Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

В. А. Шлык

О ДРОБЛЕНИИ И СИНТЕЗЕ НОРМАЛЬНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ МНОЖЕСТВ

§1. Введение

В вещественном анализе на евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$, широко используется понятие конденсатора как набора (F_0, F_1, G), где F_0, F_1 – непересекающиеся компактные множества, имеющие общие точки с замыканием открытого множества $G \subset R^n$ [6].

Данному конденсатору (F_0, F_1, G) для $p > 1$ можно сопоставить величину $m_p(F_0, F_1, G)$, называемую p-модулем конденсатора (F_0, F_1, G) (см. §2 настоящей работы).

При рассмотрении задачи о дроблении и синтезе нормальных областей (см. [4]) для описания устранимых множеств для соболевских классов функций (см. [5]) приходится вводить обобщенные конденсаторы, в определении которых компакты F_0 и F_1 удовлетворяют условию $F_0 \cap F_1 \neq \varnothing$.

Рассмотрим в качестве примера модульную характеристику следующего экстремального отображения в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, которую будем отождествлять с плоскостью R^2.

Пусть D – ограниченная бесконечносвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $0 \in D$, l_0 – отмеченная невырожденная граничная компонента области D; $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $K(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, $C(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $\mathfrak{M}(D)$ – класс однолистных регулярных функций $w = f(z)$ в области D с нормировкой $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, $f(D) \subset U$, $f(l_0) = \partial U$.

Пусть $\alpha = \inf\limits_{f \in \mathfrak{M}(D)} f'(0) > 0$ и $f_k(z) \to f(z)$ равномерно внутри D, $f_k(z) \in \mathfrak{M}(D)$ и $f_k'(0) \to f_0'(0) = \alpha$ при $k \to \infty$. Функцию $f_0(z)$ назовем экстремальной для класса $\mathfrak{M}(D)$ в задаче о нахождении $\alpha = \inf\limits_{f \in \mathfrak{M}(D)} f'(0)$.

При подходящем выборе области D (см. [7]) функция $f_0(z)$ отображает D на круг с с радиальными разрезами так, что $f_0(l_0) = \partial U \cup e_0$,

---

Ключевые слова: конденсатор, p-емкость конденсатора, нормальная область по Грéтшу, p-нормальное кольцевое множество.

где e_0 – радиальный разрез, проведенный из некоторой точки на ∂U внутрь круга U.

Как известно (см. [7]), для экстремальной функции f_0 имеет место равенство

$$m_2(C(r), C(1), K(r,1)) = m_2(C(r), C(1) \cup e_0, K(r,1) \cap f_0(D)) \qquad (1)$$

для всех достаточно малых $r > 0$.

Равенство (1) для указанного $r > 0$ определяет $f_0(D)$ как круговую нормальную область с радиальными разрезами в смысле Гретша.

Если в (1) положим r близким к 1, то $K(r,1) \cap f_0(D)$ – открытое множество, и компакты $C(r)$, $e_0 \cup C(1)$ имеют общую точку, расположенную на e_0. Тем самым для этих значений r конденсатор $(C(r), e_0 \cup C(1), K(r,1) \cap f_0(D))$ является обобщенным конденсатором и естественно поставить вопрос о выполнении равенства (1) для таких r.

Ниже вводится новое определение кольцевого нормального открытого множества в R^n, $n \geqslant 2$, которому удовлетворяют нормальные открытые множества,введенные в [3,4]. На эти обобщенные нормальные множества распространяются результаты из [4], из которых,в частности, следует справедливость равенства (1) для всех $0 < r < 1$ (см. следствие 1 §4 настоящей работы).

§2. Основные определения и обозначения

Для множества $F \subset R^n$ обозначим через $\bar{F}$, ∂F соответственно его замыкание и границу в $\bar{R}^n = R^n \cup \{\infty\}$. Если Γ – семейство локально спрямляемых кривых γ, содержащихся в открытом множестве $G \subset R^n$, то через $\operatorname{adm}\Gamma = \operatorname{adm}(\Gamma, G)$ обозначим семейство всех борелевских функций $\rho : G \to [0; +\infty]$, для которых $\int\limits_\gamma \rho\, ds \geqslant 1$ для любых $\gamma \in \Gamma$.

