Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

Г. В. Кузьмина

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЖЕНКИНСА И МЕТОД МОДУЛЕЙ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ

§1

1. Дженкинсу принадлежат наиболее важные результаты в развитии метода экстремальной метрики как мощного метода всей теории функций.

Общим результатом этого метода является "общая теорема коэффициентов" Дженкинса. Эта теорема (сокращенно, ОТК) первоначально была опубликована в 1954 году (1). ОТК является центральной темой монографии Дженкинса "Однолистные функции и конформное отображение" [2], опубликованной издательством "Шпрингер" в 1958 году (второе издание вышло в том же издательстве в 1962 году). Более общая форма ОТК получена в [3].

В ОТК рассматривается квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$ с полюсами $P_1, \dots, P_n$ порядков $\geqslant 2$ на конечной римановой поверхности, допустимое семейство областей Δ_j относительно этого дифференциала (области этого семейства определяются структурой траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$) и допустимое семейство функций $f_j(z)$, реализующих конформное отображение областей Δ_j на неналегающие области); функции $f_j(z)$ удовлетворяют предписанным нормирующим условиям. ОТК устанавливает неравенство для функционала, содержащего коэффициенты разложений функций $Q(z)dz^2$ и $f_j(z)$ в окрестностях полюсов $P_1, \dots, P_n$ и случаи равенства в этом неравенстве. При доказательстве ОТК ключевая роль принадлежит "основной структурной теореме" [2] и экстремальным свойствам Q-метрики $|Q(z)|^{1/2}|dz|$.

ОТК реализует принцип Тейхмюллера для широкого круга экстремальных задач. Как показывает монография [2], сила этой теоремы такова, что она (уже в первоначальной форме) содержит в качестве

Ключевые слова: общая теорема коэффициентов Дженкинса, модуль семейства кривых, метод молулей семейств кривых, приведенный модуль области, квадратичный дифференциал.

следствий практически все известные результаты теории однолистных функций. Успех применения ОТК зависит от правильного выбора дифференциала $Q(z)dz^2$, допустимого семейства областей Δ_j и допустимого семейства функций $f_j(z)$.

ОТК привела к значительному упрощению и униформизации результатов теории однолистных функций и к решению повых по постановке экстремальных задач (ОТК и другим результатам Дженкинса посвящена его глубокая по содержанию обзорная статья [4]).

Естественно, имеется достаточно широкий круг экстремальных задач, к которым ОТК неприменима. Одной из причин этого является наличие нормирующих условий ОТК. Кроме того, в ОТК не расматриваются задачи, в которых квадратичный дифференциал имеет полюсы лишь первого порядка.

2. Примерно в одно время с ОТК Дженкинс [5, 6] установил общий принцип, устанавливающий связь между квадратичными дифференциалами и модулями нескольких семейств кривых. Этот результат сыграл определяющую роль в создании метода модулей кривых как современного метода теории функций.

В [5, 6] рассматривается конечная риманова поверхность $\mathfrak{R}$ и множество $A = \{a_k\}_{k=1}^n$ различных точек на $\mathfrak{R}$. На $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus A$ расматривается свободное семейство $\mathcal{H} = \{H_i\}_{i=1}^{n_1+n_2}$ гомотопических классов локально спрямляемых кривых следующих двух типов. Первый тип состоит из классов H_i, $i = 1, \dots, n_1$, замкнутых жордановых кривых, не гомотопных нулю на $\mathfrak{R}'$. Если $\mathfrak{R}$ действительно имеет граничные компоненты, то второй тип состоит из классов $H_i, i = n_1+1, \dots, n_2$, дуг на $\mathfrak{R}'$, соединяющих некоторые граничные элементы $\mathfrak{R}$. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n_1+n_2}$ – система положительных чисел.

Устанавливается связь между следующими экстремальными проблемами. Именно, рассматривается проблема модуля $P(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1+n_2})$, состоящая в нахождении $\inf \iint\limits_{\mathfrak{R}} \rho^2 dA$ в классе метрик, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\gamma_k} \rho |dz| \geqslant \alpha_k$$

для каждой спрямляемой кривой $\gamma_k \in H_k, k = 1, \dots, n_1 + n_2$.

Далее рассматривается задача об экстремальном разбиении в допустимом семействе областей, ассоциированным с семейством $\mathcal{H}$. Это семейство определяется следующим образом (мы следуем изложению в [5, 6]).

Назовем двусвяэную область D, лежащую на $\mathfrak{R}'$, ассоциированной с гомотопическим классом H первого типа, если класс простых замкнутых кривых, лежащих в D и разделяющих ее граничные компоненты, содержится в H. В этом случае модуль области D для этого класса кривых называем ассоциированным с классом H. Четырехугольник D, лежащий на $\mathfrak{R}'$, называем ассоциированным с гомотопическим классом H второго типа, если пара противоположных сторон D, лежащих на граничных компонентах $\mathfrak{R}$, соединяется дугами в H, и если класс дуг, лежащих в D и соединяющих эти стороны, содержится в H. В этом случае модуль области D для этого класса кривых называем ассоциированным с классом H.

