Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

О. М. Фоменко

О ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ДЕДЕКИНДА. II

§1

Пусть K_n – поле алгебраических чисел степени $n = [K_n : \mathbb{Q}]$, $n \geqslant 2$; иногда мы пишем просто K. Дзета-функция Дедекинда поля K_n задается посредством

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s} \quad (\sigma > 1),$$

где суммирование идет по всем целым ненулевым идеалам $\mathfrak{a}$ в K_n, $s = \sigma + it$. Можно записать

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(k, K_n)}{k^s},$$

где $\alpha(k, K_n)$ – количество целых идеалов в K_n нормы k. Известно, что $\zeta_{K_n}(s)$ – мероморфная функция во всей комплексной плоскости с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = 1$ с вычетом, скажем, Λ_n; она удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа $\ll s \to 1 - s \gg$.

Представим

$$A(x, K_n) := \sum_{k \leqslant x} \alpha(k, K_n)$$

в виде суммы главного и остаточного членов

$$A(x, K_n) =: M(x, K_n) + \Delta(x, K_n) = \Lambda_n x + \Delta(x, K_n).$$

Первые результаты о величине $A(x, K_n)$ принадлежат Дедекинду и Веберу. Дедекинд свел задачу к вычислению числа точек решетки в n-мерных областях и получил оценку $A(x, K_n) \ll x$, а Вебер оценил остаточный член

$$\Delta(x, K_n) \ll x^{1-\frac{1}{n}}.$$

Ландау [1] довел результат до

$$\Delta(x, K_n) \ll x^{1-\frac{2}{n+1}}; \tag{1.1}$$

Ключевые слова: дзета-функция Дедекинда, распределение идеалов, экстремальные значения.

он же получил первый Ω-результат: показатель степени δ в оценке $\Delta(x,K_n) \ll x^\delta$ не может быть меньше, чем $1/2 - 1/(2n)$. С развитием метода тригонометричесчких сумм улучшались оценки остатка в задаче о числе точек решетки в областях, а вместе с этим и оценка (1.1). Например, Новак [2] доказал, что

$$\begin{aligned} &\Delta(x,K_n) \ll x^{1-\alpha_n}(\log x)^{\beta_n}, \\ \alpha_n &= \frac{2}{n} - \frac{8}{n(5n+2)}, \quad \beta_n = \frac{10}{5n+2} \quad \text{для} \quad 3 \leqslant n \leqslant 6, \\ \alpha_n &= \frac{2}{n} - \frac{3}{2n^2}, \qquad\quad \beta_n = \frac{2}{n} \qquad \text{для} \qquad n \geqslant 7. \end{aligned}$$

Из работы Мюллера [3] можно вывести дальнейшие улучшения.

Более сильные результаты получены разными методами для $n = 2$ [4]; $n = 3$ [5]; $n = 4, 6$ (для некоторых типов неабелевых полей), $n \geqslant 4$ любое (для абелевых полей) [6]. Особняком стоит случай абелевых полей K_n, для которых методом тригонометрических сумм Виноградова была доказана [7] оценка

$$\Delta(x,K_n) \ll x^{1-\frac{1}{12}n^{-\frac{2}{3}}}\ (\log x)^n,$$

весьма сильная (по сравнению с полученными ранее) при достаточно большом n. Ω-теорема Ландау также неоднократно улучшалась (см. [8,9]). Приведем результат работы [9]: при $n \geqslant 2$

$$\Delta(x,K_n) = \Omega\left((x\log x)^{\frac{n-1}{2n}}(\log_2 x)^{\varkappa}\cdot(\log_3 x)^{-\lambda}\right),$$

где $\varkappa$ и λ – явно задаваемые положительные константы, $\log_2 x = \log\log x$, $\log_3 x = \log\log\log x$. См. также теорему 2 настоящей работы.

Прокомментируем теперь результаты части I настоящей работы [6]. Для абелевых расширений $K_n/\mathbb{Q}$ там доказано, что

$$\Delta(x,K_n) \ll x^{1-\frac{3}{n+2}+\varepsilon}. \tag{1.2}$$

Там же доказана оценка (1.2) для K_6, нормального замыкания поля K_3 над $\mathbb{Q}$ с группой Галуа S_3. В [6] получена также оценка (1.2) для поля $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$, но приведено без доказательства разложение функции $\zeta_{K_4}(s)$.