Величину

$$m_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_G \rho^p\, dx$$

для $p > 1$ назовем p-модулем семейства Γ.

Как обычно,$\mathcal{L}_n(\cdot)$ – n-мерная мера Лебега, $\mathcal{H}^k(\cdot)$ – k-мерная мера Хаусдорфа, $C^\infty(G)$ – класс бесконечно дифференцируемых функций на множестве G, $C_0^\infty(G)$ – подкласс функций из $C^\infty(G)$ с компактным носителем в G; $L_p^1(G)$ – класс функций $u : G \to (-\infty; +\infty)$, локально интегрируемых в G и имеющих обобщенные частные производные, суммируемые в G со степенью p, с полунормой

$$\|u\| = \left(\int\limits_G |\nabla u|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Для конденсатора (F_0, F_1, G) семейство всех локально спрямляемых кривых γ, $\gamma \subset G$, соединяющих F_0 и F_1, обозначим через $\Gamma(F_0, F_1, G)$. p-модуль этого семейства обозначим через $m_p(F_0, F_1, G)$.

Как и в §1, положим $C(t) = \{x \in R^n : |x| = t\}$,

$$K(t) = \{x \in R^n : |x| < t\},$$

где $t > 0$,

$$K(r_0, r_1) = \{x \in R^n : r_0 < |x| < r_1\},$$

где $0 < r_0 < r_1$.

Пусть l_a – луч, исходящий из точки $O(0, 0, \dots, 0)$ и пересекающий сферу $C(1)$ в точке a. Обозначим через $\mathrm{Cone}_\alpha(l_a)$ внутренность прямого кругового конуса с вершиной в точке O, осью l_a и углом $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ между образующей конуса и осью l_a.

Положим $\mathrm{Cone}_\alpha(l_a, r_0, r_1) = \mathrm{Cone}_\alpha(l_a) \cap K(r_0, r_1)$.

Определим p-емкость конденсатора (F_0, F_1, G) в случае $F_0 \cap F_1 = \varnothing$ как величину

$$C_p(F_0, F_1, G) = \inf \int\limits_G |\nabla u|^p \, dx,$$

где inf берется по всем вещественнозначным функциям u таким, что $u|_G \in C^\infty(G) \cap L_p^1(G)$, $u = j$ в некоторой окрестности компакта F_j, $j = 0, 1$.

Пусть далее $E \subset K(r_0, r_1)$ – замкнутое множество относительно кольца $K(r_0, r_1)$; E_i – замкнутое множество относительно $K(r_0, r_1)$, которое состоит из компонент связности (не обязательно всех) множества E, имеющих предельные точки на сфере $C(r_i)$, $i = 0, 1$. Кроме того, пусть $E = E_0 \cup E_1 \cup F$, где $(E_0 \cup E_1) \cap F = \varnothing$. По определению, если $E_0 \cap E_1 \neq \varnothing$, то пересечение $E_0 \cap E_1$ состоит из компонент связности множества E, имеющих предельные точки одновременно на $C(r_0)$ и $C(r_1)$.

Положим $\widetilde{C}(r_i) = E_i \cup C(r_i)$, $i = 0, 1$, $G(r_0, r_1) = K(r_0, r_1) \setminus E$.

Будем говорить, что множество E разбивает кольцо $K(r_0, r_1)$, если можно указать область $B \subset K(r_0, r_1)$, граница которой ∂B содержится в $E \cup C(r_0) \cup C(r_1)$ и $B \cap \gamma = \varnothing$ для любых $\gamma \in \Gamma(C(r_0), C(r_1), G(r_0, r_1))$.

Пусть $\widetilde{E} \subset E$. Множество $\widetilde{E}$ назовем p-исключительным относительно $G(r_0, r_1)$, если p-модуль семейства всех локально спрямляемых кривых $\gamma \subset G(r_0, r_1)$, соединяющих точки из $G(r_0, r_1)$ с множеством $\widetilde{E}$, равен нулю.

