Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 430, 2014 г.

С. С. Афанасьева, Р. П. Востокова, Г. К. Пак

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛОГАРИФМА МНОГОМЕРНОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ В ЛОКАЛЬНОМ ПОЛЕ

§1

Классификация Хонды многомерных формальных групп над кольцом целых неразветвленного локального поля в работе [1] была обобщена на формальные группы в локальных полях с кольцом эндоморфизмов $\mathbb{Z}_p$, в частности был явно описан логарифм формальной группы. В настоящей работе этот результат обобщается с целью классификации формальных A-модулей, т.е. формальных групповых законов над некоторой A-алгеброй B, допускающих кольцо A в качестве кольца эндоморфизмов.

Хорошо известно, что любая формальная группа над коммутативной $\mathbb{Z}_p$-алгеброй строго изоморфна p-типической формальной группе, т.е. формальной группе с логарифмом $\lambda = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$, для которого $\lambda_i = \sum a^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m} X_1^{\alpha_1}\ldots X_m^{\alpha_m}$, где все $a^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ равны 0, кроме тех $a^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$, для которых $\alpha_s = 0$ при всех s кроме одного, а оставшийся $\alpha_s \neq 0$ – степень p. Логарифм такой формальной группы удобно представить в виде $\Lambda(\Delta)(X)$, где $\Lambda(\Delta) = (\Lambda_i(\Delta))$, а Δ – оператор, действующий на соответствующем кольце рядов по правилу $\Delta(aX_i^b) = aX_i^{pb}$.

Пусть K – локальное поле, $\mathcal{O}_K$ – его кольцо целых, π – простой элемент в $\mathcal{O}_K$, $v_K(p) = e_0$, N – подполе инерции поля K. Пусть F – m-мерный формальный групповой закон над $\mathcal{O}_K$. Через $M_m(R)$ будем обозначать кольцо матриц размера $m \times m$ над кольцом R, I_m – единичная матрица размера m. В работе [1] была получена следующая классификация логарифмов формальных групп над кольцом целых локального поля (т.е. $\mathbb{Z}_p$-модулей).

Теорема 1. *Пусть $\Lambda(\Delta)(X)$ (где $\Lambda \in M_m(K)$) является логарифмом формальной группы F. Тогда Λ можно представить в виде vu^{-1},*

Ключевые слова: формальные группы, формальные модули, многомерные формальные группы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ No. 6.15.527.2014.

где $vp^l\pi^{-p^l} \in M_m(\mathcal{O}_K[[\Delta]])$, $l = [\log_p \frac{e_0}{p-1}]$, u *– специальный элемент* $M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]])$*(т.е.* $u \equiv pI_m \mod \Delta$*).*

§2

В настоящей работе мы обобщим данный результат на случай формального $\mathcal{O}_{K_0}$-модуля (см. ниже). Будем придерживаться следующих обозначений:

- K – конечное расширение локального поля K_0, e – индекс ветвления K/K_0.
- q – порядок поля вычетов поля K_0.
- A – кольцо целых поля K_0, π_0 – простой элемент в нем.
- T – подполе инерции в K/K_0, $\mathcal{O}_T$ – его кольцо целых.
- σ – автоморфизм Фробениуса T/K_0.
- $\mathcal{O}_T[[\Delta]]$ – некоммутативное кольцо рядов, в котором уинножением задано следующим образом $\Delta a = \sigma(a)\Delta$.
- $X = (X_1, \ldots, X_m)$, $X^q = (X_1^q, \ldots, X_m^q)$

Для гомоморфизма колец $g : A \longrightarrow B$, через g_* будем обозначать гомоморфизм из $A[[X]]$ в $B[[X]]$, полученный применением g к коэффициентам.