В настоящей работе мы ликвидируем этот пробел и доказываем необходимое разложение функции $\zeta_{K_4}(s)$, несколько более грубое, но достаточное для наших целей. Кроме того, мы рассматриваем новые случаи $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$, $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{\varepsilon_m})$, $K_{16} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{\varepsilon_m})$, где ε_m – фундаментальная единица поля $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m > 0$ свободно от квадратов. Далее, обобщаются предложения 2 и 3 [6] и теорема 3 [10], связанные с Ω-оценками и экстремальными значениями дзета-функции Дедекинда.

§2

Рассмотрим следующие типы полей:

1) $K_n/\mathbb{Q}$, $n \geqslant 4$, – абелево расширение;

2) $K_6/\mathbb{Q}$ – нормальное поле с группой Галуа S_3 (нормальное замыкание поля K_3);

3) $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ и $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$, где целое $m > 0$ не является квадратом;

4) $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{\varepsilon_m})$ и $K_{16} = \mathbb{Q}(\sqrt[8]{-1}, \sqrt[4]{\varepsilon_m})$, где целое $m > 0$ свободно от квадратов и ε_m – фундаментальная единица поля $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Теорема 1. *Для полей* 1)–4) *справедлива оценка*

$$\Delta(x, K_n) \ll x^{1-\frac{3}{n+2}+\varepsilon}, \tag{1.2}$$

где, как обычно, ε – сколь угодно малое положительное постоянное число.

Доказательство. В силу сказанного выше достаточно рассмотреть случаи 3), 4). Сначала получим нужные нам разложения дзета-функций Дедекинда.

I. Случай полей $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ и $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$.

Воспользуемся результатами работы Ишии [11]. Будем предполагать, что m – целое положительное число, не являющееся квадратом, причем m имеет вид

$$m = \prod_p p^{e(p)}, \quad 0 \leqslant e(p) \leqslant 3.$$

K_8 – нормальное расширение над $\mathbb{Q}$ степени 8 с группой Галуа $G := \mathrm{Gal}(K_8/\mathbb{Q})$, которая изоморфна диэдральной группе D_4 порядка 8. Для поля K_8 определим параболическую форму $\theta(\tau, K_8)$ веса 1. Пусть ψ – двумерное комплексное неприводимое представление группы G, определенное посредством соотношений

$$\psi(\sigma) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad \psi(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

здесь σ и ρ – образующие группы G, определенные посредством

$$\sigma(\sqrt[4]{m}) = \sqrt{-1}\cdot\sqrt[4]{m}, \quad \sigma(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1},$$
$$\rho(\sqrt[4]{m}) = \sqrt[4]{m}, \qquad \sigma(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}.$$

Представление $\det\psi$ группы G, определенное посредством $(\det\psi)(g) = \deg\psi(g)$, индуцирует характер Дирихле ε такой, что

$$\varepsilon(n) = (-1/n).$$

Обозначим L-функцию Артина, ассоциированную с ψ:

$$L(s, K_8/\mathbb{Q}, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}.$$

Тогда $L(s, K_8/\mathbb{Q}, \psi)$ имеет эйлеровское произведение:

$$L(s, K_8/\mathbb{Q}, \psi) = \prod_{p|N}(1 - a(p)p^{-s})^{-1} \prod_{p\nmid N}(1 - a(p)p^{-s} + \varepsilon(p)p^{-2s})^{-1},$$

где N означает кондуктор представления ψ. Функцию $\theta(\tau, K_8)$ мы определяем теперь соотношением

$$\theta(\tau, K_8) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n, \quad q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau).$$

Из теории Гекке–Вейля–Ленглендса следует, что $\theta(\tau, K_8)$ является параболической формой (новой формой) веса 1 с характером ε на конгруэнц-подгруппе $\Gamma_0(N)$.

Наряду с подполями K_4 (не является нормальным) и $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{m})$, K_8 имеет три квадратичных подполя $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ и $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, над которыми K_8 абелево. Этим квадратичным подполям соответствуют представления группы Галуа G ψ_1, ψ_2, ψ_3 степени 1; имеется также тривиальное представление ψ_0.

Пусть $f(x)$ – определяющий полином корня $\sqrt[4]{m}$ над $\mathbb{Q}$:

$$f(x) = x^4 - m.$$

Для простого p введем величину

$$S(p) := \#\{a \in \mathbf{F}_p | f(a) \equiv 0 \pmod{p}\}.$$

В [11] эта величина вычисляется: пусть $p \nmid N$, тогда

$$S(p) = 1 + (m_0/p) + a(p), \tag{2.1}$$

где m_0 – бесквадратная часть числа m.

