Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

О. М. Фоменко

О ЧИСЛЕ КЛАССОВ ПОЛЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

§1

Пусть K – поле алгебраических чисел степени $n(K) = [K : Q]$, $n(K) =: n \geqslant 2$. Изучение $h(K) =: h$, числа классов поля K, опирается на исследование дзета-функции Дедекинда поля K:

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s} \quad (\sigma > 1),$$

где суммирование идет по всем целым ненулевым идеалам $\mathfrak{a}$ в K, $s = \sigma + it$. Известно, что $\zeta_K(s)$ – мероморфная функция во всей комплексной плоскости с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = 1$ с вычетом, скажем, $\varkappa_K$. $\zeta_K(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа $\ll s \to 1 - s \gg$. Каждое поле K имеет r_1 вещественных и $2r_2$ мнимых сопряженных полей (так что $r_1 + 2r_2 = n$).

Важную роль играет формула Дедекинда

$$\varkappa_K = 2^{r_1}(2\pi)^{r_2} \frac{h(K)R(K)}{w(K)|d(K)|^{1/2}},$$

где $d(K) =: d$ и $R(K) =: R$ означают дискриминант и регулятор поля K соответственно, $w(K) =: w$ – число содержащихся в K корней из 1. Встает вопрос об оценке вычета $\varkappa_K$ сверху и снизу. Оценка сверху проводится сравнительно легко и дает неравенство с эффективной константой. Ландау [1] доказал, что

$$hR \ll |d|^{1/2} \log^{n-1} |d|, \tag{1.1}$$

где неявная константа зависит только от n. Позднее Зигель [2] и А. Ф. Лаврик [3] вычислили эту константу.

Приведем замечание Лаврика: при $|d| \geqslant 5$

$$hR < w|d|^{1/2} \log^{n-1} |d|.$$

Ключевые слова: число классов, дзета-функция Дедекинда, исключительный нуль, чисто кубическое поле, гипотеза Артина, обобщенная гипотеза Римана.

Из (1.1), как показал Ландау, следует
$$h \underset{n}{\ll} |d|^{1/2} \log^{n-1} |d|. \tag{1.2}$$
Значительно труднее получить оценку снизу для $\varkappa_K$. Рассмотрим последовательность нормальных расширений K поля Q такую, что $n/\log|d| \to 0$. Тогда, по теореме Брауэра–Зигеля [4],
$$\varkappa_K \gg |d|^{-\varepsilon}, \tag{1.3}$$
причем $\varepsilon > 0$ – любое фиксированное число, неявная константа зависит от ε и n; явный вид этой зависимости до сих пор неизвестен.

Отсюда, в частности, для всех полей K заданной степени $n \geqslant 2$ с достаточно большим $|d|$ имеем
$$hR > |d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{1.4}$$
Известно, что нижняя граница (1.3) тесно связана с (гипотетическим) существованием исключительного нуля β_0 (называемого также нулем Ландау–Зигеля) у $\zeta_K(s)$, т.е. вещественного нуля в промежутке
$$1 - [c(n)\log|d(K)|]^{-1} \leqslant \beta_0 < 1.$$
Если функция $\zeta_K(s)$ не имеет исключительного нуля (это по Хейльбронну [5] и Старку [6] справедливо, в частности, для полей K, не содержащих квадратичных подполей), то для такого поля K
$$h\,R \gg \frac{|d|^{1/2}}{\log|d|}, \tag{1.5}$$
где неявная константа зависит только от n.

Усиление неравенств (1.1), (1.3)–(1.5) возможно при выполнении некоторых гипотез. Предположим, что для каждого неприводимого характера χ группы $\mathrm{Gal}(\widehat{K}/\mathbb{Q})$, где $\widehat{K}/\mathbb{Q}$ – замыкание Галуа поля $K/\mathbb{Q}$, L-функция Артина $L(s,\chi)$ – целая функция (гипотеза Артина), которая удовлетворяет обобщенной гипотезе Римана (ОГР). Тогда
$$\frac{|d(K)|^{1/2}}{\log\log|d(K)|} \underset{n}{\ll} h(K)R(K) \underset{n}{\ll} |d(K)|^{1/2}(\log\log|d(K)|)^{n-1}.$$

Для получения информации о числе классов $h(K)$ нужны оценки регулятора $R(K)$. Важные результаты о величине $R(K)$ получил Ремак [7, 8]. Одна из его оценок: если K не является тотально мнимым квадратичным расширением тотально вещественного поля, то
$$R(K) \underset{n}{\gg} \log|d(K)|.$$

Следовательно, для таких полей K из (1.1) следует неравенство

$$h \underset{n}{\ll} |d|^{1/2}(\log|d|)^{n-2}. \tag{1.6}$$

В работе [9] была построена бесконечная последовательность полей $K_m (m = 1, 2, \dots)$ произвольной заданной степени $n \geqslant 2$ с малым регулятором и, следовательно, по (1.4), с экстремально большим числом классов:

$$h(K_m) > |d(K_m)|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \tag{1.7}$$

где $\varepsilon > 0$ – любое фиксированное число. Результат является безусловным и справедлив для полей любой заданной сигнатуры.