Пусть теперь F – m-мерный формальный групповой закон над $\mathcal{O}_K$ с кольцом эндоморфизмов, включающим A, т.е. задано вложение $[\cdot] : A \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K} F$ такое, что $[a](X) \equiv aI_m \mod \deg 2$. В рассматриваемом случае (как и всегда в случае нулевой характеристики) $[a](X) = \lambda^{-1}(aI_m\lambda(X))$, где λ – логарифм формальной группы F. Такой формальный групповой закон будем называть A-модулем. Обобщим теорему 1 на случай A-модуля.

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda \in M_m(K[[\Delta]])$ *соответствует формальному* A*-модулю* $F(X,Y)$*. Тогда* Λ *можно представить в виде* vu^{-1}*, где* $v\pi_0^l\pi^{-q^l} \in M_m(\mathcal{O}_K[[\Delta]])$*,* $l = [\log_q \frac{e}{q-1}]$*,* u *– специальный элемент* $M_m(\mathcal{O}_T[[\Delta]])$*.*

В [2] было показано, что всякий A-модуль $F(X,Y)$ над A-алгеброй B строго изоморфен некоторому A-типическому, т.е. имеет вид $\phi_* F_V^A(X,Y)$, где $\phi : A[V_1, V_2, \ldots] \longrightarrow B$ – гомоморфизм, а $F_V^A(X,Y)$ – универсальный A-типический A-модуль, логарифм которого $f_V^A(X)$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$f_V^A(X) = X + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_0^{-1} V_i \overline{\sigma}_*^i f_V^A(X^{q^i}) \qquad (1)$$

(здесь $\overline{\sigma} : K_0[V_1, V_2, \ldots] \longrightarrow K_0[V_1, V_2, \ldots]$, $\overline{\sigma}(V_i) = V_i^q, \overline{\sigma}|_{K_0} = \mathrm{id}$). Легко видеть, что логарифм A-типической формальной группы имеет вид $X + \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i X^{q^i}$.

Рассмотрим кольцо $\mathfrak{A} = \mathcal{O}_T[[t]]$. Продолжим эндоморфизм σ на $\mathfrak{A}$, положив $\sigma(t) = t^q$. Следующая лемма является аналогом утверждения 21.8.6 работы [2].

Лемма 1. *Пусть F – m-мерный формальный A-модуль над $\mathfrak{A}$ с логарифмом $f(X) = X + \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i X^{q^i}$. Тогда $f(X)$ удовлетворяет функциональному уравнению*

$$f(X) = X + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_0^{-1} v_i \sigma_*^i f(X^{q^i}) \qquad (2)$$

для некоторых $v_i \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Поскольку $f(X) = \phi_* f_V^A(X)$, а $f_V^A(X)$ удовлетворяет уравнению (1), то

$$f(X) \equiv X + \pi_0^{-1} v_1 X^q \mod \deg(q+1),$$

где $v_1 = \phi(V_1) \in \mathfrak{A}$.

Далее, пусть уже найдены $v_1, v_2, \ldots v_{n-1} \in \mathfrak{A}$ такие, что

$$f(X) \equiv X + \sum_{i=1}^{n-1} \pi_0^{-1} v_i \sigma_*^i f(X^{q^i}) \mod \deg q^n. \qquad (3)$$

Заметим, что в силу функциональной леммы (см. [2]) ряд $\overline{\lambda}(X)$, построенный с помощью функционального уравнения

$$\overline{\lambda}(X) = X + \sum_{i=1}^{n-1} \pi_0^{-1} v_i \sigma_*^i \overline{\lambda}(X^{q^i}),$$

является логарифмом некоторого формального A-модуля $\overline{F}(X, Y)$. Поэтому в силу универсальности формального A-модуля $F_V^A(X, Y)$ существует гомоморфизм $\overline{\phi} : A[V_1, V_2, \ldots] \longrightarrow \mathfrak{A}$ такой, что $\overline{F}(X, Y) =$