Напомним хорошо известную факторизацию

$$\zeta_{K_n}(s) = \prod_p \prod_{\mathfrak{p}|p} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \quad (\sigma > 1), \tag{2.2}$$

где внешнее произведение идет по всем простым рациональным p, а внутреннее – по всем простым идеалам $\mathfrak{p}$ поля K_n, лежащим над p.

Используя (2.1), (2.2) и принцип параллелизма [12, теорема 4.8.13], имеем разложение

$$\zeta_{K_4}(s) = \zeta(s) \cdot L\left(s, \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right) \cdot L(s, K_8/\mathbb{Q}, \psi) U_1(s) \quad \left(\sigma > \frac{1}{2}\right), \tag{2.3}$$

где здесь и ниже $U_l(s)$, $l = 1, 2, \ldots$, означает ряд Дирихле, который абсолютно сходится для $\sigma > \frac{1}{2}$.

Переходим к нахождению разложения функции $\zeta_{K_8}(s)$, где $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$. Ишии [11] получил закон разложения рациональных простых чисел p в поле $K_8/\mathbb{Q}$ в терминах параболической формы $\theta(\tau, K_8)$. Известно, что уровень N формы $\theta(\tau, K_8)$ имеет вид: $N = 4f^2$, $f > 0$ целое.

Закон разложения в $K_8/\mathbb{Q}$ имеет вид: пусть рациональное простое p не делит f. Обозначим через f_p степень простых идеалов поля K_8 над p. Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) Если $p \equiv 1 \mod 4$, то
$f_p = 1 \Leftrightarrow a(p) = 2;$
$f_p = 2 \Leftrightarrow a(p) = -2;$
$f_p = 4 \Leftrightarrow a(p) = 0.$

(ii) Если $p \equiv 3 \mod 4$, то $a(p) = 0$, $f_p = 2$ или 4. Далее,
$f_p = 2 \Leftrightarrow a(p^2) = 1;$
$f_p = 4 \Leftrightarrow a(p^2) = -1.$

(iii) Если $p = 2$, то $f_p = 1$ или 2.
Далее,
$f_p = 1 \Leftrightarrow a(p) = 1;$
$f_p = 2 \Leftrightarrow a(p) = -1.$

В силу мультипликативности функции $\alpha(k, K_n)$ имеем при $\sigma > 1$

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k, K_n) k^{-s} = \prod_p \left(1 + \frac{\alpha(p, K_n)}{p^s} + \frac{\alpha(p^2, K_n)}{p^{2s}} + \ldots\right).$$

Известно, что в случае нормального поля $K_n/\mathbb{Q}$ для $p \nmid d(K_n)$ (=дискриминант поля K_n) $\alpha(p, K_n) = n$ или 0. Поэтому для нормального поля $K_n/\mathbb{Q}$

$$\zeta_{K_n}(s)=\prod_{\substack{p,p\nmid d(K_n)\\ f_p=1}}\left(1+\frac{n}{p^s}+\frac{\alpha(p^2,K_n)}{p^{2s}}+\dots\right)\prod_{\substack{p,p\nmid d(K_n)\\ f_p>1}}\left(1+\frac{\alpha(p^2,K_n)}{p^{2s}}+\dots\right)$$
$$\times\prod_{p,p|d(K_n)}\left(1+\frac{\alpha(p,K_n)}{p^s}+\frac{\alpha(p^2,K_n)}{p^{2s}}+\dots\right)$$
$$=\prod_{\substack{p,p\nmid d(K_n)\\ f_p=1}}\left(1+\frac{n}{p^s}+\frac{\alpha(p^2,K_n)}{p^{2s}}+\dots\right)\cdot U_2(s).$$

В силу закона разложения для нашего (нормального) поля K_8 имеем

$$\zeta_{K_8}(s)=\prod_{p\in\mathcal{P}_1}\left(1+\frac{8}{p^s}+\dots\right)\cdot U_3(s), \tag{2.4}$$

где $\mathcal{P}_1 := \{p|p\nmid N, p\equiv 1 \mod 4 \text{ и } f_p=1\ (\Leftrightarrow a(p)=2)\}$.