Определение. $G(r_0, r_1)$ *назовем p-нормальным кольцевым множеством (p-NRS), если*

$$\begin{aligned} m_p(C(r_0), C(r_1), K(r_0, r_1)) &= m_p(C(r_0), C(r_1), G(r_0, r_1)) \\ &= m_p(\widetilde{C}(r_0), \widetilde{C}(r_1), G(r_0, r_1)). \end{aligned} \tag{2}$$

Если в (2) положить $E_0 = E_1 = \varnothing$, то получим определение p-нормального кольцевого открытого множества (p-NROS) из [4]; если $E_0 \cap E_1 = \varnothing$ и $G(r_0, r_1)$ – область, то $G(r_0, r_1)$ – p-нормальная кольцевая область из [3].

§3. Свойства p-NRS

Пусть $G(r_0, r_1)$ – p-NRS. Ввиду (2) имеет место равенство

$$m_p(C(r_0), C(r_1), G(r_0, r_1)) = m_p(C(r_0), C(r_1), K(r_0, r_1)).$$

Другими словами, $G(r_0, r_1)$ – p-NROS из [4].

Отсюда (см. [4, теорема 1]) получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $G(r_0, r_1)$ – p-NRS, то*

(1) $\mathcal{L}_n(E) = 0$;

(2) *E не разбивает кольцо $K(r_0, r_1)$;*

(3) *через каждую точку $x_0 \in G(r_0, r_1)$ проходит некоторая кривая $\gamma \in \Gamma(C(r_0), C(r_1), G(r_0, r_1))$;*

(4) *компакт $C(r_0) \cup C(r_1)$ содержится в $\partial G(r_0, r_1)$.*

Аналогично (см. [4, теорема 2]) получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $G(r_0, r_1)$ – p-NRS, то любую функцию*

$$f \in L_p^1(G(r_0, r_1))$$

можно продолжить до абсолютно непрерывной на $l_a \cap \overline{K(r_0, r_1)}$ для всех $a \in C(1) \setminus C_1$, где $\mathcal{H}^{n-1}(C_1) = 0$.

Приведем еще одно свойство p-NRS.

Теорема 3. *Если $G(r_0, r_1)$ – p-NRS, то $E_0 \cup E_1$ – p-исключительное множество относительно $G(r_0, r_1)$.*

Доказательство. Выберем натуральное число k_0 таким образом, чтобы неравенства

$$r_0 < r_0 + \frac{1}{2k} < r_0 + \frac{1}{k} < r_1, \qquad r_0 < r_1 - \frac{1}{k} < r_1 - \frac{1}{2k} < r_1$$

выполнялись для всех натуральных чисел $k \geqslant k_0$. Положим

$$E^1_{0k} = E_0 \cap \overline{K\left(r_0 + \frac{1}{2k}\right)},$$

$$E^1_{1k} = E_1 \cap \left(K(r_0, r_1) \setminus K\left(r_0 + \frac{1}{k}\right)\right),$$

$$E^2_{0k} = E_0 \cap \overline{K\left(r_1 - \frac{1}{k}\right)},$$

$$E^1_{1k} = E_1 \cap \left(K(r_0, r_1) \setminus K\left(r_1 - \frac{1}{2k}\right)\right).$$

Конденсатору $\mathcal{F}_0 = (\widetilde{C}(r_0), \widetilde{C}(r_0), G(r_0, r_1))$ сопоставим две последовательности конденсаторов $\mathcal{F}_{ik} = (\widetilde{C}_{ik}(r_0), \widetilde{C}_{ik}(r_1), G(r_0, r_1))$, $i = 1, 2$, $k \geqslant k_0$, где $\widetilde{C}_{ik}(r_j) = C(r_j) \cup E^i_{jk}$, $j = 0, 1$. Очевидно, что

$$\widetilde{C}_{ik}(r_0) \cap \widetilde{C}_{ik}(r_1) = \varnothing \tag{3}$$

для указанных i, k.

