Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 430, 2014 г.

С. С. Афанасьева, С. В. Востоков

КЛАССИФИКАЦИЯ ФОРМАЛЬНЫХ A-МОДУЛЕЙ В МАЛОМ ВЕТВЛЕНИИ

§1. Введение

В работе [1] были классифицированы формальные группы ($\mathbb{Z}_p$-модули) в терминах их логарифма. Были рассмотрены два инварианта формальных групповых законов, дающие полную их классификацию, и описан способ, позволяющий классифицировать формальные группы. Этот способ был наглядно продемонстрирован, в частности, для случая малого ветвления. Однако в случае малого ветвления ($e < p$) классификация может быть получена и без использования модульных инвариантов, а лишь опираясь на расширение поля скаляров и известную классификацию Хонды для неразветвленного случая. В данной работе последний подход был обобщен на случай формальных групп с фиксированным кольцом эндоморфизмов A (A-модулей).

§2. Обозначения

Будем придерживаться следующих обозначений.

- K_0 – локальное поле с полем вычетов порядка q.
- e_0 и f_0 – индекс ветвления и степень инерции поля K_0 соответственно.
- A – кольцо целых поля K_0, π_0 – простой элемент в нем.
- K – конечное расширение локального поля K_0 с полем вычетов характеристики $p > 2$, e – индекс ветвления K/K_0, v_K – нормализованное нормирование в поле K.
- $\mathcal{O}_K$ – кольцо целых поля K, π – его простой элемент.
- T – подполе инерции в K/K_0, $\mathcal{O}_T$ – его кольцо целых.
- $\mathfrak{R}$ – система представителей поля вычетов поля K в $\mathcal{O}_T$.
- σ – автоморфизм Фробениуса T/K_0.

Ключевые слова: формальные группы, формальные модули, многомерные формальные группы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ no. 6.15.527.2014.

Авторы благодарят Санкт-Петербургский государственный университет за поддержку исследований.

- $\mathcal{O}_T[[\Delta]]$ – некоммутативное кольцо степенных рядов, в котором умножением задано следующим образом $\Delta a = \sigma(a)\Delta$.
- $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}$, $X^q = \begin{pmatrix} X_1^q \\ \vdots \\ X_m^q \end{pmatrix}$.
- Δ – оператор, действующий на ряды по правилу $\Delta(cX^k) = cX^{qk}$.

Далее будем предполагать, что $v_K(q) < q$, т.е.

$$ee_0 f_0 < p^{f_0}. \tag{1}$$

Как и в [1] $M_m(\mathfrak{A})$ обозначает кольцо матриц размера $m \times m$ над кольцом $\mathfrak{A}$, I_m – единичная матрица размера m.

Следуя [2], A-модулем будем называть m-мерный формальный групповой закон F над $\mathcal{O}_K$, для которого задано вложение

$$[\cdot] : A \hookrightarrow \operatorname{End}_{\mathcal{O}_K} F$$

такое, что $[a](X) \equiv aI_m \mod \deg 2$. В рассматриваемом случае (как и всегда в случае нулевой характеристики) $[a](X) = \lambda^{-1}(aI_m\lambda(X))$, где λ – логарифм формальной группы F.

§3. Основные результаты

Как известно из [2, теорема 21.5.6], каждый формальный A-модуль над A-алгеброй B строго изоморфен A-типическому. При этом, в силу критерия A-типичности (см. [2, теорема 21.5.9]) в случае, если гомоморфизм $B \longrightarrow B \otimes_A K$ инъективен (в нашем случае это условие, очевидно, выполняется), логарифм формального A-модуля имеет вид $\lambda(X) = X + b_1X^q + b_2X^{q^2} + \dots$, $b_i \in B \otimes_A K$, т.е. его можно представить в виде $\lambda(X) = \Lambda(\Delta)(X)$.