Пусть χ – характер двумерного представления ψ группы G. Для простого $p\nmid N$ обозначим через σ_p подстановку Фробениуса. Тогда по [11, формула (11)],

$$\psi_1(\sigma_p)=(-1/p),\quad \psi_2(\sigma_p)=(m_0/p),$$
$$\psi_3(\sigma_p)=(-m_0/p),\quad \chi(\sigma_p)=a(p). \tag{2.5}$$

Обозначим через ρ_G характер регулярного представления группы G. Тогда

$$\rho_G=1+\psi_1+\psi_2+\psi_3+2\chi.$$

Так как G порядка 8, для всех $g\in G$ имеем

$$\rho_G(g)\equiv 0 \mod 8.$$

Тогда, в силу (2.5), имеем для $p\nmid N$

$$1+(-1/p)+(m_0/p)+(-m_0/p)+2a(p)\equiv 0 \mod 8. \tag{2.6}$$

Для $p\equiv 1 \mod 4$ и $a(p)=2(\Leftrightarrow f_p=1)$ сумма в (2.6) равна 8, для всех остальных $p\nmid N$ эта сумма равна 0. Этот факт в соединении с (2.4) дает при $\sigma>\frac{1}{2}$

$$\zeta_{K_8}(s)=\zeta(s)\cdot L\left(s,\left(\frac{-1}{\cdot}\right)\right)\cdot L\left(s,\left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right)\cdot L\left(s,\left(\frac{-m_0}{\cdot}\right)\right)$$
$$\times L^2\left(s,K_8/\mathbb{Q},\psi\right)\cdot U_4(s). \tag{2.7}$$

II. Случай полей $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{\varepsilon_m})$ и $K_{16} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{\varepsilon_m})$.

Воспользуемся результатами работы [13]. Поле K_{16} – расширение Галуа степени 16 над $\mathbb{Q}$, порожденное $\sqrt{-1}$ и $\sqrt[4]{\varepsilon_m}$, где ε_m – фундаментальная единица вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, m свободно от квадратов. Группа Галуа $G := \mathrm{Gal}(K_{16}/\mathbb{Q})$ порождена тремя элементами σ, φ и ρ такими, что

$$\sigma(\sqrt[4]{\varepsilon_m}) = \sqrt{-1}\sqrt[4]{\varepsilon_m},$$
$$\varphi(\sqrt[4]{\varepsilon_m}) = 1/\sqrt[4]{\varepsilon_m},$$
$$\rho(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1},$$

и имеет определяющие соотношения:

$$\sigma^4 = \varphi^2 = \rho^2 = 1, \quad \varphi\rho = \rho\varphi, \quad \rho\sigma\rho = \varphi\sigma\varphi = \sigma^3.$$

При $t := \mathrm{tr}(\varepsilon_m)$ пусть f и e – бесквадратные части чисел $t+2$ и $m(t+2)$ соответственно. Наряду с подполями $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{\varepsilon_m})$,

$K' = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{\varepsilon_m})$ и $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-m})$,
$L' = \mathbb{Q}(\sqrt{-m}, \sqrt{f})$, $L'' = \mathbb{Q}(\sqrt{-m}, \sqrt{-f})$,
K_{16} имеет также квадратичные подполя

$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{f})$,
$\mathbb{Q}(\sqrt{-f})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{e})$, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-e})$.

Этим квадратичным подполям соответствуют представления группы Галуа G степени 1: γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, γ_6, γ_7, γ_8.

Имеется также тривиальное представление γ_1.

Группа G имеет в точности два неприводимых представления степени 2, которые имеют детерминант γ_4. Если одно из них есть ψ_0, то другое $\psi_1 = \psi_0 \otimes \gamma_3$. Пусть $L(s; K_{16}/\mathbb{Q}, \psi_0)$ (соответственно, $L(s; K_{16}/\mathbb{Q}, \psi_1)$) означает L-функцию Артина, ассоциированную с ψ_0 (соответственно, с ψ_1), и пусть $\Theta(\tau; \psi_0)$ (соответственно, $\Theta(\tau; \psi_1)$) означает преобразование Меллина функции $L(s, K_{16}/\mathbb{Q}, \psi_0)$ (соответственно, $L(s, K_{16}/\mathbb{Q}, \psi_1)$).

