representations is investigated. For such representations with certain local properties of highest weights it is shown that the images of these elements have Jordan blocks of all a priori possible sizes. For a $p$-restricted representation with highest weight $a_1\omega_1 + \cdots + a_r\omega_r$ this fact is proved when $a_j \neq p-1$ for some $j < r-1$ and one of the following holds:

1) $a_r \neq p-1$ and $\sum\limits_{i=1}^{r-2} a_i \geqslant p-1$;

2) $2a_{r-1}+a_r<p$, $\sum\limits_{i=1}^{r-3} a_i \neq 0$ for $2a_{r-1}+a_r=p-2$ or $p-1$ and $\sum\limits_{i=1}^{r-3} a_i \neq 0$ or $(r-3)(p-1)$ for $a_r=p-1$.

Институт математики НАН Беларуси
*E-mail*: tbusel@gmail.com

Поступило 25 сентября 2014 г.