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. 1) $\lambda(X) = \Lambda(\Delta)(X)$ – *логарифм одномерного A-типического формального A-модуля над кольцом $\mathcal{O}_K$, если и только если $\Lambda = vu^{-1}$, где $u \in \mathcal{O}_T[[\Delta]]$, $u \equiv \pi_0 \mod \Delta$, а $v \in \pi_0 + \pi\mathcal{O}_K[[\Delta]]\Delta$.*

2) *Любой формальный A-модуль над $\mathcal{O}_K$ изоморфен A-типическому с таким логарифмом.*

Теорема 2. *Два A-типических формальных A-модуля $F(X,Y)$ и $F'(X,Y)$ с логарифмами $\lambda(X) = vu^{-1}(X)$ и $\lambda'(X) = v'u'^{-1}(X)$ строго* *изоморфны над $\mathcal{O}_K$ тогда и только тогда, когда $u' = \varepsilon u$, $v' = v + gu$ при некоторых $\varepsilon \in 1 + \mathcal{O}_T[[\Delta]]\Delta$, $g \in \pi\mathcal{O}_K[[\Delta]]\Delta$.*

Теорема 3. *В каждом классе изоморфных формальных A-модулей над $\mathcal{O}_K$ имеется единственный канонический представитель с логарифмом $\lambda_{can}(X)$ следующего вида:*

а) *Пусть $\operatorname{ht} F = \infty$, тогда $\lambda_{can}(X) = \frac{v_{can}}{\pi_0}(X)$, где $v_{can}(\Delta) = \pi_0 - \pi r_1 - \ldots - \pi^{e-1} r_{e-1}$, $r_i \in (\mathfrak{R} \cup \{0\})[[\Delta]]$.*

б) *Пусть $\operatorname{ht} F = h < \infty$, тогда $\lambda_{can}(X) = (v_{can}(\Delta)(u_{can}(\Delta))^{-1})(X)$, где $u_{can} = \pi_0 - a_1\Delta - \ldots - a_h\Delta^h$, $a_1, \ldots, a_{h-1} \in \pi_0\mathcal{O}_T$, $a_h \in \mathcal{O}_T^*$, а $v_{can} = \pi_0 - \pi r_1 - \ldots - \pi^{e-1} r_{e-1}$. При этом $r_i(\Delta)$ – многочлены из $\mathcal{O}_T[\Delta]\Delta$ степени не превосходящей h.*

Замечание 1. Эти утверждения являются явным аналогом классификационных результатов в случае $\mathbb{Z}_p$-модулей (см. [1, теорема 6.3.1]).

§4. Расширение скаляров

В работе [1] был построен функтор ϕ из категории формальных групп над $\mathcal{O}_K$ в категорию формальных групп над $\mathcal{O}_T$. Как видно из предложения 2.1.2 работы [1], этот функтор переводит A-модули в A-модули.

§5. Предварительные замечания

Предложение 1. *Пусть $\Lambda(\Delta) \in M_m(T[[\Delta]])$. $\Lambda(\Delta)(X)$ является логарифмом формального A-модуля над $\mathcal{O}_T$ тогда и только тогда, когда $\Lambda = \pi_0 U^{-1}$ для некоторой матрицы $U \in M_m(\mathcal{O}_T[[\Delta]])$, $U \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta$.*

Доказательство. Предложение является следствием классической теории Хонды и ее обобщения в [2]. □

Лемма 1. *Пусть $\Lambda, \Lambda' \in M_m(T[[\Delta]])$ и $\Lambda \equiv \Lambda' \mod \pi_0\Delta$. Тогда $\Lambda(\Delta)(X)$ является логарифмом m-мерного формального A-модуля F над $\mathcal{O}_T$, если и только если $\Lambda'(\Delta)(X)$ является логарифмом формального A-модуля F' над $\mathcal{O}_T$. В этом случае F и F' строго изоморфны.*

Доказательство. Пусть

$$\Lambda'(\Delta) = \Lambda(\Delta) + \pi_0 M(\Delta),$$

где $M(\Delta) \in M_m(\mathcal{O}_T[[\Delta]])\Delta$. По предложению 1 $\Lambda(\Delta)(X)$ является логарифмом формального A-молуля над $\mathcal{O}_T$ тогда и только тогда, когда $\Lambda = \pi_0 U^{-1}$ для некоторой матрицы $U \in M_m(\mathcal{O}_T[[\Delta]])$, $U \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta$. Но тогда

$$\Lambda' = \Lambda + \pi_0 M = \pi_0(U(I_m + MU)^{-1})^{-1},$$

что означает, что $\Lambda'(\Delta)(X)$ тоже является логарифмом формального A-модуля над $\mathcal{O}_T$. $\square$

