Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

Е. Г. Прилепкина

О КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИЯМИ НЕЙМАНА

§1. Введение и вспомогательные результаты

В работах Нехари, Аленицына, Дюрена, Шиффера и других математиков изучались квадратичные формы, коэффициенты которых зависят от значений функций Грина или Робена [1–4]. Дубининым развит емкостной подход к изучению свойств таких форм [5] и показана их роль в получении различных теорем искажения для регулярных функций [6, 7]. Для доказательства соответствующих утверждений широко применялись асимптотические формулы емкостей вырождающихся конденсаторов и монотонность емкости [8, 9]. Вместе с тем в связи с вопросами теории метода экстремальной метрики (см., например, [10]), а также теории потенциала [11], возникает необходимость изучения функции Неймана. В настоящей работе изучаются квадратичные формы, порожденные функциями Неймана. Многие свойства таких форм (монотонность, симметричность, поведение при конформном отображении и т.д.) вытекают из их связи с емкостью вырождающегося конденсатора. В данной заметке предлагается другой способ получения подобных результатов, основанный на изучении интеграла Дирихле линейной комбинации функций Неймана. Преимущество такого способа доказательств заключается в возможности описывать случаи равенства в получаемых неравенствах [12, 13]. Идея данного подхода также принадлежит В. Н. Дубинину и восходит к работе [12]. В качестве приложения доказана теорема искажения для конформных и однолистных отображений, распространяющая результаты в [7] на случай конечносвязных областей.

Пусть G – конечносвязная область на комплексной сфере $\overline{\mathbf{C}}_z$ без вырожденных граничных точек либо вся комплексная плоскость. В этом случае $\bar{G}$ означает компактификацию G посредством простых

Ключевые слова: функция Неймана, квадратичная форма, однолистное отображение, теоремы искажения, угловая производная.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект No. 4-11-00022.

концов Каратеодори, граница ∂G – совокупность простых концов. Под окрестностью будем понимать любое открытое в $\bar{G}$ множество. В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, будем отождествлять элемент $\bar{G}$, соответствующий внутренней точке G, с самой этой точкой, а носитель достижимой граничной точки и саму эту точку будем обозначать одной и той же буквой. В случае жордановой области G понятия замыкания $\bar{G}$ и границы ∂G совпадают с обычными, а окрестность в $\bar{G}$ есть пересечение открытого в $\overline{\mathbf{C}}_z$ множества с $\bar{G}$.

Определение допустимой точки. Пусть g - некоторое однолистное конформное отображение G на жорданову область D, ограниченную конечным числом аналитических жордановых кривых. Точку $z_0 \in \overline{G}$ назовем допустимой для $\bar{G}$, если $z_0 \in G$ либо $z_0 \in \partial G$ является достижимой граничной точкой и найдется $\beta_G(z_0)$, $0 < \beta_G(z_0) \leqslant 2$, такое, что

$$g(z) - g(z_0) = \begin{cases} (z - z_0)^{\beta_D(z_0)/\beta_G(z_0)}(c(z_0) + o(1)) & \text{при } z \to z_0 \neq \infty,\ z \in G, \\ (1/z)^{\beta_D(z_0)/\beta_G(z_0)}(c(z_0) + o(1)) & \text{при } z \to z_0 = \infty,\ z \in G, \end{cases} \quad (1)$$

где $c(z_0) \neq 0$ и

$$\beta_D(z_0) = \begin{cases} 2, & z_0 \in G, \\ 1, & z_0 \in \partial G. \end{cases}$$

Не уменьшая общности, мы предполагаем, что $g(z_0) \neq \infty$. Ясно, что все внутренние точки области G являются допустимыми.

Определение обобщенной функции Неймана. Рассмотрим сперва жорданову область $G \subset \mathbf{C}_z$, ограниченную конечным числом аналитических кривых. Пусть $\varphi(z)$ – вещественная непрерывная функция на ∂G, такая, что

$$\int\limits_{\partial G} \varphi(z)|dz| = -\pi.$$

Обозначим для $\zeta \in \bar{G}$ через $N_{G,\varphi}(z;\zeta)$ функцию от $z \in \bar{G}$, удовлетворяющую условиям:

1) $N_{G,\varphi}(z;\zeta)$, как функция z, гармоническая в $G \setminus \{\zeta\}$ и дифференцируема на $\partial G \setminus \{\zeta\}$;

2) $N_{G,\varphi}(z;\zeta)+\frac{1}{\beta}\log|z-\zeta|$ – гармоническая функция в окрестности точки $\zeta\neq\infty$, а $N_{G,\varphi}(z;\zeta)-\frac{1}{\beta}\log|z|$ – гармоническая функция в окрестности $\zeta=\infty$; здесь $\beta=1$ для граничной точки ζ и $\beta=2$ для внутренней точки ζ;

3) $\frac{\partial N_{G,\varphi}(z;\zeta)}{\partial n}=\varphi(z)$ на ∂G, где производная берется по внешней нормали к G.

Обобщенной функцией Неймана $N_G(z;\zeta)$ области G с полюсом в точке ζ назовем любую функцию, удовлетворяющую условиям 1)–3) для каких-нибудь граничных значений $\varphi(z)$. Конечно, обобщенная функция Неймана зависит от выбора граничных значений $\varphi(z)$. Как показано в [9], две обобщенные функции Неймана $N_{G,\varphi_1}(z;\zeta)$ и $N_{G,\varphi_2}(z;\zeta)$ связаны соотношением $N_{G,\varphi_2}(z;\zeta)=N_{G,\varphi_1}(z;\zeta)+h(z)+c(\zeta)$, где $h(z)$, $c(\zeta)$ – некоторые функции. В рамках данной работы нас будут интересовать свойства функций вида $\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k N_{G,\varphi}(z;z_k)$, где $\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k=0$. Ясно, что такие функции не зависят от выбора $\varphi(z)$, поэтому мы опускаем φ в обозначении функции Неймана.

