Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

С. И. Калмыков

О НЕКОТОРЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ АНАЛОГАМИ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА

Введение

Хорошо известны представления полиномов Чебышева первого, второго, третьего и четвертого рода:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right), \tag{1}$$

$$U_n(z) = \frac{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{n+1} - \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{z^2-1}}, \tag{2}$$

$$V_n(z) = \frac{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}} + \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3}$$

$$W_n(z) = \frac{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}} - \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4}$$

соответственно [1]. Отметим, что полином T_n осуществляет полное n -кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [-1,1]$ областью $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus [-1,1]$, так как является суперпозицией обратной функции Жуковского, степенной функции и функции Жуковского, чем обусловлены многие его экстремальные свойства (см., например, [2,3]). Легко проверяемые тождества

$$2(z^2-1)U_n^2(z)+1 = T_{2n+2}(z), \tag{5}$$

$$(z+1)V_n^2(z)-1 = T_{2n+1}(z), \tag{6}$$

$$(z-1)W_n^2(z)+1 = T_{2n+1}(z), \tag{7}$$

Ключевые слова: рациональные функции, неравенства бернштейновского типа, полиномы Чебышева.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 14-11-00022).

показывают, что полиномы U_n, V_n, W_n являются экстремальными в классах многочленов с соответствующими весами на отрезке [-1,1] (см., например, [3, 5, 6]).

Аналоги полиномов Чебышева первого и второго рода в пространствах рациональных функций были рассмотрены в [7] (см. также [8, стр. 139–153]), а третьего и четвертого рода в [9]. Отметим, что в последней работе обобщение касается сохранения свойства ортогональности. Целью настоящей заметки является изучение свойств аналогов полиномов Чебышева второго, третьего и четвертого рода, которые имеют представления, подобные (2)–(4), и для которых справедливы тождества, близкие к (5)–(7). Преимущественно мы используем подход, предложенный Борвейном и Эрдейи [7]. В заключение, мы в частном случае приводим процесс ортогонализации рассматриваемых функций (ср. с [9]).

§1. Вспомогательные сведения

Пусть точки $a_k \subset \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, $k = 1, \ldots, n$, и невещественные числа a_k этой совокупности образуют сопряженные пары. Определим числа c_k, $k = 1, \ldots, n$, соотношениями

$$a_k := (c_k + c_k^{-1})/2, \quad |c_k| < 1, \ k = 1, \ldots, n,$$

так, что

$$c_k = a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где под корнем понимается подходящая ветвь.

В этом случае положительная величина

$$B_n(x) := \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k^2 - 1}}{a_k - x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |c_k|^2}{|\zeta - c_k|^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

$(x = (\zeta + 1/\zeta)/2)$, называется бернштейновским фактором.

Следуя [7], введем

$$M_n(\zeta) = \left(\prod_{k=1}^{n} (\zeta - c_k)(\zeta - \overline{c}_k) \right)^{1/2},$$

где ветвь квадратного корня выбрана таким образом, что функция $\zeta^n M_n(\zeta^{-1})$. является аналитической в некоторой окрестности замкнутого единичного круга, и пусть

$$f_n(\zeta) = \frac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M(\zeta^{-1})} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\zeta - c_k}{1 - \zeta c_k}.$$

Последнее равенство имеет место, так как по нашему предположению невещественные числа c_k также образуют комплексно сопряженные пары.

Борвейном и Эрдейи в [7] были введены следующие аналоги полиномов Чебышева первого и второго рода:

$$T_n^r(z) = \frac{1}{2}\left(f_n(\zeta) + f_n(\zeta)^{-1}\right), \tag{8}$$

$$U_n^r(z) = \frac{f_n(\zeta) - f_n(\zeta)^{-1}}{\zeta - \zeta^{-1}}, \tag{9}$$

где $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$. Легко видеть, что T_n^r, также как и T_n, осуществляет полное n -кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [-1,1]$ областью $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus [-1,1]$.