Под допустимым семейством $\mathcal{D}$ областей, ассоциированным со свободным семейством гомотопических классов кривых $H_i, i = 1, \dots, n_1 + n_2$, понимается конечное число областей, каждая из которых ассоциирована с некоторым классом H_i и не более чем одна из которых ассоциирована с любым из этих классов. Пусть $M_k(D_k)$ – модуль области D_k, ассоциированный с классом $H_k, k = 1, \dots, n_1 + n_2$.

Рассматривается вопрос о максимуме суммы $\sum\limits_{k=1}^{n_1+n_2} \alpha_k^2 M_k(D_k)$ в семействе $\mathcal{D}$.

Теорема в [5,6] показывает, что эти две величины равны друг другу, экстремальная система областей единнственна и существует единственный квадратичный дифференциал, структура траекторий которого определяет экстремальную систему областей.

Указанная теорема Дженкинса инспирировала исследования ряда авторов, посвященных различным вопросам теории квадратичных дифференциалов, включая их роль в задачах об экстремальном разбиении и их связи с топологией и дифференциальной геометрией.

Еще в [5] было отмечено, что результаты этой работы могут быть распространены на случай семейства гомотопическх класов кривых на римановой поверхности трех типов: семейство $\mathcal{H}$ содержит, помимо классов H_i, рассматриваемых выше, классы H_l замкнутых кривых, гомотопных точечным контурам в отмеченных точках $b_l \in \mathfrak{R}$. Следует указать, что принцип, установленный в [5], использовался Дженкинсом при решении конкретных задач в его более ранних работах. Так, в [7] посредством распространения результата в [5] решена проблема Гронуолла для класса S. Подход, используемый в указанных работах Дженкинса, позволил эффективно использовать в них результаты метода симметризации.

Свойства квадратичных дифференциалов с замкнутыми траекториями и полюсами второго порядка рассматривались Штребелем [8] и другими авторами.

Простое доказательство общего результата, представляющего собой упомянутое выше распространение теоремы Дженкинса [3] в случае римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ дано в [9], этот результат получил большое число приложений. Позднее в работах Солынина [10], Емельянова и Кузьминой [11] результаты в [5] были распространенены на тот случай, когда семейство $\mathcal{H}$ состоит из классов четырех типов и ассоциированные квадратичные дифференциалы имеют полюсы второго порядка с радиальной [10, 11], радиальной или спиральной [11] структурой траекторий. Эти результаты потребовали введения понятия приведенного модуля двуугольника. Напомним определение.

Пусть D – односвязная область гиперболического типа с отмеченными граничными элементами с носителями в различных или совпадающих точках a_1 и a_2 (для определенности считаем, что a_1, a_2). Будем предполагать, что область D удовлетворяет следующему условию $(*)$. Пусть $\zeta = g(z)$ – конформный гомеоморфизм области D на полосу $-h/2 < \operatorname{Im}\zeta < h/2$, нормированный условиями $\operatorname{Re} g(a_1) = -\infty, \operatorname{Re} g(a_2) = +\infty$. Пусть ϵ_1, ϵ_2 – достаточно малые положительные числа. Тогда в компоненте связности $\Delta_k(\epsilon_k)$ множества $D \cup U(a_k, \epsilon_k)$, имеющей a_k носителем своего граничного элемента, справедливо равенство

$$g(z) = (-1)^{k-1}\{A_k \log(z - a_k) + \widetilde{g}_k(z))\}, \quad k = 1, 2,$$

где $A_k > 0, \widetilde{g}_k(z)$ – регулярная функция. Ясно, что $\phi_k = h/A_k$ – внутренний угол области D в граничном элементе a_k.

Пусть область D удовлетворяет условию $(*)$. Пусть $\Gamma^{(2)}$ – класс кривых в D, разделяющих стороны D. Обозначим через $S_k(\epsilon_k)$ дугу окружности $|z - a_k| = \epsilon_k$, принадлежащую границе области $\Delta_k(\epsilon_k)$. Пусть $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ – четырехугольник в D с противоположными сторонами $S_k(\epsilon_k), k = 1, 2$. Через $\Gamma^{(2)}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ обозначаем класс кривых в $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$, разделяющих стороны $S_1(\epsilon_1)$ и $S_2(\epsilon_2)$, через $M^{(2)}(D(\epsilon_1, \epsilon_2)$

– модуль $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ для класса $\Gamma^{(2)}(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Легко видеть, что предел

$$M^{(2)}(D) := \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0} \left| \left\{ M^{(2)}(D(\epsilon_1, \epsilon_2)) + \sum_{k=1}^{2} \phi_k^{(-1)} \log \epsilon_k \right\} \right|$$

существует и конечен. Этот предел назовем приведенным модулем области D для класса $\Gamma^{(2)}$ и обозначим через $M^{(2)}(D, a_1, a_2)$.

Из данного определения вытекает простая формула преобразования указанного модуля при конформном обображении области D.