Пусть теперь G – произвольная конечносвязная область сферы $\bar{\mathbf{C}}_z$ без изолированных граничных точек. Обобщенную функцию Неймана для этой области определим с помощью конформного и однолистного отображения f на жорданову область, ограниченную аналитическими кривыми, по формуле

$$N_G(z;\zeta)=N_{f(G)}(f(z);f(\zeta)).$$

В $\bar{G}$ выберем совокупность допустимых точек $Z=\{z_k\}_{k=1}^n$, обозначим $\beta_k=\beta_G(z_k)$ и определим необходимые в дальнейшем величины

$$N_{kl}(G,Z)=N_G(z_k;z_l),\qquad k\neq l,$$

$$N_{kl}(G,Z)=\lim_{z\to z_k}(N_G(z;z_k)+\frac{1}{\beta_k}\log|z-z_k|),\qquad k=l,\quad z_k\neq\infty,$$

$$N_{kl}(G,Z)=\lim_{z\to z_k}(N_G(z;z_k)-\frac{1}{\beta_k}\log|z|),\qquad k=l,\quad z_k=\infty$$

Для $G=\bar{\mathbf{C}}_z$ полагаем

$$N_{kl}(\bar{\mathbf{C}}_z,Z)=-\frac{1}{2}\log|z_k-z_l|,\ \text{ если }\ k\neq l,\ z_k\neq\infty,\ z_l\neq\infty,$$

$$N_{kl}(\bar{\mathbf{C}}_z,Z)=0\ \text{ в противном случае.}$$

Определение потенциальной функции. Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – набор допустимых точек $\bar{G}$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – вещественные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^n \delta_k = 0. \tag{2}$$

Введем функцию

$$u(z) = u(z; G, Z, \Delta) = \sum_{k=1}^n \delta_k N_G(z; z_k),$$

которую будем называть *потенциальной* функцией для области G и совокупностей Z, Δ. В некоторых окрестностях конечных точек z_k имеют место разложения

$$u(z) = -\frac{\delta_k}{\beta_k} \log|z - z_k| + a_k + o(1), \quad z \to z_k, \quad z \in G, \tag{3}$$

где

$$a_k = \sum_{l=1} \delta_l N_{kl}(G; Z), \quad k = 1, \dots, n.$$

Для $z_k = \infty$ локальный параметр $(z - z_k)$ нужно заменить на $1/z$.

Определение почти кругов. Для конечной точки z_0 комплексной сферы $\mathbb{C}_z$ обозначим через $E(z_0, r)$ замкнутый круг с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$. В случае бесконечно удаленной точки определим $E(\infty, r) = \{z : |z| \geqslant 1/r\}$. Параметрическое семейство областей $\widetilde{E}(z_0, r)$, $z_0 \in \mathbb{C}_z$, зависящее от параметра r, $0 < r < r_0$, назовем асимптотически круговым, если существуют положительные функции $r_j(r)$, $0 < r < r_0$, $j = 1, 2$, такие что

$$E(z_0, r_1(r)) \subset \widetilde{E}(z_0, r) \subset E(z_0, r_2(r)) \tag{4}$$

и $r_j(r) \sim r$ при $r \to 0$, $j = 1, 2$. Элемент $\widetilde{E}(z_0, r)$ асимптотически кругового семества будем называть почти кругом с центром в точке z_0 радиуса r. Всюду ниже для заданной области $G \subset \mathbb{C}_z$ и точки $z_0 \in G$ введем обозначение $U(z_0, r, G) = \widetilde{E}(z_0, r)$, где r настолько мало, что $\widetilde{E}(z_0, r) \subset G$; для достижимой граничной точки z_0 области G обозначим через $U(z_0, r, G)$ замыкание в $\bar{G}$ связной компоненты пересечения $G \bigcap \widetilde{E}(z_0, r)$, примыкающей к точке z_0.

Обозначим через $I(v, G)$ интеграл Дирихле функции v по области G,

$$I(v,\ G) = \iint\limits_G |\nabla v|^2 dxdy.$$

Следующие леммы 1, 2 являются, по существу, модификациями соответствующих лемм работы [12].

Лемма 1. *Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – набор допустимых точек $\bar{G}$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – вещественные числа, удовлетворяющие условию (2), $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ – положительные числа, $\beta_k = \beta_G(z_k)$, G_r – разность множеств $G \setminus \bigcup\limits_{k=1}^n U(z_k, \mu_k r^{\beta_k}, G)$, $u(z)$ – потенциальная для G, Z, Δ. Справедливо равенство*

$$\sum_{k,l=1}^n \delta_k \delta_l N_{kl}(G, Z) - \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\beta_k} \log \mu_k = \lim_{r\to 0} \left(\frac{I(u, G_r)}{\pi} + \sum_{k=1}^n {\delta_k}^2 \log r \right). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $w = g(z)$ – однолистное конформное отображение области G на аналитическую жорданову область, $w_k = g(z_k)$, $W = \{w_k\}_{k=1}^n$, $\beta'_k = \beta_{g(G)}(w_k)$. Учитывая разложения (1), заключаем, что

$$|w - w_k| = |z - z_k|^{\beta'_k/\beta_k} |c(z_k) + o(1)|,\ z \to z_k,\ z \in G. \quad (6)$$

Следовательно,

$$N_{kl}(G, Z) = N_{kl}(g(G), W),\ k \neq l,$$
$$N_{kk}(G, Z) = N_{kk}(g(G), W) - \frac{1}{\beta'_k} \log |c(z_k)|$$

и образом множеств $U(z_k, \mu_k r^{\beta_k}, G)$ являются множества $U(w_k, \mu'_k r^{\beta'_k}, g(G))$, где $\mu'_k = \mu_k^{\beta'_k/\beta_k} |c(z_k)|$. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\sum_{k,l=1}^n \delta_k \delta_l N_{kl}(G, Z) - \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\beta_k} \log \mu_k \\ &\quad = \sum_{k,l=1}^n \delta_k \delta_l N_{kl}(g(G), W) - \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\beta'_k} \log \mu'_k. \end{aligned} \quad (7)$$