Следствие 1. *Матрица*

$$T_\Delta = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \pi_0\alpha_0^{(1)}\Delta & \pi_0\alpha_0^{(2)}\Delta & \dots & \pi_0\alpha_0^{(e-1)}\Delta \\ \alpha_1^{(0)}\Delta & \varepsilon_1 & \pi_0\alpha_1^{(2)}\Delta & \dots & \pi_0\alpha_1^{(e-1)}\Delta \\ \alpha_2^{(0)}\Delta & \alpha_2^{(1)}\Delta & \varepsilon_2 & \dots & \pi_0\alpha_2^{(e-1)}\Delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{e-1}^{(0)}\Delta & \alpha_{e-1}^{(1)}\Delta & \dots & \dots & \varepsilon_{e-1} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i^{(j)} \in \mathcal{O}_T[[\Delta]]$, $\varepsilon_i \in 1 + \mathcal{O}_T[[\Delta]]\Delta$, соответствует логарифму e-мерного формального A-модуля над $\mathcal{O}_T$ (т.е. $\lambda(X) = T_\Delta(X)$ является логарифмом) тогда и только тогда, когда матрица

$$T'_\Delta = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1^{(0)}\Delta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2^{(0)}\Delta & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{e-1}^{(0)}\Delta & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

является таковой. В случае, когда условие выполняется, соответствующие формальные A-модули изоморфны.

Лемма 2. *Для матрицы $\Lambda \in M_m(K[[\Delta]])$ $\Lambda(X)$ является логарифмом формального A-модуля тогда и только тогда, когда матрица логарифмов является логарифмом me-мерного A-модуля над $\mathcal{O}_T$.*

Так же, как и в [1], определим действие $\mathcal{O}_K$ на $K[[\Delta]]$, положив

$$\langle\alpha\rangle\Big(\sum_{i=0}^{\infty} c_i\Delta^i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\alpha^{q^i}\Delta^i$$

для $\alpha \in \mathcal{O}_K$.

Для формулировки следующих лемм предположим, что $\Lambda = vu^{-1}$, где $u \in M_m(\mathcal{O}_T[[\Delta]])$, $u \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta$, $v \in M_m(\mathcal{O}_K[[\Delta]])$, $v \equiv \pi_0 I_m \mod \pi\Delta$.

Лемма 3. $\langle \pi^s \rangle \Lambda \vdots \pi^s$.

Доказательство. Пусть

$$u = \pi_0 I_m - \mathcal{A}(\Delta), \quad v = \pi_0 I_m + \pi \mathcal{B}(\Delta),$$

где $\mathcal{A}(\Delta) \in M_m(\mathcal{O}_T[[\Delta]]\Delta)$, $\mathcal{B}(\Delta) \in M_m(\mathcal{O}_K[[\Delta]]\Delta)$. Тогда

$$\Lambda = \left(I_m + \frac{\pi \mathcal{B}(\Delta)}{\pi_0} \right) \left(I_m + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}(\Delta)^i}{\pi_0^i} \right)$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что все коэффициенты рядов

$$\langle \pi^s \rangle \frac{\mathcal{A}(\Delta)^i}{\pi_0^i}, \quad \langle \pi^s \rangle \frac{\pi \mathcal{B}(\Delta)}{\pi_0}, \quad \langle \pi^s \rangle \pi \frac{\mathcal{B}(\Delta)\mathcal{A}(\Delta)^i}{\pi_0^{i+1}}$$

делятся на π^s. Поскольку $\mathcal{A}(\Delta) \in M_m(\mathcal{O}_T[[\Delta]]\Delta$, $\mathcal{B}(\Delta) \in M_m(\mathcal{O}_K[[\Delta]]\Delta)$, то $\pi^{sq^i} \mid \langle \pi^s \rangle \mathcal{A}(\Delta)^i$ и $\pi^{sq^{i+1}} \mid \langle \pi^s \rangle \mathcal{B}(\Delta)\mathcal{A}(\Delta)^i$, из чего нетрудно получить требуемое. □