3. Остановимся кратко на результате в [10, 11]. Приведем необходимые определения. Для краткости, мы не рассматриваем случай спиральной структуры траекторий ассоциированного квадратичного дифференциала.

Пусть $\mathfrak{R}$ – конечная риманова поверхность,

$$A = \{a_k\}_{k=1}^n, \quad B^{(0)} = \{b_l^{(0)}\}_{l=1}^m, \quad B = \{b_k\}_{k=1}^r$$

– множества отмеченных точек на $\mathfrak{R}$ и на границе $\mathfrak{R}$, если она существует, где точки из $B^{(0)}$ и B принадлежат $\mathfrak{R}$ (одно или два из указанных трех точечных множеств может отсутствовать). Предполаем, что в окрестности каждой точки из $A, B^{(0)}, B$ выбран фиксированный локальный параметр.

На $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \{A \cup B^{(0)} \cup B\}$ рассматриваются гомотопические классы локально спрямляемых жордановых кривых следующих четырех типов. Классы $H_1, \ldots, H_{n_1}$ первого типа и классы $H_{n_1+1}, \ldots, H_{n_1+n_2}$ второго типа и области, ассоциированные с этими классами (двусвязные области и четырехугольники) определяются так же как и в теореме Дженкинса [5].

Третий тип состоит из классов $H_{n_1+n_2+1}, \ldots, H_{n_1+n_2+m}$ замкнутых кривых, каждый из которых состоит из кривых, отделяющих одну из точек $b_l^{(0)}$ от других отмеченных точек на $\mathfrak{R}$ и от границы $\mathfrak{R}$, если она существует; эти кривые гомотопны точечной кривой в $b_l^{(0)}$. Односвязную область D на $\mathfrak{R}' \cup b_l^{(0)}$, $b_l^{(0)} \in D$, назовем ассоциированной с классом H третьего типа, если семейство замкнутых жордановых кривых в D, отделяющих точку $b_l^{(0)}$ от границы D, содержится в H.

Наконец, если B непусто, то четвертый тип состоит из классов $H_{n_1+n_2+m+s} = H_s^{(1)}, \quad s = 1, \ldots, p$, дуг на $\mathfrak{R}'$ с концами в точках $b_{k'}$, $b_{k''} \in B$ (эти точки могут совпадать). Предполагается, что каждая из точек B является концом дуг, принадлежащих одному или нескольким классам четвертого типа. Двуугольник D на $\mathfrak{R}'$, имеющий вершины в точках множества B, называется ассоциированным с классом H четвертого типа, если семейство дуг в D, соединяющих вершины D, содержится в H. Мы предполагаем, что область D удовлетворяет условию $(*)$ относительно своих вершин (см. определение, приведенное выше).

В соответствии с тем, какой из указынных выше четырех случаев имеет место, модуль $M(D)$ двусвязной области D для класса кривых, разделяющих ее граничные компоненты, модуль $M^{(1)}$ четырехугольника D для класса дуг, соединяющих его противоположные стороны на границе $\mathfrak{R}$, приведенный модуль $M(D, b_l^{(0)})$ односвязной области D относительно точки $b_l^{(0)} \in D$, или же приведенный модуль $M^{(2)}(D, b_{k'}, b_{k''})$ двуугольника D относительно его вершин $b_{k'}, b_{k''}$ называем ассоциированным с классом H. Предполагается, что все классы H_i определяются системами точек $A, B^{(0)}, B$ таким образом, что для каждой из областей D, ассоциированных с одним мз этих классов, модуль D, ассоциированный с этим классом,ограничен сверху(в случае приведенного модуля двуугольника снизу) некоторой постоянной,зависящей только от положения точек из $A, B^{(0)}, B$, но не от выбора области D.

Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n_1+n_2+m}, \quad \mathbf{h} = \{h_s\}_{s=1}^{p}$$

– множества положительных чисел, и пусть

$$\boldsymbol{\alpha}_k^{(1)} = \sum_{s \in I_k} h_s,$$

где I_k – множество всех индексов $s \in \{1, \ldots, p\}$ таких, что дуги из класса $H_{n_1+n_2+m+s} := H_s^{(1)}$ имеют предельные концевые точки в одном или двух направлениях в точке b_k (в последнем случае соответствующий индекс s присутствует в I_k дважды). Предполагается, что внутренние углы ϕ_k двуугольников $D_s^{(1)}$ в вершинах b_k удовлетворяют условию

$$\phi_k = 2\pi \frac{h_k}{\boldsymbol{\alpha}_k^{(1)}}, \quad k = k'(s), k''(s).$$

Семейство всех допустимых систем областей D_i, ассоциированных с семейством $\mathcal{H}$ и удовлетворяющих последнему условию, обозначим через $\mathcal{D}$.