По определению потенциальной функции и обобщенной функции Неймана имеем

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k N_G(z; z_k) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k N_{g(G)}(w; w_k) = t(w),$$

где $t(w)$ – потенциальная функция для $g(G), W, \Delta$. Учитывая (7) и конформную инвариантность интеграла Дирихле, заключаем, что достаточно доказать лемму для аналитической жордановой области G. Принимая во внимание включения (4), можем считать, что в определении G_r множества $U(z_k, \mu_k r^{\beta_k}, G)$ образованы кругами. По формуле Грина,

$$I(u, G_r) = -\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k(r)} u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

$\gamma_k(r) = \partial U(z_k, \mu_k r^{\beta_k}, G) \bigcap G$, $k = 1, \ldots, n$. Привлекая разложения (3), получаем

$$\int\limits_{\gamma_k(r)} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int\limits_{0}^{\beta_k \pi} \left(-\frac{\delta_k}{\beta_k} \log(\mu_k r^{\beta_k}) + a_k + o(1) \right) \left(-\frac{\delta_k}{\beta_k} + o(1) \right) d\varphi$$

$$= \pi \left[\frac{\delta_k^2}{\beta_k} \log \mu_k + \delta_k^2 \log r - \delta_k \sum_{l=1} \delta_l N_{kl}(G; Z) \right] + o(1),$$

$$r \to 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

что приводит к утверждению леммы. □

Вещественную функцию v назовем *допустимой* функцией для области G и совокупностей Z, Δ, если она непрерывна в $\bar{G} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{z_k\}$, удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки области G, за исключением, может быть, конечного числа таких точек, и если в окрестностях точек z_k имеют место разложения

$$v(z) = -\frac{\delta_k}{\beta_k} \log|z - z_k| + b_k + o(1), \quad z \to z_k, \quad z \in G, \tag{8}$$

где b_k, $k = 1, \ldots, n$, - некоторые вещественные постоянные.

Лемма 2. *Для потенциальной функции u с разложениями* (3) *и допустимой функции v с разложениями* (8) *выполняется равенство*

$$I(v-u,G)=\lim_{r\to 0}\left(I(v,G_r)-I(u,G_r)-2\pi\sum_{k=1}^{n}\delta_k(b_k-a_k)\right).$$

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 1, можем считать, что G представляет собой аналитическую жорданову область, и множества $U(z_k,\mu_k r^{\beta_k},G)$ определены при помощи кругов.

При достаточно малых $r>0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}I(v-u,G_r)&=I(v,G_r)+I(u,G_r)+2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k(r)}v\frac{\partial u}{\partial n}ds\\&=I(v,G_r)-I(u,G_r)+2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k(r)}(v-u)\frac{\partial u}{\partial n}ds,\end{aligned}$$

где $\gamma_k(r)$, $k=1,\dots,n$, как и в доказательстве леммы 1. Учитывая разложения (3), (8) и определение потенциальной функции u, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_k(r)}(v-u)\frac{\partial u}{\partial n}ds&=\int\limits_0^{\beta_k\pi}(b_k-a_k+o(1))\left(-\frac{\delta_k}{\beta_k}+o(1)\right)d\varphi\\&=-\pi\delta_k(b_k-a_k)+o(1),r\to 0,\end{aligned}$$

для любого $k=1,\dots,n$. Таким образом

$$I(v-u,G_r)=I(v,G_r)-I(u,G_r)-2\pi\sum_{k=1}^{n}\delta_k(b_k-a_k)+o(1),r\to 0.$$

Устремляя r к нулю, получим доказательство леммы. □

§2. Квадратичные формы, зависящие от функции Неймана

В этом параграфе изучаются свойства квадратичных форм

$$\sum_{k,l=1}^{n}\delta_k\delta_l N_{kl}(G,Z),$$

где числа δ_k удовлетворяют условию (2).

Теорема 1 (монотонность). *Пусть G – конечносвязная область без изолированных граничных точек либо $G = \bar{\mathbf{C}}_z$, область D удовлетворяет тем же условиям, $G \subset D$, $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – набор допустимых точек как для $\bar{G}$, так и для $\bar{D}$, причем $\beta_G(z_k) = \beta_D(z_k)$, $u(z)$ и $v(z)$ потенциальные функции для G, Z, Δ and D, Z, Δ, соответственно. Тогда*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G,Z) \geqslant \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(D,Z) + \frac{1}{\pi} I(v-u,G). \tag{9}$$

Здесь, как и раньше, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – вещественные числа, удовлетворяющие условию (2).

Доказательство. Обозначим через v потенциальную функцию для D, Z, Δ. Ясно, что эта функция допустима для G, Z, Δ. Учитывая леммы 1, 2, имеем

$$\begin{aligned}
I(v-u,G_r) &= I(v,G_r) - I(u,G_r) - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \delta_k (b_k - a_k) + o(1) \\
&\leqslant I(v,D_r) - I(u,G_r) - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \delta_k (b_k - a_k) + o(1) \\
&= \pi \left(\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(D,Z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\beta_k} \log \mu_k - \sum_{k=1}^{n} {\delta_k}^2 \log r \right) \\
&\quad - \pi \left(\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G,Z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\beta_k} \log \mu_k - \sum_{k=1}^{n} {\delta_k}^2 \log r \right) \\
&\qquad - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \delta_k (b_k - a_k) + o(1), \quad r \to 0.
\end{aligned}$$

Вспоминая, что $b_k = \sum\limits_{l=1} \delta_l N_{kl}(D,Z)$, $a_k = \sum\limits_{l=1} \delta_l N_{kl}(G,Z)$, $k = 1, \ldots, n$, получаем

$$\frac{1}{\pi} I(v-u,G_r) \leqslant \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G,Z) - \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(D,Z) + o(1), \quad r \to 0.$$

Устремив r к нулю, заключаем, что

$$\frac{1}{\pi} I(v-u, G) \leqslant \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G, Z) - \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(D, Z).$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 справедливо неравенство*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G, Z) \geqslant \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(D, Z). \tag{10}$$

Равенство при $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2 \neq 0$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\bar{G} = \bar{D}$ *и потенциальная функция для* D, Z, Δ *с точностью до аддитивной константы является потенциальной функцией для* G, Z, Δ.