В [13] рассматривается полусумма

$$\Theta(\tau; K_{16}) = \frac{1}{2}\{\Theta(\tau; \psi_0) + \Theta(\tau; \psi_1)\}.$$

Обозначим через N общее наименьшее кратное кондукторов представлений ψ_0 и ψ_1. Из работ Гекке следует, что $\Theta(\tau; K_{16})$ является параболической формой веса 1 на конгруэнц-подгруппе $\Gamma_0(N)$ с характером

$(-m/\cdot)$. Имеем

$$\Theta(\tau; K_{16}) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n, \quad q = \exp(2\pi i \tau).$$

Поле $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{\varepsilon_m})$ не является нормальным. Пусть $f(x)$ – определяющий полином корня $\sqrt[4]{\varepsilon_m}$ над $\mathbb{Q}$:

$$f(x) = (x^4 - \varepsilon_m)(x^4 - \varepsilon_m^{-1}) = x^8 - tx^4 + 1.$$

Для простого p вводим величину

$$S(p) := \#\{a \in \mathbf{F}_p | f(a) = 0\};$$

Δ_f – дискриминант полинома $f(x)$. По [13, предложение 2], если $p \nmid \Delta_f$, то

$$S(p) = 1 + (m/p) + (f/p) + (e/p) + 2a(p). \tag{2.8}$$

Используя (2.8) и те же рассуждения, что и в случае вывода (2.3), получаем при $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \zeta_{K_8}(s) = \zeta(s) \cdot L\Big(s, \Big(\frac{m}{\cdot}\Big)\Big) \cdot L\Big(s, \Big(\frac{f}{\cdot}\Big)\Big) \\ \times L(s, (\frac{e}{\cdot})) \cdot L(s, K_{16}/\mathbb{Q}, \psi_0) \cdot L(s, K_{16}/\mathbb{Q}, \psi_1) \cdot U_5(s). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Переходим к нахождению разложения функции $\zeta_{K_{16}}(s)$. Поле K_{16} и его подполе K' (степени 8 над $\mathbb{Q}$) являются нормальными расширениями поля $\mathbb{Q}$. В силу сказанного выше,

$$\zeta_{K_{16}}(s) = \prod_{\substack{p, p \nmid d(K_{16}) \\ f_p = 1}} \left(1 + \frac{16}{p^s} + \frac{\alpha(p^2, K_{16})}{p^{2s}} + \ldots\right) \cdot U_6(s).$$

Как доказано в [13, с. 92], для любого нечетного рационального простого p имеем:

p полностью разлагается в K'

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{f}{p}\right) = \left(\frac{e}{p}\right) = 1. \tag{2.10}$$

Если ε_m вполне положительно, то можно определить биквадратичный символ $(\varepsilon_m/p)_4$ для рационального простого p с условием

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{\varepsilon_m}{p}\right) = 1.$$

Если p – простое число с условием $(-1/p) = (m/p) = 1$, то, как легко видеть,

$(\varepsilon_m/p) = 1 \Leftrightarrow p$ полностью разлагается в K'.

Пусть $\mathfrak{p}$ – простой идеал поля K', лежащий над p. Тогда

$$(\varepsilon_m/p)_4 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mathfrak{p} \quad \text{разлагается в} \quad K_{16}, \\ -1, & \text{если} \quad \mathfrak{p} \quad \text{остается простым в} \quad K_{16} \end{cases}$$

(см. [14, с. 54]).

Следовательно,

$$\zeta_{K_{16}}(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}_2} \left(1 + \frac{16}{p^s} + \dots\right) \cdot U_7(s), \tag{2.11}$$

где

$$\mathcal{P}_2 := \left\{ p | p \nmid N, \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{f}{p}\right) = \left(\frac{e}{p}\right) = 1 \ \text{ и } \ \left(\frac{\varepsilon_m}{p}\right)_4 = 1 \ (\Leftrightarrow f_p = 1) \right\}.$$

С другой стороны, как и в случае поля $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$, имеем: для $p \nmid N$

$$1 + \left(\frac{-1}{p}\right) + \left(\frac{m}{p}\right) + \left(\frac{-m}{p}\right) + \left(\frac{f}{p}\right) + \left(\frac{-f}{p}\right) + \left(\frac{e}{p}\right) + \left(\frac{-e}{p}\right)$$

$$+ 4a(p) \equiv 0 \mod 16. \tag{2.12}$$

Как показано в [13], для любого простого числа p с условием (2.10)