Далее нас будут интересовать произвольные рациональные функции

$$R_{m,n}(z) = \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{\prod_{k=1}^{n}(z - a_k)}, \tag{10}$$

где a_k, $k = 1, \ldots, n$, определены выше.

Борвейн и Эрдейи рассматривали случай с произвольными a_k (соответственно, c_k), но в несколько ином пространстве (см. [7,8]). Ими также рассмотрен случай всей вещественной оси вместо отрезка $[-1,1]$.

Следующее утверждение является частным случаем следствия 7.1.3 в [8] (см. также [10, стр. 74] и [11, теорема 5]).

Утверждение 1. *Для вещественной рациональной функции* $R(z) = R_{m,n}(z)$ *вида* (10), *удовлетворяющей условию*

$$|R(x)| \leqslant 1, \quad x \in [-1,1],$$

справедливо неравенство

$$|R'(x)|\sqrt{1-x^2} \leqslant [(m-n)_+ + B_n(x)]\sqrt{1-R^2(x)}, \quad x \in (-1,1).$$

Равенство в каждой точке отрезка $[-1,1]$ *достигается для* T_n^r.

В невещественном случае неравенство утверждения 1, а также неравенства в соответствующих теоремах, приведенных ниже, остаются верными, если убрать корни из правых частей этих неравенств, при этом равенства будут достигаться для указанных функций, но уже не во всех точках отрезка $[-1,1]$.

§2. Дифференциальные неравенства

Рассмотрим следующие функции:

$$\widetilde{U}_n^r(z)=\frac{\zeta f_n(\zeta)-(\zeta f_n(\zeta))^{-1}}{\zeta-\zeta^{-1}}=\frac{\zeta^2 f_n(\zeta)-f_n(\zeta)^{-1}}{\zeta^2-1}, \tag{11}$$

$$V_n^r(z)=\frac{\zeta^{1/2} f_n(\zeta)+\zeta^{-1/2} f_n(\zeta)^{-1}}{\zeta^{1/2}+\zeta^{-1/2}}=\frac{\zeta f_n(\zeta)+f_n(\zeta)^{-1}}{\zeta+1}, \tag{12}$$

$$W^r(z)=\frac{\zeta^{1/2} f_n(\zeta)-\zeta^{-1/2} f_n(\zeta)^{-1}}{\zeta^{1/2}-\zeta^{-1/2}}=\frac{\zeta f_n(\zeta)-f_n(\zeta)^{-1}}{\zeta-1}, \tag{13}$$

где $z=(\zeta+1/\zeta)/2$. Тот факт, что все эти функции являются рациональными, следует из симметричного расположения точек a_k (соответственно, c_k), элементарных свойств произведения Бляшке и принципа симметрии. Из этого рассуждения также следует, что все указанные функции имеют в точности полюсы в точках a_k, $k=1,\dots,n$.

Если все a_k в (11)–(13) устремить к бесконечности, то мы получаем полиномы Чебышева (2)–(4). Кроме того,

$$2(z^2-1)U_n^r(z)^2+1=\frac{1}{2}(f_n(\zeta)^2+f_n(\zeta)^{-2}), \tag{14}$$

$$2(z^2-1)\widetilde{U}_n^r(z)^2+1=\frac{1}{2}((\zeta f_n(\zeta))^2+(\zeta f_n(\zeta))^{-2}), \tag{15}$$

$$(z+1)V_n^r(z)^2-1=\frac{1}{2}(\zeta f_n(\zeta)^2+(\zeta f_n(\zeta)^2)^{-1}), \tag{16}$$

$$(z-1)W_n^r(z)^2+1=\frac{1}{2}(\zeta f_n(\zeta)^2+(\zeta f_n(\zeta)^2)^{-1}). \tag{17}$$

Теорема 1. *Для вещественной рациональной функции* $R(z)=R_{m,n}(z)$ *вида* (10), *удовлетворяющей условию*

$$|R(x)|\sqrt{1-x^2}\leqslant 1, \quad x\in[-1,1],$$

справедливо неравенство

$$|xR(x)-(1-x^2)R'(x)|\leqslant[(m-n+1)_+ +B_n(x)]\sqrt{1-(1-x^2)R^2(x)},$$

$x \in (-1, 1)$.