Предположим, что функция $f(z)$ конформна и однолистна в G, z_0 допустимая граничная точка $\bar{G}$, $f(z_0)$ существует в смысле граничного соответствия и $f(z_0)$ допустима для $\overline{f(G)}$. Поскольку вид разложения (1) не зависит от выбора функции $g(z)$, заключаем, что в случае $f(z_0) \neq \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\begin{gathered} f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^{\beta'/\beta}(d(z_0, f) + o(1)) \\ \text{при } z \to z_0 \neq \infty, z \in G, \end{gathered} \tag{11}$$

где $d(z_0, f) \neq 0$, $\beta = \beta_G(z_0)$, $\beta' = \beta_{f(G)}(f(z_0))$. В случае $z_0 = \infty$ либо $f(z_0) = \infty$ локальный параметр $(z - z_0)$ либо $(f(z) - f(z_0))$ надо заменить на $1/z$ либо $1/f(z)$, соответственно. Ясно, что разложение (11) выполняется и для внутренних точек G, при этом $d(z_0, f) = f'(z_0)$.

Теорема 2 (поведение при конформном отображении). *Пусть* $f(z)$ *конформно и однолистно отображает* G *на* $f(G)$, $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ *и* $f(Z) = \{f(z_k)\}_{k=1}^n$ *множества допустимых точек* $\bar{G}$ *и* $\overline{f(G)}$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ *вещественные числа, удовлетворяющие условию* (2). *Тогда*

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G, Z) = &\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(f(G), f(Z)) \\ &- \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\beta_{f(G)}(f(z_k))} \log |d(z_k, f)|. \end{aligned}$$

Доказательство. По определению обобщенной функции Неймана $N_G(z,\zeta) = N_{f(G)}(f(z), f(\zeta))$. Принимая во внимание асимптотическое поведение $f(z)$ в окрестностях z_k (см. 11), получим

$$N_{kl}(G,Z) = N_{kl}(f(G), f(Z)), \quad k \neq l,$$
$$N_{kk}(G,Z) = N_{kk}(f(G), f(Z)) - \frac{1}{\beta_{f(G)}(f(z_k))} \log |d(z_k, f)|.$$

Теорема доказана. □

В современных работах по геометрической теории функций широко используется понятие поляризации множеств и конденсаторов. Ключевым свойством поляризации является тот факт, что емкость конденсатора не увеличивается при этом преобразовании. Для обобщенных конденсаторов аналогичное преобразование сталкивается с существенными трудностями в силу разного уровня потенциалов на пластинах. Следуя [8], определим поляризацию множества точек Z в зависимости от уровня потенциалов Δ, полагая, что область G не меняется при поляризации.

Пусть l – некоторая прямая, которая разбивает комплексную плоскость на две открытые полуплоскости L^+ и L^-, область G симметрична относительно l, z^* означает симметричную z относительно l точку, $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – множество допустимых точек $\bar{G}$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – вещественные числа. Для фиксированного Δ определим преобразование $PZ = \{p_k\}_{k=1}^n$ множества точек Z по следующим правилам:

1) если $z_k \in L^+$ и $z_k^* \notin Z$, то $p_k = z_k$ при $\delta_k \geqslant 0$ и $p_k = z_k^*$ при $\delta_k < 0$,

2) если $z_k \in L^-$ и $z_k^* \notin Z$, то $p_k = z_k$ при $\delta_k < 0$ и $p_k = z_k^*$ при $\delta_k > 0$,

3) если $z_k \in L^+$ и $z_k^* = z_l \in Z$, то $p_k = z_k$ при $\delta_k \geqslant \delta_l$ и $p_k = z_k^*$ при $\delta_k < \delta_l$,

4) если $z_k \in L^-$ и $z_k^* = z_l \in Z$, то $p_k = z_k$ при $\delta_k < \delta_l$ и $p_k = z_k^*$ при $\delta_k > \delta_l$,

5) если $z_k \in l$, то $p_k = z_k$.

Теорема 3. *Пусть область G симметрична относительно прямой l, $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – множество допустимых точек $\bar{G}$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – вещественные числа, удовлетворяющие условию* (2). *Тогда*

$$\sum_{k,l=1}^n \delta_k \delta_l N_{kl}(G,Z) \leqslant \sum_{k,l=1}^n \delta_k \delta_l N_{kl}(G,PZ). \tag{12}$$

Равенство при $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2 \neq 0$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $PZ = Z$ *либо* $PZ = \{z_k^*\}_{k=1}^n$.

Доказательство. Можем считать, что все δ_k отличны от нуля. Обозначим через w потенциальную функцию для G, Z, Δ и через u потенциальную функцию для G, PZ, Δ, $w^*(z) = w(z^*)$, $\beta_k = \beta_G(z_k)$, $G_r = G \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} U(z_k, r^{\beta_k}, G)$, $(PG)_r = G \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} U(p_k, r^{\beta_k}, G)$. Определим

$$v(z) = \begin{cases} \min(w(z), w^*(z)), & z \in \overline{L^-}, \\ \max(w(z), w(^*z)), & z \in L^+, \end{cases}$$

Пусть $p_k \notin l$. В силу разложения (3) потенциальной функции $w(z)$, в некоторой окрестности p_k имеем $v(z) = w(z)$ при $p_k = z_k$, либо $v(z) = w(z^*)$ при $p_k = z_k^*$. Следовательно,

$$v(z) = -\frac{\delta_k}{\beta_k} \log|z - p_k| + b_k + o(1), \quad z \to p_k, \quad z \in G, \tag{13}$$