$$a(p) = \left(\frac{\varepsilon_m}{p}\right)_4 \cdot 2.$$

Тем самым, для $p, p \nmid N$, с условиями (2.10) и $a(p) = 2$ сумма в (2.12) равна 16. Для остальных p, $p \nmid N$, сумма в (2.12) равна 0. В соединении с (2.11) это дает разложение: при $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \zeta_{K_{16}}(s) = \zeta(s) \cdot L\left(s, \left(\frac{-1}{\cdot}\right)\right) \cdot L\left(s, \left(\frac{m}{\cdot}\right)\right) \\ \times L\left(s, \left(\frac{-m}{\cdot}\right)\right) \cdot L\left(s, \left(\frac{f}{\cdot}\right)\right) \cdot L\left(s, \left(\frac{-f}{\cdot}\right)\right) \\ \times L\left(s, \left(\frac{e}{\cdot}\right)\right) \cdot L\left(s, \left(\frac{-e}{\cdot}\right)\right) \cdot L^2(s, K_{16}/\mathbb{Q}, \psi_0) \\ \times L^2(s, K_{16}/\mathbb{Q}, \psi_1) \cdot U_8(s). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 1. Поскольку мы имеем разложения (2.3), (2.7), (2.9) и (2.13), мы можем применить метод Харди и Литтлвуда в проблемах делителей ([15, Т. 2.3]; см. также доказательство теоремы 3 в [6]). Само доказательство мы приводить не будем, однако дадим здесь оценки, на которые оно опирается.

i) $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll t^{\frac{1}{6}}$ $(t \geqslant 1)$; $L\left(\frac{1}{2}+it, \chi_d\right) \ll t^{\frac{1}{6}}$ $(t \geqslant 1)$,
где χ_d – характер Дирихле $\mod d$.

Это классические оценки (см., например, [15]).

ii) $\zeta_{K_n}\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll t^{\frac{n}{6}+\varepsilon}$ $(t \geqslant 1)$.

Доказательство см. в [16–18].

iii) $L\left(\frac{1}{2}+it, F\right) \ll t^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ $(t \geqslant 1)$,
где F – голоморфная примитивная параболическая форма целого веса $k \geqslant 1$ относительно $\Gamma_0(N)$.

Доказательство см. в [19].

iv) Пусть χ_1 и χ_2 – характеры Дирихле $\mod q_1$ и $\mod q_2$ соответственно. Тогда для $T \geqslant 2$ среднее значение

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it, \chi_1\right) L\left(\frac{1}{2}+it, \chi_2\right)\right|^2 dt = C(\log T)^4 + O((\log T)^3)$$

или

$$= D(\log T)^2 + O(\log T)$$

в соответствии с тем, будут ли χ_1 и χ_2 эквивалентны или нет. (Здесь C и D – константы, зависящие от χ_1 и χ_2.)

Доказательство принадлежит Рамачандре [20]. В случае $L(s,\chi_1) = L(s,\chi_2) = \zeta(s)$ результат получил Ингам (1928).

v) Пусть $L(s)$ – L-функция $L(s, K_8/\mathbb{Q}, \psi)$ из (2.3) и (2.7) либо любая из L-функций $L(s, K_{16}/\mathbb{Q}, \psi_0)$, $L(s, K_{16}/\mathbb{Q}, \psi_1)$ из (2.9) и (2.13). Тогда для $T \geqslant 2$

$$\int_1^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \sim CT\log T.$$

Это частный случай результата Гуда [21].

Доказательство теперь следует известной схеме. □

§3

Обобщим теперь предложения 2 и 3 работы [6] на случай произвольного поля K_n.

Теорема 2. *Пусть K_n – произвольное поле алгебраических чисел над $\mathbb{Q}$. Найдутся положительные константы c_1 и c_2 такие, что для любого $T > T_0$ каждый интервал $[T, T + c_1 T^{1-1/n}]$ содержит две точки t_1, t_2, для которых*

$$\Delta(t_1, K_n) > c_2 t_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}, \quad \Delta(t_2, K_n) < -c_2 t_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}.$$

Доказательство. Теорема будет следовать из общего результата Ивича [22] при выполнении некоторых условий. Эти условия, кроме условия (i) (см. [22, с. 142]), в нашем случае выполняются автоматически.

Условие (i): $\alpha(k, K_n) \ll k^{C+\varepsilon}$ для некоторой константы $C \geqslant 0$ и $\alpha(k, K_n) \gg k^C$ для бесконечного множества целых положительных k.