Равенство в каждой точке отрезка $[-1, 1]$ *достигается для* U_n^r *и* $\widetilde{U}_n^r$.

Доказательство. Достаточно применить неравенство утверждения 1 к функции $R_1(z) = 2(1 - z^2)R^2(z) - 1$. Альтернативное доказательство можно получить, используя теорему 5 работы [11] или следствие 2 работы [3]. Из последнего утверждения, а также равенств (14) и (15), следует указанный в теореме случай равенства. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. (ср. [8, стр. 337] и [12, лемма 3.1]) *Для вещественной рациональной функции* $R(z) = R_{m,n}(z)$ *вида* (10)*, удовлетворяющей условию*

$$|R(x)|\sqrt{1-x^2} \leqslant 1, \quad x \in [-1, 1],$$

справедливо неравенство

$$|R(x)| \leqslant [(m - n + 1)_+ + \widetilde{B}_n(x)], \quad x \in [-1, 1],$$

где

$$\widetilde{B}_n(x) := \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{a_k + x}{a_k - x}}.$$

Равенство достигается для U_n^r *и* $\widetilde{U}_n^r$ *в точке* $x = 1$.

Доказательство. Следуя работе [5, стр. 96], для заданной рациональной функции R, удовлетворяющей условию следствия, и фиксированного $x \in [-1, 1]$ рассмотрим рациональную функцию $Q_1(y) = R(xy)$. Поскольку для любого $y \in [-1, 1]$ выполняется

$$|Q_1(y)|\sqrt{1-y^2} \leqslant |R(xy)|\sqrt{1-(xy)^2} \leqslant 1,$$

то к рациональной функции Q применима предыдущая теорема. Остается заметить, что $R(x) = Q_1(1)$ и полюсами функции Q_1 являются точки a_k/x. Следствие доказано. $\square$

Теорема 2. *Для вещественной рациональной функции* $R(z) = R_{m,n}(z)$ *вида* (10)*, удовлетворяющей условию*

$$|R(x)|\sqrt{\frac{1+x}{2}} \leqslant 1, \quad x \in [-1, 1],$$

справедливо неравенство

$$|R(x) + 2(1+x)R'(x)|\sqrt{1-x} \leqslant [(2m-2n+1)_+ + 2B_n(x)]\sqrt{2-(1+x)R^2(x)},$$

$x \in (-1, 1)$.

Равенство в каждой точке отрезка $[-1, 1]$ *достигается для* V_n^r.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, достаточно рассмотреть функцию $R_2(z) = (z+1)R^2(z) - 1$ и применить к ней неравенство утверждения 1. Случай равенства следует из (16). Теорема доказана. □

Следствие 2. *Для вещественной рациональной функции* $R(z) = R_{m,n}(z)$ *вида* (10), *удовлетворяющей условию*

$$|R(x)|\sqrt{\frac{1+x}{2}} \leqslant 1, \quad x \in [-1, 1],$$

справедливо неравенство

$$|R(x)| \leqslant [(2m - 2n + 1)_+ + 2\widehat{B}_n(x)], \quad x \in [-1, 1],$$

где

$$\widehat{B}_n(x) := \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{a_k - 1}{a_k - x}}.$$

Равенство достигается для V_n^r *в точке* $x = -1$.