§6. Доказательства основных теорем

Доказательство теоремы 1. Построим матрицу логарифмов

$$T_\pi(\Delta) = (T_0 T_1 \ldots T_{e-1})$$

для ряда $\Lambda = 1 + \frac{c_1}{q}\Delta + \frac{c_2}{q^2}\Delta^2 + \ldots, c_i \in \mathcal{O}_K$ в базисе $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}$. Непосредственной проверкой, с учетом неравенства (1) легко получить следующие утверждения:
при $1 \leqslant s \leqslant e$:
1)$\langle \pi^s \rangle \Lambda \in \mathcal{O}_K[[\Delta]]$,
2)если $a \in \pi^l \mathcal{O}_K$, $l < e$ и $a = a_0 + a_1\pi + \ldots + a_{e-1}\pi^{e-1}$, $a_i \in \mathcal{O}_T$, то $a_0, \ldots a_{l-1} \vdots \pi_0$,
3) $sp^{f_0 k} - kee_0 f_0 \geqslant s$ при $k \in \mathbb{N}$.
Пусть $\Lambda = \Lambda_0 + \pi\Lambda_1 + \ldots + \pi^{e-1}\Lambda_{e-1}$, $\Lambda_i \in T[[\Delta]]$. Из п.3) следует, что

$\langle\pi^s\rangle\Lambda\dot{:}\pi^s$. Таким образом,

$$T_0 = \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_{e-1} \end{pmatrix}, \qquad T_s = \begin{pmatrix} \pi_0\alpha_0^{(s)}\Delta \\ \pi_0\alpha_1^{(s)}\Delta \\ \vdots \\ \pi_0\alpha_{s-1}^{(s)}\Delta \\ \varepsilon_s \\ \alpha_{s+1}^{(s)}\Delta \\ \vdots \\ \alpha_{e-1}^{(s)}\Delta \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i^{(j)} \in \mathcal{O}_T[[\Delta]]$, $\varepsilon_s \equiv 1 \mod \Delta$.
По следствию 1 матрица $T_\pi(\Delta)$ является логарифмом формального A-модуля тогда и только тогда, когда матрица

$$T'_\pi(\Delta) = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ \Lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{e-1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

является таковой. Матрица $T'_\pi(\Delta)$ в силу теории Хонды является логарифмом формального A-модуля тогда и только тогда, когда существует специальная матрица $U \in M_m(\mathcal{O}_T[[\Delta]])$ такая, что

$$UT'_\pi(\Delta) = \pi_0 I_m, \tag{3}$$

$U \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta$. Ясно, что тогда матрица U должна иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} u & 0 & \dots & 0 \\ r_1 & \pi_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{e-1} & 0 & \dots & \pi_0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тогда равенство (3) означает, что $\begin{cases} \Lambda_0 = \pi_0 u^{-1} \\ \Lambda_s = -r_s u^{-1},\ 1 \leqslant s \leqslant e-1 \end{cases}$, откуда $\Lambda = vu^{-1}$, где $v = \pi_0 - \pi r_1 - \ldots - \pi^{e-1} r_{e-1}$. Тем самым доказано утверждение 2 теоремы.
Обратно. Пусть $\Lambda = vu^{-1}$, где матрицы u и v удовлетворяют условиям