где $b_k = \sum\limits_{l=1} \delta_l N_{kl}(G; Z)$. Эти же разложения остаются справедливыми и для p_k, принадлежащих l. Функция $v(z)$ локально липшицева и для достаточно малых r $I(v, (PG)_r = I(w, G_r)$ (см. [8], стр. 73). По лемме 2

$$\begin{aligned} &(v - u, (PG)_r) \\ &\quad = \left(I(v, (PG)_r) - I(u, (PG)_r) - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \delta_k (b_k - a_k) \right) + o(1), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r \to 0. \end{aligned}$$

Здесь $a_k = \sum\limits_{l=1} \delta_l N_{kl}(G; PZ)$. Воспользовавшись равенством $I(v, (PG)_r) = I(w, G_r)$ и леммой 1 для $I(w, G_r)$, $I(u, (PG)_r)$, получаем

$$I(v - u, (PG)_r) = \pi \sum_{k=1}^{n} \delta_k (a_k - b_k) + o(1), \quad r \to 0$$

Устремляя r к нулю, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k (a_k - b_k) = I(v - u, G)/\pi \geqslant 0,$$

что доказывает (12). Равенство достигается тогда и только тогда, когда v с точностью до константы совпадает с u. Таким образом, v

является гармонической функцией в $G \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{p_k\}$ и по теореме единственности либо совпадает с $w(z)$, либо совпадает с $w^*(z)$. В первом случае $PZ = Z$, во втором $PZ = Z^*$. Теорема доказана. $\square$

Обозначим через H верхнюю полуплоскость $Im\ z > 0$.

Теорема 4 (принцип симметрии). *Предположим, что $G \subset H$ и одна из граничных компонент ∂G является вещественной прямой R, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – вещественные числа, удовлетворяющие условию* (2), *$Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – множество допустимых точек $\bar{G}$, причем при $1 \leqslant k \leqslant p$ выполняется $Im\ z_k > 0$ и при $p+1 \leqslant k \leqslant n$ выполняется $Im\ z_k = 0$. Пусть $G^* = \{z : \bar{z} \in G\}$, $B = G \cup G^* \cup R$, и множества $W = \{w_k\}_{k=1}^{n+p}$, $\widetilde{\Delta} = \{\widetilde{\delta}_k\}_{k=1}^{n+p}$, определены следующим образом: $w_k = z_k$ и $\widetilde{\delta}_k = \delta_k$ для $k = \overline{1,p}$, $w_k = \overline{z_{k-p}}$ и $\widetilde{\delta}_k = \delta_{k-p}$ для $k = \overline{p+1,2p}$, $w_k = z_{k-p}$ и $\widetilde{\delta}_k = 2\delta_{k-p}$ для $k = \overline{2p+1,n+p}$. Тогда*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G,Z) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n+p} \widetilde{\delta}_k \widetilde{\delta}_l N_{kl}(B,W).$$

Доказательство. Можем считать, что область G ограничена аналитическими кривыми и точки z_k конечны. Пусть $u(z)$ – потенциальная функция для $B, W, \widetilde{\Delta}$. В силу симметрии B, W функция $u(z)$ совпадает с $u(\bar{z})$. Поэтому на вещественной прямой $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Это доказывает, что с точностью до аддитивной постоянной является в области G потенциальной функцией для G, Z, Δ. Тогда

$$\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G,Z) = \sum_{k=1}^{p} \delta_k a_k + \sum_{k=2p+1}^{n+p} \delta_{k-p} a_k, \tag{14}$$

где константы a_k определены в разложении (3) функции $u(z)$ в окрестности точки w_k, $k = \overline{1,n+p}$. Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+p} \widetilde{\delta}_i a_i &= \sum_{i=1}^{p} \widetilde{\delta}_i a_i + \sum_{i=p+1}^{2p} \widetilde{\delta}_i a_i + \sum_{i=2p+1}^{n+p} \widetilde{\delta}_i a_i \\ &= \sum_{k=1}^{p} \delta_k a_k + \sum_{k=1}^{p} \delta_k a_k + 2 \sum_{k=2p+1}^{n+p} \delta_{k-p} a_k\end{aligned}$$

$$= 2\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G, Z).$$

Остается заметить, что

$$\sum_{i,j=1}^{n+p} \widetilde{\delta}_i \widetilde{\delta}_j N_{ij}(B, W) = \sum_{i=1}^{n+p} \widetilde{\delta}_i a_i.$$

Теорема доказана. □

Теорема 5 (предельный переход). *Пусть* $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ *– множество различных конечных точек области* G, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ *– вещественные числа, удовлетворяющие условию* (2), $z_0 \neq z_k$, $k = \overline{1, n}$, $z_0 \neq \infty$, $Z_0 = \{z_0, z_2, \ldots, z_n\}$. *Тогда*

$$\lim_{z_1 \to z_0} \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G, Z) = \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G, Z_0). \tag{15}$$

В случае $z_1 \to z_2$ *имеем*

$$\lim_{z_1 \to z_2} \left(\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G, Z) + \delta_1 \delta_2 \log|z_1 - z_2| \right) = \sum_{k,l=1}^{n-1} \widetilde{\delta}_k \widetilde{\delta}_l N_{kl}(G, \widetilde{Z}), \tag{16}$$

где $\widetilde{Z} = \{z_2, z_3, \ldots, z_n\}$, $\widetilde{\Delta} = \{\delta_1 + \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n\}$.