В этом случае следуя работе [6, стр. 175], для заданной рациональной функции R, удовлетворяющей условию следствия, и фиксированного $x \in [-1, 1]$ рассмотрим рациональную функцию

$$Q_2(y) = R\left(\frac{1-x}{2}y + \frac{x+1}{2}\right).$$

Поскольку для любого $y \in [-1, 1]$ справедливы неравенства

$$y \leqslant \frac{1-x}{2}y + \frac{x+1}{2} \quad \text{и} \quad \left|\frac{1-x}{2}y + \frac{x+1}{2}\right| \leqslant 1,$$

то

$$|Q(y)|\sqrt{1+y} \leqslant \left|R\left(\frac{1-x}{2}y + \frac{x+1}{2}\right)\right| \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{2}y + \frac{x+1}{2}\right)} \leqslant \sqrt{2}.$$

Теперь к рациональной функции Q применима предыдущая теорема. Остается заметить, что $R(x) = Q_2(-1)$ и полюсами функции Q_2 являются точки $(2a_k - 1 - x)/(1 - x)$. Следствие доказано.

Аналогично теоремам 1 и 2 доказывается

Теорема 3. *Для вещественной рациональной функции* $R(z)=R_{m,n}(z)$ *вида* (10), *удовлетворяющей условию*

$$|R(x)|\sqrt{\frac{1-x}{2}} \leqslant 1, \quad x\in[-1,1],$$

справедливо неравенство

$$|R(x)+2(1-x)R'(x)|\sqrt{1+x} \leqslant [(2m-2n+1)_+ + 2B_n(x)]\sqrt{2-(1-x)R^2(x)},$$

$x\in(-1,1)$.

Равенство в каждой точке отрезка $[-1,1]$ *достигается для* W_n^r.

Отметим, что все приведенные в работе до настоящего момента утверждения усилены или допускают усиление с использованием подхода, предложенного в [2] (см., например, [10,13]). Кроме того, в случае полиномов мы получаем ослабленные утверждения работ [2, 5, 6]. Из следствий 1 и 2 вытекают классическое неравенство Шура (см. [8, стр. 233] и [5, стр. 97]) и его аналог (см. [6, стр. 176]), соответственно.

§3. Ортогонализация $\widetilde{U}_n^r$, V_n^r и W_n^r

Лемма 1. *Пусть точки* $a_k \subset \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, $k=1,\dots,n$, *попарно различны. Тогда имеют место представления*

$$\widetilde{U}_n^r(z) = A_{0,n} + \frac{A_{1,n}}{z-a_1} + \dots + \frac{A_{n,n}}{z-a_n}, \tag{18}$$

$$V_n^r(z) = B_{0,n} + \frac{B_{1,n}}{z-a_1} + \dots + \frac{B_{n,n}}{z-a_n},$$

$$W_n^r(z) = C_{0,n} + \frac{C_{1,n}}{z-a_1} + \dots + \frac{C_{n,n}}{z-a_n},$$

где

$$A_{0,n} = B_{0,n} = C_{0,n} = (-1)^n c_1^{-1} c_2^{-1}\dots c_n^{-1},$$

$$A_{k,n} = \frac{1-c_k^{-2}}{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{1-c_kc_j}{c_k-c_j}, \quad k=1,\dots,n,$$

$$B_{k,n} = -\frac{(c_k-c_k^{-1})^2}{2(c_k+1)}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{1-c_kc_j}{c_k-c_j}, \quad k=1,\dots,n,$$

$$C_{k,n} = \frac{(c_k - c_k^{-1})^2}{2(c_k - 1)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{1 - c_k c_j}{c_k - c_j}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Найдем, например, коэффициенты $A_{0,n}$ и $A_{k,n}$, $k = 1, \ldots, n$. Имеем

$$\begin{aligned} A_{0,n} &= \lim_{z \to \infty} \widetilde{U}_n^r(z) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{\zeta^2 f_n(\zeta) - f_n(\zeta)^{-1}}{\zeta^2 - 1} \\ &= \lim_{\zeta \to 0} \frac{\zeta^2 \dfrac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} - \dfrac{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}{M_n(\zeta)}}{\zeta^2 - 1} = (-1)^n c_1^{-1} c_2^{-1} \ldots c_n^{-1}, \\ A_{k,n} &= \lim_{z \to a_k} (z - a_k) \widetilde{U}_n^r(z) \\ &= \lim_{\zeta \to c_k} \frac{1}{2} \frac{(\zeta - c_k)(1 - c_k^{-1}\zeta^{-1})}{\zeta^2 - 1} \left(\zeta^2 \frac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} - \frac{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}{M_n(\zeta)} \right) \\ &= \frac{1 - c_k^{-2}}{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{1 - c_k c_j}{c_k - c_j}. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты находятся тем же способом. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Справедливы следующие равенства*