Для фиксированных систем $\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{h}$ на семействе $\mathcal{D}$ определен функционал

$$F(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{h})=\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i^2 M(D_i)+\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}M^{(1)}(D_i)+\sum_{l=1}^{m}\alpha_{n_1+n_2+l}^2 M(D_{n_1+n_2+l},b_l)$$
$$-\sum_{s=1}^{p}h_s^2 M^{(2)}(D_s^{(1)},b_{k'(s)},b_{k''(s)}).$$

В [10, 11] показано, что экстремальная система областей рассматриваемой экстремальной задачи единственна и является системой характеристических областей ассоциированного квадратичного дифференциала, этот дифференциал определяется условиями задачи единственным образом. Мы не приводим здесь полную формулировку этого результата, так как о нем говорится в замечании к теореме 1 (см. §2 настоящей работы).

Замечание 1. Результаты метода модулей, о которых говорилось выше, получили интересные следствия. Так, в работах Солынина и Емельянова установлена связь между различными задачами об экстремальном разбиении, получены градиентные теоремы о зависимости функционала в задаче об экстремальном разбиении от расположения отмеченных точек на рассматриваемой поверхности и от вещественных параметров. По этому вопросу см. [11], а также обзорную статью [12].

§2

1. Для распространения результата в [10, 11] требуется рассмотреть задачи об экстремальном разбиении, в которых ассоциированный квадратичный дифференциал имеет полюсы порядка $\geqslant 3$, следовательно, имеет в своей структуре траекторий концевые области.

Будем рассматривать области, подобные концевым областям квадратичных дифференциалов. Пусть c – точка $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\infty$. Пусть D – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$, c – граничная точка D. Будем считать, что область D удовлетворяет следующему условию. Однолистное конформное отображение $\zeta = g_n(z)$ области D на верхнюю полуплоскость

$\operatorname{Im}\zeta > 0$ имеет в окрестности точки c разложение вида

$$\begin{aligned} g_n(z) &= \alpha(z-c)^{-(n/2-1)} + \text{ более высокие степени } (z-c), \\ &\qquad \text{если } c \neq \infty, \\ g_n(z) &= \alpha z^{n/2-1} + \text{более высокие степени } 1/z, \\ &\qquad \text{если } c = \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha \neq 0, \quad n \geqslant 3$ – натуральное число. Это условие будем называть условием $(**)$.

Область D, удовлетворяющая указанному условию, подобна в малом концевой области квадратичного дифференциала, имеющего в точке c полюс порядка n Эту область будем обозначать $D(c)$. Ясно, что эта область имеет в точке c внутренний угол величины $\pi/(n-2)$. Будем считать, что существуют $n{-}2$ области, для каждой из которых точка c является граничной, а отображение на верхнюю полуплоскость реализуется надлежащей ветвью функции указанного выше вида (это имеет место для соответствующего квадратичного дифференциала). Упомянутые области будем обозначать через $D_1(c), \ldots, D_{n-2}(c) \quad (D_1(c) = D(c))$.

Вернемся к области $D(c)$. Пусть $c = \infty$. Рассмотрим семейство областей, получаемых из области $D(c)$ удалением некоторых окрестностей точки c. Следуя Дженкинсу, за удаляемую окрестность точки c примем прообраз при отображении $\zeta = g_n(z)$ внешности полуквадрата

$$-L \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant L, \quad 0 \leqslant \operatorname{Im}\zeta \leqslant L,$$

где $L > 0$ достаточно велико. Полученную область обозначим через $D(c,L)$, $\operatorname{area}_\zeta D(c,L)$ - ее площадь в ζ-метрике $|d\zeta| = |g_n'(z)||dz|$: $\operatorname{area}_\zeta D(c,L) = 2L$. Аналогично определяются области $D_k(c,L)$, $k = 1,\ldots,n-2$.

Остановимся на условиях, при которых изменение $\operatorname{area}_\zeta D^(c,L)$ при конформном отображении этой области остается ограниченной величиной при $L \to \infty$. Перенося результат Дженкинса для концевых областей квадратичного дифференциала, установленный им в [2] при доказательстве “общей теоремы коэффициентов”, на указанные выше области, приходим к следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть области $D_k(c)$ и $D_k(c,L)$, $k = 1,\ldots n-2$, определены выше, $c = \infty$. Пусть функция $\zeta = g_n(z)$ обладает разложением,* *указанным в* (1). *Пусть функция* $f_n(z)$ *реализует конформное отображение областей* $D_k(c), k = 1, \ldots, n-2$, *и обладает в окрестности бесконечно удаленной точки разложением вида*

$$f_n(z) = z + a_{n-3} z^{-(n-3)} + \ldots .$$

Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{L\to\infty} \sum_{k=1}^{n-2} \{\mathrm{area}_\zeta (f_n(D_k(c,L)) - \mathrm{area}_\zeta D_k(c,L)\} \geqslant 2\pi \operatorname{Re}\{\alpha a_{n-3}\}.$$

Пусть теперь $C = \{c_j\}_{j=1}^J, \quad J \geqslant 2$, *– система точек, для каждой из которых существуют области* $D_k(c_j)$ *и* $D_k(c_j, L)$, *удовлетворяющие предыдущему условию с функциями* $\zeta = g_{n_j}(z)$ *и* $f_{n_j}(z)$ *вида*

$$g_{n_j}(z) = \alpha^{(j)} z^{n_j/2-1} + \ldots,$$
$$f_{n_j}(z) = z + a^{(j)}_{n_j-3} z^{(n_j-3)} + \ldots .$$

Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{L_j\to\infty} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_j-2} \Big\{\mathrm{area}_\zeta \big(f_{n_j}(D_k(c_j, L_j))\big) - \mathrm{area}_\zeta D_k(c_j, L_j)\Big\}$$
$$\geqslant 2\pi \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{J} \Big\{\alpha^{(j)} a^{(j)}_{n_j-3}\Big\}.$$

Отметим, что при доказательстве расширенной формы ОТК [3] получены менее ограничительные условия на допустимые функции.