Доказательство. Из определения обобщенной функции Неймана следует, что $h(z, \zeta) = N_G(z, \zeta) + \frac{1}{2}\log|z - \zeta|$ непрерывна как функция (z, ζ) при $z \in G$, $\zeta \in G$. Поэтому

$$\lim_{z_1 \to z_0} N_{1l}(G, Z) = \lim_{z_1 \to z_0} N_G(z_1, z_l) = N_G(z_0, z_l) = N_{1l}(G, Z_0), \ l = 2, \ldots, n,$$
$$\lim_{z_1 \to z_0} N_{l1}(G, Z) = \lim_{z_1 \to z_0} N_G(z_l, z_1) = N_G(z_l, z_0) = N_{l1}(G, Z_0),$$
$$\lim_{z_1 \to z_0} N_{11}(G, Z) = \lim_{z_1 \to z_0} h(z_1, z_1) = h(z_0, z_0) = N_{11}(G, Z_0).$$

Предельный переход $z_1 \to z_0$ дает (15). Для доказательства (16) заметим, что

$$\lim_{z_1 \to z_2} (N_{1l}(G, Z) + \frac{1}{2}\log|z_1 - z_2|)$$
$$= \lim_{z_1 \to z_2} (N_G(z_1, z_2) + \frac{1}{2}\log|z_1 - z_2|) = N_{22}(G, Z).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\lim_{z_1\to z_2}\Big(\sum_{k,l=1}^{n}\delta_k\delta_l N_{kl}(G,Z)+\delta_1\delta_2\log|z_1-z_2|\Big)\\
&\quad=\lim_{z_1\to z_2}(\delta_1^2N_{11}(G,Z)+\delta_2^2N_{22}(G,Z)+\delta_1\delta_2N_{12}(G,Z)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\delta_1\delta_2\log|z_1-z_2|+\delta_1\delta_2N_{21}(G,Z)+\frac{1}{2}\delta_2\delta_1\log|z_1-z_2|\\
&\qquad+\delta_1\sum_{l=3}^{n}\delta_lN_{1l}(G,Z)+\delta_2\sum_{l=3}^{n}\delta_lN_{2l}(G,Z)+\delta_1\sum_{l=3}^{n}\delta_lN_{l1}(G,Z)\\
&\qquad+\delta_2\sum_{l=3}^{n}\delta_lN_{l2}(G,Z)+\sum_{k,l=3}^{n}\delta_k\delta_lN_{kl}(G,Z))\\
&\quad=(\delta_1+\delta_2)^2N_{22}(G,Z)+(\delta_1+\delta_2)\sum_{l=3}^{n}\delta_lN_{2l}(G,Z)\\
&\qquad+(\delta_1+\delta_2)\sum_{l=3}^{n}\delta_lN_{l2}(G,Z)+\sum_{k,l=3}^{n}\delta_k\delta_lN_{kl}(G,Z)\\
&\quad=\sum_{k,l=1}^{n-1}\widetilde{\delta}_k\widetilde{\delta}_lN_{kl}(G,\widetilde{Z}).
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

§3. Теоремы искажения

Теорема 6. *Пусть G – конечносвязная область без изолированных граничных точек либо $G=\bar{\mathbf{C}}_z$, область D удовлетворяет тем же условиям, $Z=\{z_k\}_{k=1}^n$ – набор допустимых точек $\bar{G}$, $\Delta=\{\delta_k\}_{k=1}^n$ – вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k=0$. Пусть функция $f(z)$ мероморфна и однолистна в G и $f(z_k)$ является допустимой точкой как для $\overline{f(G)}$, так и для $\bar{D}$, причем $\beta_{f(G)}(f(z_k))=\beta_D(f(z_k))$, $k=1,\dots,n$. Если $f(G)\subset D$, то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k^2}{\beta_D(f(z_k))}\log|d(z_k,f)|\geqslant\sum_{k,l=1}^{n}\delta_k\delta_l\,[N_{kl}(D,f(Z))-N_{kl}(G,Z)]. \quad (17)$$

Здесь $d(z_k, f)$ *определено в* (11). *Если, дополнительно, области* G *и* D *ограничены конечным числом кусочно-аналитических кривых и* $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2 \neq 0$, *то равенство в* (17) *возможно тогда и только тогда, когда* $\overline{f(G)} = \bar{D}$ *и*

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k \frac{\partial N_D(w; f(z_k))}{\partial n} = 0$$

во всех точках $w \in \overline{f(G)} \cap D$, *в которых определена нормаль.*

Доказательство. Применяя теорему 2 и следствие 1, получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(G, Z) \\
&\quad = \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(f(G), f(Z)) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\beta_{f(G)}(f(z_k))} \log |d(z_k, f)| \\
&\qquad \geqslant \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l N_{kl}(D, f(Z)) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{\beta_{f(G)}(f(z_k))} \log |d(z_k, f)|.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Отметим, что теорема 6 для внутренних точек была доказана в [14] с привлечением асимптотики емкости вырождающегося конденсатора, но без утверждения о случае равенства. Сейчас мы сосредоточимся на следствиях теоремы 6, касающихся искажений в граничных точках.

Функция Неймана единичного круга $U = \{z : |z| < 1\}$ имеет вид ([9], с. 369)

$$N_U(z, \zeta) = -\frac{1}{2} \log |z - \zeta||1 - \bar{z}\zeta|.$$

Для внутренних точек круга $z_k \in U$, $k = 1, \ldots, n$,

$$N_{kl}(U, Z) = -\frac{1}{2} \log |z_k - z_l||1 - \overline{z_k} z_l|, \quad k \neq l, N_{kk} = -\frac{1}{2} \log |1 - z_k^2|. \quad (18)$$

Для граничных точек $z_k \in \partial U$, $k = 1, \ldots, n$,

$$N_{kl}(U, Z) = -\log |z_k - z_l|, \quad k \neq l, N_{kk} = 0. \quad (19)$$

Полагая в теореме 1 $G = D = U$ и $z_k \in \partial U$, $k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 2$, получаем

Следствие 2. *Пусть функция f голоморфна и однолистна в круге U, $f(U) \subset U$, и пусть в различных граничных точках $z_k \in \partial U$, $k = 1, \dots, n$, $n \geqslant 2$, существуют $f(z_k)$, $f'(z_k)$, причем $|f(z_k)| = 1$. Тогда*

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)|^{\delta_k^2} \geqslant \prod_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{n} \left(\frac{|z_k - z_l|}{|f(z_k) - f(z_l)|} \right)^{\delta_k \delta_l}, \tag{20}$$

где δ_k – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = 0$. Равенство выполняется тогда и только тогда, когда потенциальные функции для $U, f(Z), \Delta$ и для $f(U), f(Z), \Delta$ совпадают с точностью до аддитивной постоянной.