Проверим это условие. Для $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$, пусть P_ν – множество рациональных простых чисел, которые неразветвлены в K_n и которые делятся в точности на ν простых идеалов поля K_n степени 1. Пусть P^* – множество разветвленных простых чисел. Заметим, что P^* имеет только конечное число элементов и P_{n-1} пусто. Если $K_n/\mathbb{Q}$ нормально, то P_ν пусто для $\nu = 1, 2, \dots, n-1$. Множества P_ν не пересекаются и вместе с P^* исчерпывают все рациональные простые числа. Далее, если $p \in P_\nu$, то $\alpha(p, K_n) = \nu$ (число идеалов поля K_n нормы p).

Пусть L – нормальное замыкание поля K_n, $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ и $H = \mathrm{Gal}(L/K_n)$. Известно [23], что если P_ν не пусто, то существует положительная константа δ_ν такая, что

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in P_\nu}} 1 = \frac{\delta_\nu x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right). \tag{3.1}$$

Константа δ_ν является плотностью Дирихле множества P_ν, при этом

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot \delta_\nu = 1 \tag{3.2}$$

и

$$\delta_\nu = |G|^{-1} \cdot |\{\tau \in G : |\{\sigma \in G : \tau \in \sigma H \sigma^{-1}\}| = |H| \cdot \nu\}|.$$

Оценка сверху $\alpha(k, K_n) \ll k^\varepsilon$ общеизвестна. Поскольку из (3.2) следует $\delta_\nu > 0$ хотя бы для одного ν, то из (3.1) имеем бесконечность множества простых $p \in P_\nu$ (для которых $\alpha(p, K_n) = \nu$). Условие (i) выполнено, и теорема 2 доказана. $\square$

Обобщим и усилим теперь результаты работ [10, 24, 25], связанных с экстремальными свойствами дзета-функций Дедекинда.

Теорема 3. *Пусть K_n – произвольное поле алгебраических чисел над $\mathbb{Q}$. Пусть c – любая положительная константа, $T \geqslant 200$, $\log T \geqslant (200)^{1/c}$, и $(\log T)^c \leqslant Y \leqslant T$. Тогда существуют положительные константы D_1, D_2 такие, что*

$$\max_{T \leqslant t \leqslant T+Y} \left|\zeta_{K_n}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \geqslant \exp\left\{D_1\left(\frac{\log Y}{\log\log Y}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, \qquad (3.3)$$

и

$$\max_{T \leqslant t \leqslant T+Y} |\zeta_{K_n}(\sigma_0+it)| \geqslant \exp\left\{D_2 \frac{(\log Y)^{1-\sigma_0}}{\log\log Y}\right\}, \qquad (3.4)$$

для каждой константы σ_0, $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$.

Далее, существует положительная константа D_3 такая, что для $(\log\log T)^c \leqslant Y \leqslant T$ и $\log\log T \geqslant (200)^{1/c}$ имеем

$$\max_{T \leqslant t \leqslant T+Y} |\zeta_{K_n}(1+it)| \geqslant D_3 \log\log Y. \qquad (3.5)$$

Константы D_1, D_3 зависят от c, константа D_2 – от c и σ_0.

Доказательство. Мы воспользуемся общими результатами, полученными в работе [26].

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность комплесных чисел, обладающая слеующими свойствами.

(i) Ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad (s = \sigma + it),$$

сходящийся в некоторой полуплоскости комплексной плоскости, может быть аналитически продолжен в область $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $T \leqslant t \leqslant T+Y$, и там

$$|F|(s)| \leqslant T^A,$$

где A – константа.

(ii) Существует бесконечное множество S простых чисел и постоянное целое число q такие, что a_n вещественные и одного и того же знака (0 может быть приписан любой знак), если n пробегает целые числа, целиком состоящие из простых множителей из S (в первом степени) и простых множителей, делителей числа q, в любой степени.

(iii) Если n имеет вид

$$q\prod_{p\in S} p^{b(p)}$$

с $b(p)=0$ или 1 и $b(p)=0$ для всех p, кроме конечного множества, то величина $|a_n|$ отделена от 0.

(iv) Существует константа $D'>1$ такая, что для всех $x\geqslant 10$ величина

$$\sum_{\substack{x<p<D'x\\ p\in S}} 1$$

лежит между $c'x/\log x$ и $c''x/\log x$, где $0<c'<c''$ – некоторые константы (замечание: граница сверху всегда существует).

При этих условиях справедливы неравенства (3.3)–(3.5) с заменой $\zeta_{K_n}(s)$ на $F(s)$.