2. Полученные определения позволяют распространить результат метода модулей, полученный в [10, 11], на семейства систем областей, содержащих области, подобные концевым областям квадратичных дифференциалов.

Дадим необходимые определения. Пусть на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$ заданы множества точек

$$A = \{a_k\}_{k=1}^i, \quad B^{(0)} = \{b_l^{(0)}\}_{l=1}^m, \quad B = \{b_l\}_{l=1}^r, \quad C = \{c_j\}_{j=1}^J.$$

Пусть $\overline{\mathbb{C}}'$ получается из $\overline{\mathbb{C}}$ удалением указанных точечных множеств. На $\overline{\mathbb{C}}'$ рассмотрим гомотопические классы жордановых кривых следующих четырех типов. Первые типы кривых определяются также как и выше. Поскольку в случае римановой сферы классы кривых определенного выше второго типа отсутствуют, то к первому типу отнесем классы замкнутых кривых, не гомотопных нулю на $\overline{\mathbb{C}}'$, ко второму типу – классы кривых, гомотопных точечной кривой в точке $b_l^{(0)} \in B^{(0)}, l = 1, \ldots, m$, к третьему типу – классы дуг, имеющих предельные концевые точки в обоих направлениях в различных или совпадающих точках $b_k \in B$.

К четвертому типу отнесем классы дуг на $\overline{\mathbb{C}}$, имеющих предельной точкой в обеих направлениях некоторую точку $c_j \in C$ и образующих в этой точке углы, равные $2\pi/(n-2)$. Эти дуги асимптотически подобны траекториям квадратичного дифференциала, имеющего в точке c_j полюс порядка $n_j \geqslant 3$.

Под свободным семейством $\mathcal{H}$ гомотопических классов кривых на $\overline{\mathbb{C}}'$ понимаем множество классов H_i^{μ}, где $H_i^{(1)}, i = 1, \ldots, m_1$, – классы первого типа, $H_i^{(2)}, i = 1, \ldots, m_2 (m_2 = m)$, – классы второго типа, $H_i^{(3)}, i = 1, \ldots, m_3$, – классы третьего типа и $H_i^{(4)}, i = 1, \ldots, m_4 (m_4 = \sum\limits_{j=1}^{J}(n_j - 2))$, – классы четвертого типа. Классы $H_j^{(4)}$ будем обозначать также через $H_{j,k}$ $(j = 1, \ldots, J;\ k = 1, \ldots, n_j - 2)$, дуги из класса $H_{j,k}$ имеют точку c_j предельной концевой точкой. Классы одного, двух или трех из указанных типов могут отсутствовать. Предполагается, что все рассматриваемые классы существуют и различны.

Области на $\overline{\mathbb{C}}$, ассоциированные с классами кривых первых трех из указанных типов, определяются также как и выше. В соответствии с тем, какой из этих случаев имеет место, модуль $M(D)$ двусвязной области D для класса кривых, разделяющих ее граничные компоненты, приведенный модуль $M(D, b_l^{(0)})$ односвязной области D относительно точки $b_l^{(0)} \in B^{(0)}$ или же приведенный модуль $M^{(2)}(D, b_{k'}, b_{k''})$ двуугольника D относительно его вершин будем называть ассоциированными с соответствующим из классов $H_i^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, 3$. Область D, $c_j \in \partial D$, на $\overline{\mathbb{C}}'$ назовем ассоциированной с классом $H_i^{(4)}$ четвертого типа, если дуги в D, имеющие концами в обеих направлениях точку c_j, принадлежат этому классу. Предполагаем, что для каждой точки $c_j \in C$ существует $n_j - 2 \geqslant 1$ областей, имеющих c_j общей вершиной и ассоциированных соответственно с классами $H_{j,1}, \ldots, H_{j,n_j-2}$.

Под допустимой системой областей $D_i^{(\mu)}$, ассоциированной с семейством $\mathcal{H}$ классов $H_i^{(\mu)}$, понимаем конечное число неналегающих областей на $\overline{\mathbb{C}}$, каждая из которых ассоциирована с некоторым классом $H_i^{(\mu)}$ и не более чем одна из которых ассоциирована с каждым из таких классов. Если $D_i^{(4)}$ – область, ассоциированная с классом $H_i^{(4)}$ четвертого типа, то считаем, что область $D_i^{(\mu)}$ удовлетворяет условию $(**)$, сформулированному в §1. Указанные области будем обозначать также через $D_i^{(1)}$, $D_i^{(2)}$, $D_i^{(3)}$ и $D_{i,k} := D_k(c_j)$, отмечая этим принадлежность к соответствующему гомотопическому классу. Семейство всех допустимых систем областей, ассоциированных с семейством $\mathcal{H}$, обозначаем через $\mathcal{D}$.

Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{m_1+m_2}, \quad \mathbf{h} = \{h_i\}_{i=1}^{m_3}$$

– заданные системы положительных чисел. Как и выше, будем предполагать, что двуугольники $D_i^{(3)}$ имеют в своих вершинах b_k внутренние углы ψ_k, удовлетворяющие условию

$$\psi_k = 2\pi h_i / \sum_{i \in I_k} h_k, \quad k = k'(i), k''(i),$$

где I_k – множество тех индексов i, для которых дуги из класса $H_i^{(3)}$ имеют точку b_k одной из своих предельных концевых точек.

Справедлива следующая теорема об экстремальном разбиении в семействе $\mathcal{D}$. Как обычно, под множеством Φ для квадратичного дифференциала понимается объединение всех критических траекторий этого дифференциала.

Теорема 1. *Пусть выполнены предыдущие условия. Пусть существует квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$, мероморфный на $\overline{\mathbb{C}}$ и определяемый следующими условиями.*

1) *$Q(z)dz^2$ имеет простые полюсы в точках $a_k \in A$, полюс второго порядка в каждой из точек $b_i^{(0)} \in B^{(0)}$ и $b_k \in B$, полюс порядка $n_j \geqslant 3$ в точке $c_j \in C, j = 1, \ldots, J$, и не имеет других полюсов на $\overline{\mathbb{C}}$.*

2) *Внутреннее замыкание множества Φ для дифференциала $Q(z)dz^2$ пусто и $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Phi}$ представляет собой объединение областей $D_i^{(\mu)*}$, $\mu = 1, \ldots, 4$; $i = 1, \ldots, m_\mu$, семейства $\mathcal{D}$.*

3) *Длины в Q-метрике траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в области $D_i^{(1)*}$, $i=1,\dots,m_1$, равны α_i, в области $D_i^{(2)*}$, $i=1,\dots,m_2$, равны α_{m_1+i}. Длины в Q-метрике замыканий ортогональных траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в области $D_i^{(3)*}$, $i=1,\dots,m_3$, равны h_i.*

4) *Области $D_i^{(4)}, i=1,\dots,m_4$, удовлетворяют следующему условию. При каждом $j=1,\dots,J$ области $D_k(c_j)$, $k=1,\dots,n_{j-2}$, удовлетворяют условию (**) с одной и той же функцией $g_j(z)$ с разложением вида* (1) *и соответствуют областям $D_k^*(c_j)$, $k=1,\dots,n_{j-2}$, при одном и том же конформном отображении $f_j(z)$, $f_j(c_j)=c_j$, $f_j'(c_j)>0$. Пусть при каждом $j=1,\dots,J$ существует конечный предел*

$$S(c_j)=\lim_{L_j\to\infty}\sum_{k=1}^{n_j-2}\{\mathrm{area}_Q D_k^*(c_j,L_j)-\mathrm{area}_Q D_k(c_j,L_j).$$

Тогда в семействе $\mathcal{D}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m_1}\alpha_i^2\Big[M(D_i^{(1)*})-M(D_i^{(1)})\Big]+\sum_{i=1}^{m_2}\alpha_{m_1+i}^2\Big[M(D_i^{(2)*},b_i^{(0)})-M(D_i^{(2)},b_i^{(0)})\Big]$$
$$-\sum_{i=1}^{m_3}h_i^2\Big[M\big(D_i^{(3)*},b_{k'(i)},b_{k''(i)}\big)-M\big(D_i^{(3)},b_{k'(i)},b_{k''(i)}\big)\Big]$$
$$+\sum_{j=1}^{J}S(c_j)\geqslant 0. \qquad (2)$$

Равенство в (2) *достигается только для систем областей $D_i^{(\mu)*}$ $(i=1,\dots,m_\mu;\ \mu=1,\dots,4)$.*

Доказательство. Доказательство проводится обычными рассуждениями метода экстремальной метрики и мы указываем лишь ключевые моменты доказательства. Пусть $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$ – область, полученная из $\overline{\mathbb{C}}$ удалением ϵ-окрестностей точек множеств $B^{(0)}$ и B и определенных выше L-окрестностей точек множества C. Пусть D_i – области семейства $\mathcal{D}, D_i(\epsilon)=D_i\cap\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$. Используя экстремальное свойство Q -метрики и пользуясь определениями приведенного модуля односвязной области относительно ее внутренней точки и приведенного модуля двуугольника относительно его вершин в результате предельного перехода приходим к неравенству

$$\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^2 M(D_i^{(1)*} + \sum_{i=1}^{m_2} \alpha_{m_1+i}^2 M(D_i^{(2)*}, b_i^{(0)}) - \sum_{i=1}^{m_3} h_i^2 M(D_i^{(3)*}, b_{k'(i)}, b_{k''(i)})$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^2 M(D_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{m_2} \alpha_{m_1+i}^2 M(D_i^{(2)}, b_i^{(0)})$$

$$- \sum_{i=1}^{m_3} h_i^2 M(D_i^{(3)}, b_{k'(i)}, b_{k''(i)}).$$

Отсюда и из условия 4) в формулировке теоремы приходим к неравенству теоремы. Утверждение об единственности следует из известных фактов метода экстремальной метрики. □