Более сильные результаты того же типа приведены в §3 настоящей работы, один из которых принадлежит автору (см. теорему 2).

Здесь уместно сделать несколько замечаний, связанных с вещественным квадратичными полями $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Пусть χ – примитивный квадратичный характер $\pmod d$ и $L(s,\chi)$ – соответствующая L-функция Дирихле. Тогда $L(1,\chi) = hRd^{-1/2}$. Поскольку $L(1,\chi) \ll \log d$, $R > \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)\log d$, то $h \ll \sqrt{d}$ (старая оценка Ландау). Литтлвуд [10] в предположении ОГР для L-функций Дирихле доказал, что

$$L(1,\chi) < (2e^{\gamma} + o(1))\log\log d.$$

Следовательно, предполагая ОГР, имеем

$$h < (4e^{\gamma} + o(1))d^{1/2}(\log d)^{-1}\log\log d.$$

Монтгомери и Вайнбергер [11] показали, что без всяких гипотез справедлива теорема: существует абсолютная константа $c > 0$ такая, что

$$h > cd^{1/2}(\log d)^{-1}\log\log d \tag{1.8}$$

для бесконечного множества вещественных квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Без использования соответствующих гипотез улучшить в общем случае неравенства (1.1), (1.3)–(1.5) очень трудно. Некоторые продвижения возможны для кубических полей (см. §2); в частности, там доказана теорема 1 автора, относящаяся к чисто кубическим полям.

§2

Рассмотрим чисто кубическое поле $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$, где m свободно от кубов, $m \neq \pm 1$; имеем $m = ab^2$, a и b – бесквадратные и взаимно простые целые числа. Известно, что если $a^2 \not\equiv b^2 \pmod 9$, то $d(K) = -27a^2b^2$; если же $a^2 \equiv b^2 \pmod 9$, то $d(K) = -3a^2b^2$.

Для чисто кубических полей результаты Ландау (1.1), (1.2) и (1.6) улучшил Кон [12]. Ограничимся случаем положительных a и b. Кон использовал тот факт, что в случае чисто кубического поля K вычет $\varkappa_K$ сводится к конечному выражению, включающему эта-функцию Дедекинда. Это приводит к неравенству, улучшающему для данного частного случая результат (1.1):

$$h\,R \ll |d|^{1/2} \log|d| \cdot \log\log|d|. \tag{2.1}$$

Отсюда следует улучшение (1.6):

$$h \ll |d|^{1/2} \log\log|d|.$$

Перейдем к оценке снизу для hR в случае чисто кубического поля K. В силу сказанного выше, $\zeta_K(s)$ не имеет исключительного нуля, поэтому речь пойдет об усилении оценки (1.5).

Теорема 1. *Если K – чисто кубическое поле, то*

$$h\,R \gg \frac{|d|^{1/2}}{(\log|d|)^{1/2} \cdot (\log\log|d|)^{1/2}},$$

где неявная константа абсолютная.

Доказательство. Известно, что при $\sigma > 1$ дзета-функция Дедекинда любого поля K разлагается в эйлеровское произведение

$$\begin{aligned}\zeta_K(s) &= \prod_{\mathfrak{p}} \bigl(1 - N(\mathfrak{p})^{-s}\bigr)^{-1} \\ &= \prod_{p} \prod_{\mathfrak{p}|p} \bigl(1 - N(\mathfrak{p})^{-s}\bigr)^{-1} \quad (\sigma > 1),\end{aligned} \tag{2.2}$$

где внешнее произведение берется по всем простым рациональным числам p, а внутреннее – по всем простым идеалам $\mathfrak{p}$ поля K, лежащим над p.

А. И. Виноградов [13] приблизил $\varkappa_K$ отрезком эйлеровского произведения, получив следующий аналог для поля K классической формулы Мертенса (который мы сформулируем в частном случае): для поля

K, дзета-функция Дедекинда которого не имеет исключительного нуля, справедлива асимптотическая формула

$$h\,R = \frac{w|d|^{1/2}}{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}} \cdot \frac{e^{-\gamma}}{\log D} \times \prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ N(\mathfrak{p}) \leqslant D}} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\theta}{\log D}\right), \tag{2.3}$$

где $\log D \geqslant c(n) \log |d| \cdot \log\log |d|$, $c(n)$ – положительная константа, зависящая только от n; $\theta \underset{n}{\ll} 1$.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 1. Применим формулу (2.3) в случае чисто кубического поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$. Нам необходим частный случай закона разложения простых чисел p в поле K (см. [14]). Имеем: если $(p, |d|) = 1$ и $p \equiv 2 \pmod 3$, то в K

$$p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2,$$

где $\mathfrak{p}_1$ – простой идеал поля K степени 1, $\mathfrak{p}_2$ – простой идеал поля K степени 2.