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{U}_n^r(x) \widetilde{U}_m^r(x) \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} (-1)^{n+m} c_{m+1} \cdot \cdots \cdot c_n, \tag{19}$$

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{U}_n^r(x) \frac{1}{x - a} \sqrt{1 - x^2}\, dx = -\pi c \prod_{j=1}^{n} \frac{c - c_j}{1 - c c_j}, \tag{20}$$

где $a = \frac{1}{2}(c + c^{-1})$,

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{U}_n^r(x) \frac{1}{x - a_j} \sqrt{1 - x^2}\, dx = 0, \tag{21}$$

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{U}_n^r(x) \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} (-1)^n c_1 c_2 \cdot \cdots \cdot c_n. \tag{22}$$

Если множество индексов, по которым берется произведение, пусто, то считаем это произведение равным единице.

Доказательство. Обозначим через γ единичную окружность, а через γ^+ – ее верхнюю полуокружность. Тогда, делая подстановку $x = \frac{1}{2}(\zeta + 1/\zeta)$, легко проверяем, что

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{U}_n^r(x)\widetilde{U}_m^r(x)\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{\gamma^+}\left[\frac{\zeta M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} - \frac{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}{\zeta M_n(\zeta)}\right]\left[\frac{\zeta M_m(\zeta)}{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})} - \frac{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})}{\zeta M_m(\zeta)}\right]\frac{d\zeta}{i\zeta}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\frac{\zeta^2 M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}\frac{M_m(\zeta)}{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})} - \frac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}\frac{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})}{M_m(\zeta)}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{\zeta^2 M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}\frac{M_m(\zeta)}{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})} + \frac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}\frac{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})}{M_m(\zeta)}\right]\Bigg|_{\zeta=0}$$

$$= \frac{\pi}{2}(-1)^{n+m}c_{m+1}\cdot\dots\cdot c_n.$$

$$\int_{-1}^{1} \widetilde{U}_n^r(x)\frac{1}{x-a}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= -\int_{\gamma^+}\left[\frac{\zeta M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} - \frac{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}{\zeta M_n(\zeta)}\right]\frac{\zeta-\zeta^{-1}}{\zeta+\zeta^{-1}-c-c^{-1}}\frac{d\zeta}{2i\zeta}$$

$$= \frac{\pi}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\frac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} - \frac{\zeta^2 M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}\right]\frac{d\zeta}{(\zeta-c)(\zeta-c^{-1})}$$

$$\left[\frac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} - \frac{\zeta^2 M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}\right]\frac{\pi}{(\zeta-c^{-1})}\Bigg|_{\zeta=c}$$

$$= \pi\frac{1-c^2}{c-c^{-1}}\prod_{j=1}^{n}\frac{c-c_j}{1-cc_j} = -\pi c\prod_{j=1}^{n}\frac{c-c_j}{1-cc_j}.$$

Равенство (21) – частный случай (20), а (22) доказывается аналогично (19). Теорема доказана. □

Теорема 5. *Справедливы следующие равенства*

$$\int_{-1}^{1} V_n^r(x) V_m^r(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \pi (-1)^{n+m} c_{m+1} \cdot \dots \cdot c_n, \tag{23}$$

$$\int_{-1}^{1} V_n^r(x) \frac{1}{x-a} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = 2\pi \frac{c}{c-1} \prod_{j=1}^{n} \frac{c-c_j}{1-cc_j}, \tag{24}$$