$\overline{\phi}_* F_V^A(X,Y)$. Пусть $f_V^A(X) = X + \sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i X^{q^i}$. Продолжим ϕ и $\overline{\phi}$ до гомоморфизмов $K_0[V] \longrightarrow \mathfrak{A} \otimes_A K_0$. Сравнение (3) означает, что $\phi(B_i) = \overline{\phi}(B_i)$ для всех $1 \leqslant i < n$. Из (1) легко видеть, что $V_i \in K[B_1, \ldots, B_i]$, поэтому $\phi(V_i) = \overline{\phi}(V_i)$ для всех $1 \leqslant i < n$. Ясно, что

$$f_V^A(X) \equiv X + \pi_0^{-1} V_n X^{q^n} + g_n(V_1, \ldots, V_{n-1}, X) \mod \deg q^{n+1}$$

(где g_n – ряд от $V_1, \ldots, V_{n-1}, X$), поэтому $\phi(B_n) - \overline{\phi}(B_n) = \pi_0^{-1}(\phi(V_n) - \overline{\phi}(V_n))$. Значит существует $v_n \in \mathfrak{A}$ такой, что

$$f(x) \equiv \overline{\lambda}(X) + \pi_0^{-1} v_n \mod \deg q^{n+1}.$$

Таким образом, последовательно можно подобрать коэффициенты $v_1, v_2, \ldots$, удовлетворяющие уравнению (2). □

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем эпиморфизм $g : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{O}_K$ такой, что $g(t) = \pi$. Поскольку существует универсальный формальный A-модуль, который определен над свободной A-алгеброй $A[V_1, V_2, \ldots]$, то существует формальный групповой закон G над $\mathfrak{A}$ такой, что $F = g_*(G)$. В силу леммы 1 существует специальная матрица U над $\mathfrak{A}[[\Delta]]$ такая, что логарифм группы G равен $\pi_0 U^{-1}(X)$. Представим U в виде $u - w$, где $u \in M_m(\mathcal{O}_T[[\Delta]])$, $u \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta, w \in tM_m(\mathfrak{A}[[\Delta]])\Delta$. Тогда

$$U^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (u^{-1} w)^i \right) u^{-1}. \tag{4}$$

Легко видеть, что $u^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \pi_0^{-i-1} u_i \Delta^i$, где $u_i \in M_m(\mathcal{O}_T)$, поэтому матрица $u^{-1}w$ может быть представлена в виде $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \pi_0^{-i-1} t^{q^i} u_i' \Delta^{i+1}$, где u_i' – некоторые ряды, поскольку в $\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} (u^{-1}w)^i \right)$ наименьшая степень t при π_0^{-i-1} это q^i, то

$$U^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_0^{-i-1} t^{q^i} w_i u^{-1}$$

для некоторых $w_i \in M_m(\mathfrak{A}[[\Delta]])$. Проверим, что $\pi_0^{-l} \pi^{q^l} | \pi_0^{-i} \pi^{q^i}$ для каждого i. Действительно, нормирование (в поле K) v_i элемента $\pi_0^{-i} \pi^{q^i}$ равно $q^i - ei$. Разность $v_i - v_{i+1}$ равна $q^i(1-q) + e$, следовательно, v_l

– минимальный из v_i. Так как v получается подстановкой π вместо t в (4), то получаем требуемое. $\square$

Первый из авторов благодарит С.-Петербургский государственный университет за поддержку исследований.

Литература

1. М. В. Бондарко, С. В. Востоков, *Явная классификация формальных групп над локальными полями.* — В кн.: Теор. чисел, алгебра и алгебр. геометрия, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН, **241**, Наука, М. 2003, 43–67.
2. M. Hazewinkel, *Formal groups and applications.* Acad. Press, New York (1978).

Afanas'eva S. S., Vostokova R. P., Pak G. K. Classification of logarithm of multidimensional formal group in a local field.

In this paper an explicit type of logarithm of the formal group over the ring of integer of local field with fixed ring of endomorphisms is described.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: cheery_sonya@mail.ru

E-mail: rvostokova@yandex.ru

E-mail: pakgk@imes.dvgu.ru

Поступило 21 июня 2014 г.