Если точки z_k в следствии 2 остаются неподвижными ($f(z_k) = z_k$), то

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)|^{\delta_k^2} \geqslant 1 \tag{21}$$

Следствие 2 помогает привести конкретные примеры выполнения равенства в (21). Например, из соображений симметрии ясно, что потенциальные функции единичного круга и круга с разрезом по действительной оси для совокупностей $Z = \{-1, i, -i\}$, $\Delta = \{-2, 1, 1\}$ совпадают. Обозначив через $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ функцию Жуковского, убеждаемся, что функция

$$f(z) = \zeta^{-1}\left(\frac{-4\zeta}{\zeta - 3}\right)$$

оставляет неподвижными точки $Z = \{-1, i, -i\}$ и отображает единичный круг на круг с разрезом по вещественной оси. Непосредственные вычисления дают $|f'(-1)| = \sqrt{\frac{3}{4}}$, $|f'(i)| = |f'(-i)| = \frac{4}{3}$, следовательно, $|f'(-1)|^4 |f'(i)||f'(-i)| = 1$.

Аналогичным образом, полагая в теореме 6 $G = D = U$, $Z = \{0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$, $\Delta = \{-n, 1, \dots, 1\}$ и вычисляя функцию Неймана единичного круга, получаем следующий результат.

Следствие 3. *Пусть f – конформное и однолистное отображение единичного круга U, $f(U) \subset U$, $f(0) = 0$, $z_k \in \partial U$, $k = 1, \dots, n$, $n \geqslant 2$, и существуют значения $f(z_k)$, $f'(z_k)$, причем $|f(z_k)| = 1$, $k = 1, \dots, n$.*

Тогда

$$\prod_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{n} \frac{|z_k - z_l|}{|f(z_k) - f(z_l)|} \leqslant |f'(0)|^{\frac{n^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)|, \tag{22}$$

В работе [7] получены неравенства (21), (22) при более слабых условиях. Именно, производная в граничных точках в [7] понимается как угловая производная (определение и свойства угловой производной см, например, в [15]). При доказательстве использовались асимптотические формулы емкости вырождающегося конденсатора всей комплесной сферы, принцип симметрии и предельный переход ([7], теоремы 1,2). Теоремы 4, 5 данной работы позволяют распространить такой прием на конечносвязные области.

Теорема 7. *Предположим, что G, D – конечносвязные области без изолированных граничных точек, лежащие в единичном круге, причем одна из граничных компонент которых является единичной окружностью $T = \{|z| = 1\}$, f конформна и однолистна в G, $f(G) \subset D$. Пусть $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = 0$, $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – набор точек, лежащих на T, и существуют угловые пределы $f(z_k)$, $f(z_k) \in T$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log|f'(z_k)| \geqslant \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l \left[N_{kl}(D, f(Z)) - N_{kl}(G, Z)\right], \tag{23}$$

где $f'(z_k)$ означает угловую производную.

Доказательство. Пусть $w = g(z)$ – конформное однолистное отображение единичного круга U на верхнюю полуплоскость H, $w_k = g(z_k)$, $k = 1, \ldots, n$, $W = \{w_k\}_{k=1}^n$. Рассмотрим функцию

$$t(w) = g(f(g^{-1}(w))),$$

отображающую $g(G)$ в верхнюю полуплоскость. По теореме 6 для множества Ψ внутренних точек $\zeta_k \in g(G)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{2} \log|t'(\zeta_k)| \geqslant \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l \left[N_{kl}(t(g(G)), t(\Psi)) - N_{kl}(g(G), \Psi)\right].$$

По теореме 4,

$$\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k \delta_l \left[N_{kl}(t(g(G)), t(\Psi)) - N_{kl}(g(G), \Psi)\right]$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{2n} \widetilde{\delta}_k \widetilde{\delta}_l \left[N_{kl}(B, Y) - N_{kl}(Q, X)\right],$$

где

$$B = t(g(G)) \cup R \cup t(g(G))^*, \quad Q = g(G) \cup R \cup (g(G))^*,$$
$$Y = \{t(\zeta_1), \dots, t(\zeta_n), \overline{t(\zeta_1)}, \dots, \overline{t(\zeta_n)}\},$$
$$X = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n, \overline{\zeta_1}, \dots, \overline{\zeta_n}\},$$
$$\widetilde{\Delta} = \{\widetilde{\delta}_k\}_{k=1}^{2n} = \{\delta_1, \dots, \delta_n, \delta_1, \dots, \delta_n\}.$$

В неравенстве

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{2} \log |t'(\zeta_k)| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{2n} \widetilde{\delta}_k \widetilde{\delta}_l \left[N_{kl}(B, Y) - N_{kl}(Q, X)\right]$$

перейдем к пределу при $\overline{\zeta_1} \to w_1$, $\overline{\zeta_2} \to w_2$, $\overline{\zeta_n} \to w_n$. Получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k^2}{2} \log |t'(w_k)| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{2n} \widetilde{\delta}_k \widetilde{\delta}_l \left[N_{kl}(B, \widetilde{Y}) - N_{kl}(Q, \widetilde{X})\right], \tag{24}$$

где

$$\widetilde{Y} = \{t(\zeta_1), \dots, t(\zeta_n), t(w_1), \dots, t(w_n)\},$$
$$\widetilde{X} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n, w_1, \dots, w_n.\}$$