Семейства локально спрямляемых кривых $\gamma \subset G(r_0, r_1)$, соединяющих точки множества $G(r_0, r_1)$ с $E_0 \cup E_1)$, $E^i_{0k} \cup E^i_{1k}$, обозначим соответсвенно через Γ^0, Γ^0_{ik}, $i = 1, 2$, $k \geqslant k_0$. По построению,

$$\Gamma^0 = \bigcup_{k \geqslant k_0} \left(\Gamma^0_{1k} \cup \Gamma^0_{2k}\right), \quad \Gamma(\mathcal{F}_0) \supset \Gamma(\mathcal{F}_{ik}) \supset \Gamma(C(r_0), C(r_1), G(r_0, r_1))$$

для $k \geqslant k_0$, $i = 1, 2$. Поэтому $G(r_0, r_1)$ – по-прежнему p-NRS, если в (2) множества E_0,E_1 заменить соответственно на множества E^i_{0k}, E^i_{1k}. Более того,в силу (3) для конденсаторов $\mathcal{F}_{ik}$, $k \geqslant k_0$, $i = 1, 2$, можно определить емкость $C_p(\mathcal{F}_{ik})$. Заметим также,что p-модуль семейства всех неспрямляемых кривых из Γ^0 равен 0 (см. [1]). Отсюда, повторяя дословно рассуждения из доказательства теоремы 1 в [3] с заменой в них области $G(r, R)$ на открытое множество $G(r_0, r_1)$, для конденсатора $\mathcal{F}_{ik}$, получим, что $m_p(\Gamma^0_{ik}) = 0$ для всех $k \geqslant k_0$, $i = 1, 2$. Поэтому,в силу свойства полуаддитивности модуля семейства кривых, имеем $m_p(\Gamma^0) = 0$, что и доказывает теорему. □

Теорема 4. *Пусть в определении множества $G(r_0,r_1)$ $\mathcal{L}_n(E)=0$. $G(r_0,r_1)$ – p-NRS тогда и только тогда, когда $E_0\cup E_1$ – p-исключительное множество относительно $G(r_0,r_1)$ и любую функцию $f\in L^1_p(G(r_0,r_1))$ можно продолжить до абсолютно непрерывной на $l_a\cap\overline{K(r_0,r_1)}$ для всех $a\in C(1)\setminus C_1$, где $\mathcal{H}^{n-1}(C_1)=0$.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы следует из теорем 2, 3.

Перейдем к доказательству достаточности условия теоремы. Поскольку $\mathcal{L}_n(E)=0$ и любую функцию $f\in L^1_p(G(r_0,r_1))$ можно продолжить до абсолютно непрерывной на $l_a\cap\overline{K(r_0,r_1)}$ для $\mathcal{H}^{n-1}$-почти всех $a\in C(1)$, то по теореме 2 из [4] множество $G(r_0,r_1)$ – p-NROS. Другими словами,

$$m_p(C(r_0),C(r_1),G(r_0,r_1))=m_p(C(r_0),C(r_1),K(r_0,r_1)). \tag{4}$$

С другой стороны, в силу p-исключительности множества $E_0\cup E_1$ относительно $G(r_0,r_1)$ имеет место еще одно равенство

$$m_p(C(r_0)\cup E_0,C(r_1)\cup E_1,G(r_0,r_1))=m_p(C(r_0),C(r_1),G(r_0,r_1)). \tag{5}$$

Соединяя (4) и (5), получим, что $G(r_0,r_1)$ – p-NRS.Тем самым установлена справедливость теоремы. □

§4. Дробление и синтез p-NRS

Сформулированный критерий p-NRS с учетом доказательства теоремы 4 позволяет получить еще несколько результатов для p-NRS, которые можно трактовать как утверждения о дроблении и синтезе этих множеств (см. [2], [4, следствия 2–7]) с помощью сферических колец и конических поверхностей. Для этого введем несколько дополнительных обозначений.