Если $p \big| |d|$ и $p \neq 3$, то $p = \mathfrak{p}_1^3$, где $\mathfrak{p}_1$ – простой идеал поля K степени 1.

Положим $\log D = c \log |d| \log\log |d|$, где $c > 0$ – некоторая абсолютная константа. Учитывая (2.2), имеем

$$\prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ N(\mathfrak{p}) \leqslant D}} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-1}\right)^{-1} \geqslant \prod_{\substack{p \leqslant D \\ p \equiv 2 \pmod 3 \\ (p, |d|) = 1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \gg (\log |d|)^{1/2} (\log\log |d|)^{1/2}.$$

Формула (2.3), взятая для чисто кубического поля K, вместе с последней оценкой доказывает теорему 1. □

Замечание 1. Дьюк [15] получил без всяких гипотез неравенство, справедливое для бесконечного множества циклических кубических полей и по силе вполне аналогичное неравенству Монтгомери и Вайнбергера (1.8).

§3

Сначала изложим результаты Дьюка [16], уточняющие (1.7) в важном частном случае. Будем считать, что $K \in \mathcal{K}_n$, если K – тотально вещественное поле алгебраических чисел степени n, нормальное замыкание $\widehat{K}$ которого имеет в качестве группы Галуа $\mathrm{Gal}(\widehat{K}/\mathbb{Q})$ симметрическую группу S_n. Для таких полей

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi),$$

где характер χ представления Галуа имеет степень $n-1$, кондуктор d и неприводим. При этом,

$$h = \frac{d^{1/2}}{2^{n-1}R}\,L(1,\chi).$$

Гипотеза Артина и ОГР дают

$$L(1,\chi) \ll (\log\log d)^{n-1}.$$

Ремак [7] доказал, что если K не содержит нетривиальных подполей (это верно для $K \in \mathcal{K}_n$), то

$$R \gg (\log d)^{n-1}.$$

Поэтому в предположении гипотезы Артина и ОГР имеем для тотально вещественных полей K, не содержащих нетривиальных подполей, и, в частности, для $K \in \mathcal{K}_n$,

$$h \ll d^{1/2}(\log\log d/\log d)^{n-1}; \tag{3.1}$$

при этом неявная константа зависит только от n.

Встает вопрос, насколько точна оценка (3.1). Из результата Монтгомери и Вайнбергера (1.8) следует, что в случае $n = 2$ оценка (3.1) является наилучшей с точностью до $\ll$-константы. Аналогичный факт доказывает Дьюк в работе [16] в случае $n \geqslant 3$, но только в предположении гипотезы Артина и ОГР. Подробно его результат формулируется следующим образом [16, теорема 1]: фиксируем $n \geqslant 2$ и предположим, что каждая L-функция Артина является целой функцией и удовлетворяет ОГР. Тогда найдется константа $c > 0$, зависящая только от n и такая, что существует поле $K \in \mathcal{K}_n$ с произвольно большим дискриминантом d, для которого $h > c\, d^{1/2}(\log\log d/\log d)^{n-1}$.

Лучший безусловный результат, полученный в [16]: существует бесконечное множество полей $K \in \mathcal{K}_n$, для которых

$$h \gg d^{1/2}(\log d)^{-n}; \tag{3.2}$$

при этом неявная константа зависит только от n.

Это лучше, чем оценка (1.7).

В теореме 2 ниже оценка (3.2) улучшается.

Теорема 2. *Фиксируем $n \geqslant 2$. Существует бесконечное множество полей $K \in \mathcal{K}_n$, для которых*

$$h \gg d^{1/2}(\log\log d)^{n-1}/(\log d)^n;$$

при этом неявная константа зависит только от n.

Доказательство. Мы опираемся на важный результат Дьюка – предложение 4 из работы [16]:

фиксируем $n \geqslant 2$. Существует константа $c > 0$, зависящая только от n и такая, что найдутся поля $K \in \mathcal{K}_n$ с произвольно большим дискриминантом, для которых каждое простое число p с $c \leqslant p \leqslant \log d$ вполне распадается в K и для которых регулятор $R \leqslant c(\log d)^{n-1}$.

Отметим, что в качестве K берутся поля, полученные присоединением к $\mathbb{Q}$ корня многочлена

$$f(x,t) = (x-t)(x-2^2t)(x-3^2t)\dots(x-n^2t)-t$$

для подходящего целого значения t.