Возвращаясь к функции $\zeta_{K_n}(s)$, возьмем в качестве S непустое множество P_ν (см. доказательство теоремы 2 выше) и $q=1$. Свойства (i)–(iv) для $\zeta_{K_n}(s)$ выполняются, и теорема 3 доказана. □

Литература

1. E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Leipzig, 1927.
2. W. G. Nowak, *On the distribution of integer ideals in algebraic number fields.* — Math. Nachr. **161** (1993), 59–74.
3. W. Müller, *Lattice points in large convex bodies.* —Monatsh. Math. **128** (1999), 315–330.
4. M. N. Huxley, N. Watt, *The number of ideals in a quadratic field.* — Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **104** (1994), 157–165.
5. W. Müller, *On the distribution of ideals in cubic number fields.* — Monatsh. Math. **106** (1988), 211–219.
6. О. М. Фоменко, *О дзета-функции Дедекинда.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **418** (2013), 184–197.
7. Е. И. Пантелеева, *К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях.* — Мат. заметки **44** (1988), 494–505.
8. J. L. Hafner, *The distribution and average order of the coefficients of Dedekind ζ functions.* — J. Number Theory **17** (1983), 183–190.
9. K. Girstmair, M. Kühleitner, W. Müller and W. G. Nowak, *The Piltz divisor problem in number fields: An improved lower bound by Soundararajan's method.* — Acta Arithm. **117** (2005), 187–206.

10. О. М. Фоменко, *Экстремальные значения автоморфных L-функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **404** (2012), 233–247.
11. N. Ishii, *Cusp forms of weight one, quartic reciprocity and elliptic curves.* — Nagoya Math. J. **98** (1985), 117–137.
12. H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, New York etc., 2000.
13. T. Hiramatsu, N. Ishii, *Quartic residuacity and cusp forms of weight one.* — Comment. Math. Univ. St. Paul. **34** (1985), 91–103; Corrections. — Comment. Math. Univ. St. Paul. **35** (1986), 111.
14. N. Ishii, *On the quartic residue symbol of totally positive quadratic units.* — Tokyo J. Math. **9** (1986), 53–65.
15. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-functions*, 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
16. Р. М. Кауфман, *Об укороченных уравнениях А. Ф. Лаврика.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **76** (1978), 124–158.
17. Р. М. Кауфман, *Оценка L-функций Гекке на половинной прямой.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **91** (1979), 40–51.
18. D. R. Heath-Brown, *The growth rate of the Dedekind zeta-function on the critical line.* — Acta Arithm. **49** (1988), 323–339.
19. C. S. Yoganandra, *Transformation formula for exponential sums involving Fourier coefficients of modular forms.* — Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **103** (1993), 1–25.
20. R. Ramachandra, *Application of a theorem of Montgomery and Vaughan to the zeta-function.* — J. London Math. Soc. (2) **10** (1975), 482–486.
21. A. Good, *Approximative Funktionalgleichungen und Muttelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind.* — Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 327–361.
22. A. Ivić, *Large values of certain number-theoretic error terms.* — Acta Arithm. **56** (1990), 135–159.
23. E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen.* — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **3** (1923), 89–108.
24. A. Sankaranarayanan, J. Sengupta, *Omega theorems for a class of L-functions* (*A note on the Rankin–Selberg zeta-function*). — Funct. Approx. Comment. Math. **36** (2006), 119–131.
25. K. Ramachandra, *On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$.* — J. London Math. Soc. (2) **8** (1974), 683–690.
26. R. Balasubramanian, K. Ramachandra, *On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$. III.* — Proc. Indian Acad. Sci. **86A** (1977), 341–351.

Fomenko O. M. On the Dedekind zeta function. II.

Let K_n be a number field of degree n over $\mathbb{Q}$. Denote by $A(x, K_n)$ the number of integer ideals of K_n with norm $\leqslant x$. For $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$, $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{\varepsilon_m})$ and $K_{16} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{\varepsilon_m})$, where m is a positive square free integer and ε_m denotes the fundamental unit of $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, the author

proves that

$$A(x, K_n) = \Lambda_n x + \Delta(x, K_n)(x, K_n), \quad \Delta(x, K_n) \ll x^{1-\frac{3}{n+2}+\varepsilon}.$$

This improves earlier results of E. Landau (1917) and W. G. Nowak (Math. Nachr. **161** (1993), 59–74) for the indicated special cases.

The author also treats Titchmarch's phenomenon for $\zeta_{K_n}(s)$ and large values of $\Delta(x, K_n)$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 20 октября 2014 г.