Замечание 2. Если в семействе $\mathcal{D}$ отсутствуют области, ассоциированные с гомотопическими классами кривых четвертого типа и, соответственно, множество C пусто, то теорема 1 доказана в [10, 11], при этом установлены существование и единственность ассоциированного квадратичного дифференциала.

Теорема 1 естественным образом распространяется на тот случай, когда семейство $\mathcal{D}$ содержит двуугольники с нулевыми внутренними углами в их вершинах. Это требует определения приведенного модуля двуугольника указанного вида, ассоциированного с соответствующим гомотопическим классом кривых.

Замечание 3. Если для областей семейства D, ассоциированных с классами кривых четвёртого типа, выполняются условия леммы 1, то неравенство (2) следует из “общей теоремы коэффициентов [2].”

3. В качестве примера, иллюстрирующего применение теоремы 1, остановимся на известной оценке модуля коэффициентов в классе $\Sigma(r)$ функций из класса Σ, отображающих $|z| > 1$ на область, дополнение которой имеет конформный радиус относительно начала не меньший чем r, $0 < r < 1$. Этот класс функций был введен Дженкинсом [2], в [2, 3] при помощи ОТК были получены точные оценки для $|\alpha_0|$ и $|\alpha_1|$ в этом классе при всех $0 < r < 1$. Остановимся кратко на доказательстве теоремы 7.3 в [2], ограничиваясь наиболее простым случаем этой теоремы, в котором результат формулируется в элементарных функциях.

В классе $\Sigma(r)$ в случае $r \leqslant 64/\pi^2 e^2$ справедливо точное неравенство

$$|\alpha_0| \leqslant 2 - \frac{1}{4}e^2 r. \tag{3}$$

Равенство в (3) достигается только для функций $e^{-i\theta} f_\mu(e^{i\theta} z), \theta$ – вещественное, где функция $f_\mu(z)$ определяется следующим образом. Пусть T_μ – траектория квадратичного дифференциала

$$\frac{w-\mu}{w^2}dw^2, \quad \mu = e^2 r/4,$$

имеющая своими концами в обоих направлениях точку $w = \mu$. Функция $w = f_\mu(z)$ отображает область $|z| > 1$ на внешность кривой T_μ, возможно, с разрезом по отрезку вещественной оси с правым концом в точке μ.

Следуем схеме доказательства теоремы 7.3 [2].

Пусть U и $\widetilde{U}$ – соответственно круг $|z| < 1$ и область $|z| > 1$. Область $\widetilde{U}$ с разрезом по полуоси $z > 1$ является полосообразной областью для квадратичного дифференциала

$$q(z)dz^2 = \frac{(z-1)^2}{z^3}dz^2,$$

имеющего в $z = \infty$ полюс третьего порядка. Отображение

$$\zeta = \int\limits_1 z^{-3/2}(z-1)dz = 2z^{1/2} + 2z^{-1/2} - 4$$

переводит область $\widetilde{U}$ с указанным разрезом в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$, а окружность $|z| = 1$ – в отрезок $[-8, 0]$.

В соответствии с принципом Тейхмюллера, рассмотрим на w-сфере квадратичный дифференциал

$$Q(w)dw^2 = \frac{w-\mu}{w^2}dw^2, \quad \mu > 0. \tag{4}$$

В структуре траекторий этого дифференциала присутствуют круговая область D_0, ограниченная траекторией T_μ дифференуциала (3), имеющей концами в обеих направлениях точку $w = \mu$, $0 \in D_0$, и концевая область D_1, граница которой состоит из кривой T_μ и полупрямой $w > \mu$. Функция $\omega = \int\limits_\mu Q^{1/2}(w)dw$ отображает область D_1 на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$, при этом кривая T_μ переходит в отрезок $(-2\pi\mu^{1/2}, 0)$.

Имеем формулу

$$\omega = 2(w-\mu)^{1/2} - i\mu^{1/2}\log\frac{\mu^{1/2}-i(w-\mu)^{1/2}}{\mu^{1/2}+i(w-\mu)^{1/2}},$$

где $\sqrt{w-\mu} > 0$ при $w > \mu$ и значение логарифма выбрано надлежащим образом.