теоремы. Тогда по следствию 1 и лемме 3 можно считать, что матрица логарифмов M ряда $\Lambda(\Delta)(X)$ имеет вид (2) для $\Lambda_0 = \pi_0 u^{-1}$, $\Lambda_s = -r_s u^{-1}$, $1 \leqslant s \leqslant e-1$. Заметим, что $M = \pi_0 U^{-1}$, а значит, в силу теории Хонды $M(X)$ является логарифмом формального A-модуля, что в свою очередь означает (см. лемму 2), что $\Lambda(\Delta)(X)$ – логарифм формального A-модуля. Тем самым доказан пункт 1. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $\Lambda = vu^{-1}$ и $\Lambda' = v'u'^{-1}$ соответствуют логарифмам формальных A-модулей над $\mathcal{O}_K$. Пусть $T_\pi = \pi_0 U^{-1}$ и $T'_\pi = \pi_0 U'^{-1}$ – соответствующие им матрицы логарифмов. В силу леммы 1 и следствия 1 можно считать, что матрицы U и U' имеют вид (4). По теории Хонды формальные группы, соответствующие матрицам $T_\pi = \pi_0 U^{-1}$ и $T'_\pi = \pi_0 U'^{-1}$, строго изоморфны тогда и только тогда, когда $U' = CU$ для некоторой матрицы $C \in M_m(\mathcal{O}_T[[\Delta]])$, $C \equiv I_m \mod \Delta$. Из вида матриц U и U' ясно, что матрица C должна иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} \beta_0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{e-1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где $\beta_0 \in 1 + \mathcal{O}_T[[\Delta]]\Delta$, $\beta_s \in \mathcal{O}_T[[\Delta]]\Delta$, $1 \leqslant s \leqslant e-1$, при этом

$$\begin{cases} \beta_0 u = u' \\ \beta_s u + r_s = r'_s, \ 1 \leqslant s \leqslant e-1. \end{cases}$$

Таким образом, $v' = \pi_0 - \sum\limits_{i=1}^{e-1} \pi^i r'_i = v - \sum\limits_{i=1}^{e-1} \pi^i \beta_i u$.

$\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть логарифм формальной группы F имеет вид $\lambda(X) = \Lambda(\Delta)(X)$, $\Lambda = vu^{-1}$, $v = \pi_0 - \pi r_1 - \ldots - \pi^{e-1} r_{e-1}$. Пусть $\operatorname{ht} F = h < \infty$. В силу замечания 4.5.2 работы [1] $u = \pi_0 + \alpha_1 \Delta + \ldots + \alpha_h \Delta^h + \ldots$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1} \in \pi_0 \mathcal{O}_T$, $\alpha_h \in \mathcal{O}_T^*$, откуда по подготовительной лемме Вейерштрасса существует ряд $\varepsilon \in 1 + \mathcal{O}_T[[\Delta]]\Delta$ такой, что $u' = \varepsilon u = \pi_0 + a_1 \Delta + \ldots + a_h \Delta^h$, где $a_1, \ldots, a_{h-1} \in \pi_0 \mathcal{O}_T$, $a_h \in \mathcal{O}_T^*$. Далее поделим ряды r_i на u' с остатком, получим $r_i = q_i u' + r'_i$, где r'_i – многочлены степени не большей, чем h. По теореме 2 формальный A-модуль F изоморфен формальному A-модулю с логарифмом $\lambda' = v'u'^{-1}(X)$, где $v' = \pi_0 - \pi r'_1 - \ldots - \pi^{e-1} r'_{e-1}$.

Пусть теперь $\operatorname{ht} F = \infty$, тогда $u = \pi_0 \varepsilon(\Delta)$, $\varepsilon \in 1 + \mathcal{O}_T[[\Delta]]\Delta$. Согласно теореме 2 u можно заменить на $u' = \varepsilon^{-1} u = \pi_0$, т.е. формальный A-модуль F строго изоморфен A-модулю с логарифмом $\Lambda = v/\pi_0$. $\square$

Литература

1. М. В. Бондарко, С. В. Востоков, *Явная классификация формальных групп над локальными полями.* — В кн.: Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН, **241**, Наука, М., 2003, 43–67.
2. M. Hazewinkel, *Formal groups and applications.* Acad. Press, New York, 1978.

Afanas'eva S. S., Vostokov S. V. Classification of formal A-modules in the case of small ramification.

In this paper an explicit classification of formal A-modules over the ring of integer of local field up to the strict isomorphism in the case of small ramification is obtained. The canonic representatives in each class of isomorphic formal A-modules are described. This results generalizes the classification of $\mathbb{Z}_p$-modules in small ramification.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: cheery_sonya@mail.ru

E-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Поступило 10 сентября 2014 г.