Для $r_0<r'<r''<r_1$ положим

$$G(r',r'')=G(r_0,r_1)\cap K(r',r''),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0(r',r'',\alpha,a)&=(C(r')\cup(E_0\cap\mathrm{Cone}_\alpha(l_a,r',r'')),C(r'')\\&\quad\cup(E_1\cap\mathrm{Cone}_\alpha(l_a,r',r'')),G(r_0,r_1)\cap\mathrm{Cone}_\alpha(l_a,r',r'')),\\\mathcal{K}_1(r',r'',\alpha,a)&=(C(r'),C(r''),G(r_0,r_1)\cap\mathrm{Cone}_\alpha(l_a,r',r'')),\\\mathcal{K}_2(r',r'',\alpha,a)&=(C(r'),C(r''),K(r_0,r_1)\cap\mathrm{Cone}_\alpha(l_a,r',r'')).\end{aligned}$$

Следствие 1. *Пусть множество* $G(r_0, r_1)$ *–* p*-NRS. Тогда* $G(r', r'')$ *–* p*-NRS, где в* (2) *при замене* $G(r_0, r_1)$ *на* $G(r', r'')$ *нужно заменить* $C(r_0)$*,* $C(r_1)$ *соответственно на* $C(r')$*,* $C(r'')$*;* E_0*,* E_1 *– соответственно на* $E_0 \cap K(r', r'')$*,* $E_1 \cap K(r', r'')$*;* $K(r_0, r_1)$ *на* $K(r', r'')$*.*

Следствие 2. *Пусть* $G(r_0, r_1)$ *–* p*-NRS. Тогда для любых* $r_0 < r' < r'' < r_1$*,* $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$*,* $a \in C(1)$ *имеем*

$$m_p(\mathcal{K}_0(r', r'', \alpha, a)) = m_p(\mathcal{K}_1(r', r'', \alpha, a)) = m_p(\mathcal{K}_2(r', r'', \alpha, a)). \qquad (6)$$

Обратно, пусть для каждой точки $x_0 \in E$ *можно указать усеченный конус* $Cone_{\alpha(x_0)}(l_a, r(x_0), R(x_0))$ *такой, что* $0 < \alpha(x_0) < \frac{\pi}{2}$*,* $r_0 < r(x_0) < |x_0| < R(x_0) < r_1$*,* $x_0 \in l_a$ *и справедливо равенство* (6)*, в котором* α*,* r'*,* r'' *заменены соответственно на* $\alpha(x_0)$*,* $r(x_0)$*,* $R(x_0)$*. Тогда* $G(r_0, r_1)$ *–* p*-NRS.*

Литература

1. А. В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения*, Новосибирск, 1983.
2. П. М. Тамразов, *Метод экстремальной метрики и конформное отображение*, Автореферат. канд. дисс. Киев: КПИ, 1963.
3. В. А. Шлык, И. Н. Демшин, *Метрические характеристики пространственных кольцевых областей с радиальными разрезами, нормальных в смысле Гретша.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **350** (2007).
4. В. А. Шлык, И. Н. Демшин, *Об инвариантности компактов, порождающих нормсальные кольцевые открытые множетсва, при квазиизометриях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 46–53.
5. В. А. Шлык, И. Н. Дёмшин, *Критерии устранимых множеств для весовых гармонических функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **286**, (2002), 62–73.
6. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions.* GAKUTO international series, Gakkōtosho, 2003.
7. K. Oikawa, N. Suita, *On conformal mappings onto incised radial slit disks.* — Kōdai Math. Sem. Rep. **22** (1970), 45–52.

Shlyk V. A. On the problem of decomposition and composition of normal rings.

The generalized normal rings in the space are studied. The problem of decomposition and composition of such sets is investigated.

Дальневосточный
федеральный университет,
ул. Суханова, 8,
690950 Владивосток;
Владивостокский филиал
Российской таможенной академии,
ул. Стрелкова, 16в,
690034, Владивосток,
Россия
E-mail: shlykva@yandex.ru

Поступило 1 августа 2014 г.