Напишем формулу (2.3) в частном случае поля $K \in \mathcal{K}_n$:

$$h\,R = \frac{d^{1/2}}{2^{n-1}}\cdot\frac{e^{-\gamma}}{\log D}\cdot\prod_{\substack{\mathfrak{p}\\ N(\mathfrak{p})\leqslant D}}\bigl(1-N(\mathfrak{p})^{-1}\bigr)^{-1}\Bigl(1+\frac{\theta}{\log D}\Bigr),$$

где $\log D = c(n)\log d\cdot\log\log d$, константа $c(n)>0$ зависит только от n, и $|\theta| \underset{n}{\ll} 1$. Возьмем теперь в качестве K поля, фигурирующие в только что сформулированном предложении Дьюка. Имеем

$$\begin{aligned} h\,R &\underset{n}{\gg} d^{1/2}(\log d\cdot\log\log d)^{-1}\prod_{\substack{\mathfrak{p}\\ N(\mathfrak{p})\leqslant \log d}}\bigl(1-N(\mathfrak{p})^{-1}\bigr)^{-1}\\ &\gg d^{1/2}(\log d\cdot\log\log d)^{-1}\prod_{p\leqslant\log d}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)^{-n}\\ &\asymp d^{1/2}(\log d)^{-1}(\log\log d)^{-1}(\log\log d)^{n}. \end{aligned}$$

Поскольку для рассматриваемых K

$$R \underset{n}{\ll} (\log d)^{n-1},$$

теорема доказана. □

Литература

1. E. Landau, *Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen.* — Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. (1918), 79–97.
2. C. L. Siegel, *Abschätzung von Einheiten.* — Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. II. Math.-Phys. Kl. No. 9 (1969), 71–86.
3. А. Ф. Лаврик, *Примечание к теореме Зигеля–Брауэра относительно параметров полей алгебраических чисел.* — Мат. заметки **8** (1970), 259–263.
4. R. Brauer, *On the zeta-functions of algebraic number fields.* — Amer. J. Math. **69** (1947), 243–250; II, ibidem **72** (1950), 739–746.
5. H. Heilbronn, *On real zeros of Dedekind* ζ*-functions.* — Canad. J. Math. **25** (1973), 870–873.
6. H. Stark, *Some effective cases of the Brauer–Siegel theorem.* — Invent. Math. **23** (1974), 135–152.
7. R. Remak, *Über Grössenbeziehungen zwischen Diskriminante und Regulator eines algebraischen Zahlkörpers.* — Compos. Math. **10** (1952), 245–285.
8. R. Remak, *Über algebraische Zahlkörper mit schwachem Einheitsdefekt.* — Compos. Math. **12** (1954), 35–80.
9. N. C. Ankeny, R. Brauer, S. Chowla, *A note on the class-numbers of algebraic number fields.* — Amer. J. Math. **78** (1956), 51–61.
10. J. E. Littlewood, *On the class number of the corpus* $P(\sqrt{-k})$. — Proc. London Math. Soc. **27** (1928), 358–372.
11. H. L. Montgomery, P. J. Weinberger, *Real quadratic fields with large class number.* — Math. Ann. **225** (1977), 173–176.
12. H. Cohn, *Some algebraic number theory estimates based on the Dedekind eta-function.* — Amer. J. Math. **78** (1956), 791–796.
13. А. И. Виноградов, *О числе классов идеалов и группе классов дивизоров.* — Изв. АН СССР. Серия мат. **27** (1963), 561–576.
14. H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, New York etc., 1996.
15. W. Duke, *Number fields with large class group.* — Number theory (CRM Proc. Lecture Notes, Vol.**36**), Amer. Math. Soc., 2004, 117–126.
16. W. Duke, *Extreme values of Artin L-functions and class numbers.* — Compos. Math. **136** (2003), 103–115.

Fomenko O. M. On the class numbers of algebraic number fields.

Let K be a number field of degree n over $\mathbb{Q}$ and d, h, and R be the absolute value of the discriminant, the class number, and the regulator, respectively, of K. It is known that if K contains no quadratic subfield, then

$$h\,R \gg \frac{d^{1/2}}{\log d},$$

where the implied constant depends only on n. In Theorem 1 this lower estimate is improved for pure cubic fields.

Consider the family $\mathcal{K}_n$ where $K \in \mathcal{K}_n$ if K is a totally real number field of degree n whose normal closure has the symmetric group S_n as its Galois group. Theorem 2: Fix $n \geqslant 2$. There are infinitely many $K \in \mathcal{K}_n$ with

$$h \gg d^{1/2}(\log\log d)^{n-1}/(\log d)^n,$$

where the implied constant depends only on n.

This is a somewhat greater improvement over W. Duke's analogous result with $h \gg d^{1/2}/(\log d)^n$ [MR 1966783 (2004g:11103)].

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 20 октября 2014 г.