По теореме 5 при $\zeta_1 \to w_1$, $\zeta_2 \to w_2$, $\zeta_n \to w_n$ имеем равенство

$$\sum_{k,l=1}^{2n} \widetilde{\delta}_k \widetilde{\delta}_l \left[N_{kl}(B, \widetilde{Y}) - N_{kl}(Q, \widetilde{X})\right]$$
$$= \sum_{k,l=1}^{n} (2\delta_k)(2\delta_l) \left[N_{kl}(B, t(W)) - N_{kl}(Q, W)\right]$$
$$- \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k^2 \log \left| \frac{t(\zeta_k) - t(w_k)}{\zeta_k - w_k} \right| + o(1).$$

Учитывая (24) и теорему 4, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log|t'(w_k)| \geqslant \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k\delta_l \left[N_{kl}(t(g(G)), t(W)) - N_{kl}(g(G), W)\right].$$

Заметим, что $|t'(w_k)| = |g'(f(z_k)||f'(z_k)|(|g'(w_k)|^{-1})$, $k = 1, \ldots, n$. Применяя теорему 2 для отображения g^{-1}, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{n} \delta_k\delta_l \left[N_{kl}(t(g(G)), t(W)) - N_{kl}(g(G), W)\right]\\ = \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k\delta_l \left[N_{kl}(f(G), f(Z))) - N_{kl}(G, Z)\right]\\ - \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k^2 \log(1/|g'(f(z_k)|) + \sum_{k,l=1}^{n} \delta_k^2 \log(1/|g'(w_k)|).\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

В работе [9] вычислена функция Неймана кругового кольца $K(\mu) = \{z : \mu < |z| < 1\}$ для внутренних точек (см. [9], формула (43)). Используя теорему 4 теперь несложно выписать квадратичную форму $\sum\limits_{k,l=1}^{n} \delta_k\delta_l N_{kl}(K(\mu), Z)$ в случае, когда точки z_k лежат на единичной окружности, $Z = \{z_k\}_{k=1}^{n}$. Полагая в теореме 7 $G = K(\mu)$, $D = U$, получаем следующий результат.

Следствие 4. *Пусть функция f голоморфна и однолистна в кольце $K(\mu) = \{z : \mu < |z| < 1\}$, $f(K(\mu)) \subset U$, и в различных граничных точках $z_k \in \partial U$, $k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 2$, существует угловой предел $f(z_k)$, $|f(z_k)| = 1$, а δ_k – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k = 0$. Тогда*

$$\prod_{k=1}^{n} \left|\frac{4f'(z_k)\mu\sin(i\log\mu)}{(1-\mu^2)\varphi(\mu^2)\theta_1'(0;\mu^2)}\right|^{\delta_k^2} \geqslant \prod_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{n} \left|\frac{\varphi(\mu^2 z_k\overline{z_l})\varphi(z_k\overline{z_l})}{f(z_k)-f(z_l)}\right|^{\delta_k\delta_l},$$

где $f'(z_k)$ *угловая производная,* $\varphi(z) = \theta_1(\frac{i}{2}\log z; \mu^2)$, $\theta_1(z;\mu)$ *тета функция Якоби,*

$$\theta_1(z;\mu) = -i \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \mu^{(l+1/2)^2} e^{i(2l+1)z}.$$

Литература

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Наука. М. 1966
2. Z. Nehary, *Some inequalities in the theory of functions.* — Trans. Amer. Math. **75**, No. 2 (1953), 256–286.
3. P. Duren, M. M. Schiffer, *Robin functions and energy functionals of multiply connected domains.* — Pacific J. Math. **148**, No. 2 (1991.), 251–273.
4. P. Duren, M. M. Schiffer, *Robin functions and distortion of capacity under conformal mapping.* — Complex Variables **21** (1993), 189–196.
5. В. Н. Дубинин, *О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена.* — Мат. сб. **200**, No. 10 (2009), 25–38.
6. V. N. Dubinin, M. Vuorinen, *Robin functions and distortion theorems for regular mappings.* — Math. Nachr. **283**, No. 11 (2010), 1589–1602.
7. В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким, *Обобщенные конденсаторы и теоремы о граничном искажении при конформном отображении.* — Дальневост. мат. ж. **13**, No. 2 (2013), 196–208.
8. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функции комплексного переменного.* Владивосток, Дальнаука, 2009.
9. D. Karp, E. Prilepkina, *Reduced modules with free boundary and its applications.* — Ann. Acad. Scient. Fenn. **34** (2009), 353–378.
10. Е. Г. Емельянов, *О квадратичных дифференциалах в многосвязных областях, являющихся полными квадратами.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **350** (2007), 40–51.
11. P. Duren, J. Pfaltzgraff, E. Thurman, *Physical interpretation and further properties of Robin capacity.* — Алгебра и анализ **9**, No. 3 (1997), 211–219.
12. В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина, *О сохранении обобщенного приведенного модуля при геометрических преобразованиях плоских областей.* — Дальневост. мат. ж. **6**, Nos. 1–2 (2005), 39–56.
13. Е. Г. Прилепкина, *О принципах композиции для приведенных модулей.* — Сиб. мат. ж. **52**, No. 6 (2011), 1357–1372.
14. Е. Г. Прилепкина, *Теоремы искажения для однолистных функций в многосвязных областях.* — Дальневост. мат. ж. **9**, Nos. 1–2 (2009), 140–149.
15. Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps.* Springer-Verlag, 1992.

Prilepkina E. G. On quadratic forms generated by the Neumann functions.

Quadratic forms depending on the values of Neumann functions are studied. Monotonic behavior under extension of domain and polarization

was proved. Also the behavior of this quadratic form under conformal univalent mapping was researched. As an application, the distortion theorem generalizing the results of Dubinin, Kim in the case of finitely connected domain are derived.

Дальневосточный
федеральный университет,
ул. Суханова, д.8.,
Владивосток, Россия
E-mail: pril-elena@yandex.ru

Поступило 15 сентября 2014 г.