Пусть $\mu \leqslant 16/\pi^2$. Тогда $\pi\mu^{1/2} \leqslant 4$ и равенство

$$\omega + \pi\mu^{1/2} = \zeta + 4$$

определяет отображение $w = f_\mu(z)$ области $|z| > 1$ на область, ограниченную кривой T_μ и, возможно, разрезом по вещественной оси с началом в точке $w = \mu$,

$$f_\mu(z) = z + (2-\mu) + \text{ члены, содержащие степени } z^{-1}.$$

В окрестности начала имеем разложение

$$\omega = i\mu^{1/2}\log w - i\mu^{1/2}\log 4\mu + 2i\mu^{1/2} + \text{ члены, содержащие степени } w.$$

Равенство

$$i\mu^{1/2}\log z = \omega$$

определяет функцию $g_\mu(z)$, отображающую круг $|z| < 1$ на область $D_0, \quad g_\mu(0) = 0$. Для конформного радиуса r области D_0 имеем равенство

$$r = 4\mu e^{-2}. \tag{5}$$

Пусть теперь $f \in \Sigma$ и имеет разложение в бесконечности

$$f(z) = z + \alpha_0 + \text{члены, содержащие степени } z^{-1}.$$

Пусть $\Phi_\mu(w), \Psi_\mu(w)$ - функции, обратные к f_μ, g_μ, заданные соответственно на $f_\mu(\widetilde{U}), g_\mu(U)$. Будем считать, что дополнение к $f(\widetilde{U})$ имеет конформный радиус относительно начала, удовлетворяющий рассматриваемому условию. Обозначим через $g(0)$ функцию, отображающую круг U на эту область, причем $g(0) = 0, g'(0) = r$. Рассматривая при заданном вещественном θ вместо (4) квадратичный дифференциал

$$Q(w)dw^2 = e^{-i\theta}\,\frac{w-\mu e^{i\theta}}{w^2}dw^2$$

и принимая за допустимые области образы областей

$$e^{i\theta}f_\mu(\widetilde{U}), \quad e^{i\theta}g_\mu(U)$$

соответственно при отображениях

$$f(e^{i\theta}\Phi_\mu(e^{-i\theta}w)), \quad g(e^{i\theta}\Psi_\mu(e^{-i\theta}w)).$$

Учитывая разложение

$f(e^{i\theta}\Phi_\mu(e^{-i\theta}w)) = w + \alpha_0 - e^{i\theta}(2-\mu) +$ члены, содержащие степени w^{-1},

по теореме 1 и лемме 1, получаем неравенство

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}(a_0 - (2-\mu)) - \mu\log(g'_\mu(0)/g'(0))\right\} \leqslant 0,$$

что, в силу условия $g'_\mu(0) = g'(0)$ и равенства (5), означает (3). Из предыдущего доказательства следует также геометрическая характеристика экстремального отображения.

Замечание 4. Оценка $|\alpha_1|$ в классе $\Sigma(r)$ в [3] потребовала усиления приведенной выше леммы 1. Эта же оценка для $|\alpha_1|$ получена в [13, 14, 15] методом модулей в качестве предельных следствий. Сюита [16] указал теорему искажения для значений функции класса Σ в трех симметричных точках. Из аналога этой теоремы для функций класса $\Sigma(r)$ в качестве предельного следствия вытекает точное неравенство для $|\alpha_2|$ в указанном классе [14].

Литература

1. J. A.Jenkins, *A general coefficient theorem.* — Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 262–280.
2. J. A.Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping.* Ergeb. Math. Grenzgeb. (N.S.) Bd.18, Springer -Verlag, 1958; 2nd ed. corrected, 1965. Пер.на рус.яз. 1-го изд. Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформное отображение. М., 1962.
3. J. A.Jenkins, *An extension of the general coefficient theorem.* — Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 387–407.
4. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics.* — Ann. Math. (2) **65** (1957), 440–453.
5. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics.II.* — Tohoku Math. J. (2) **45** (1993), No.2, 249–257.
6. J. A. Jenkins, *On a problem of Gronvall.* — Ann. Math. (2) **59** (1954), 490–504.
7. J. A. Jenkins, *The method of the extremal metric. Handbook of complex analysis: geometric function theory*, Vol. 1, pp. 393–456, North-Holland, Amsterdam, 2002.
8. K. Strebel, *Quadratic differentials*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Bd. 5, Springer-Verlag, 1984.
9. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы.* — Труды Матем.ин-та АН СССР, **139** (1980), 1–243.
10. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11** (1999), вып. 1, 3–86.

11. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.
12. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. II.* — Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 5, 1–50.
13. А. Ю. Солынин, *Некоторые экстремальные задачи в классе* $\Sigma(\tau)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (191), 138–153.
14. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении и оценки коэффициентов в классе* $\Sigma(r)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 101–116.
15. Г. В. Кузьмина, *Метод модулей и экстремальные задачи в классе* $\Sigma(r)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **418** (2013), 136–152.
16. N. Suita, *A distortion theorem of univalent functions related to symmetric three points.* — Kodai Math. Sem. Rep. **14** (1962), 26–30.

Kuz'mina G. V. The general coefficient theorem of Jenkins and the method of modules of curve families.

The extention of the module method in the case of extremal problems of general type is discussed. For these problems, associated quadratic differentials have poles of higth order.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург, Россия
E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 10 ноября 2014 г.