где $a = \frac{1}{2}(c + c^{-1})$,

$$\int_{-1}^{1} V_n^r(x) \frac{1}{x-a_j} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = 0, \tag{25}$$

$$\int_{-1}^{1} V_n^r(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \pi (-1)^n c_1 c_2 \cdot \dots \cdot c_n. \tag{26}$$

Если множество индексов, по которым берется произведение в (24), *пусто, то считаем это произведение равным единице.*

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы обозначим через γ единичную окружность, а через γ^+ – ее верхнюю полуокружность. Тогда, делая подстановку $x = \frac{1}{2}(\zeta + 1/\zeta)$, легко проверяем, что

$$\int_{-1}^{1} V_n^r(x) V_m^r(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\gamma^+} \left[\frac{\zeta^{1/2} M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} + \frac{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}{\zeta^{1/2} M_n(\zeta)} \right] \left[\frac{\zeta^{1/2} M_m(\zeta)}{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})} + \frac{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})}{\zeta^{1/2} M_m(\zeta)} \right] \frac{d\zeta}{i\zeta}$$

$$= \pi \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{\zeta M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} \frac{M_m(\zeta)}{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})} + \frac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} \frac{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})}{M_m(\zeta)} \right] \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \pi \left[\frac{\zeta M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} \frac{M_m(\zeta)}{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})} + \frac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})} \frac{\zeta^m M_m(\zeta^{-1})}{M_m(\zeta)} \right] \Bigg|_{\zeta=0}$$

$$= \pi (-1)^{n+m} c_{m+1} \cdot \dots \cdot c_n.$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} V_n^r(x)\frac{1}{x-a}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx \\
&= \int_{\gamma^+}\left[\frac{\zeta^{1/2}M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}+\frac{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}{\zeta^{1/2}M_n(\zeta)}\right]\frac{\zeta^{1/2}+\zeta^{-1/2}}{\zeta+\zeta^{-1}-c-c^{-1}}\frac{d\zeta}{i\zeta} \\
&= \frac{2\pi}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\frac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}+\frac{\zeta M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}\right]\frac{d\zeta}{(\zeta-c)(\zeta-c^{-1})} \\
&= \left[\frac{M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}+\frac{\zeta M_n(\zeta)}{\zeta^n M_n(\zeta^{-1})}\right]\frac{2\pi}{(\zeta-c^{-1})}\bigg|_{\zeta=c} \\
&= 2\pi\frac{1+c}{c-c^{-1}}\prod_{j=1}^{n}\frac{c-c_j}{1-cc_j} = 2\pi\frac{c}{c-1}\prod_{j=1}^{n}\frac{c-c_j}{1-cc_j}.
\end{aligned}$$

Равенство (25) – частный случай (24), а (26) доказывается аналогично (23). Теорема доказана. □

Аналогично доказывается

Теорема 6. *Справедливы следующие равенства*

$$\int_{-1}^{1} W_n^r(x)W_m^r(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \pi(-1)^{n+m}c_{m+1}\cdot\dots\cdot c_n,$$

$$\int_{-1}^{1} W_n^r(x)\frac{1}{x-a}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = -2\pi\frac{c}{1+c}\prod_{j=1}^{n}\frac{c-c_j}{1-cc_j},$$

где $a=\frac{1}{2}(c+c^{-1})$,

$$\int_{-1}^{1} W_n^r(x)\frac{1}{x-a_j}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} V_n^r(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \pi(-1)^n c_1 c_2\cdot\dots\cdot c_n.$$

Для заданной последовательности различных точек $a_k \subset \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, $k = 1, \ldots$, определим

$$\widehat{V}_0^r(x) = 1, \quad \widehat{V}_n^r(x) = V_n^r(x) + c_n V_{n-1}^r(x), \quad n \geqslant 1, \tag{27}$$

и

$$V_0^{r*}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad V_n^{r*}(x) = \frac{1}{(\pi(1-c_n^2))^{1/2}}(V_n^r(x) + c_n V_{n-1}^r(x)). \tag{28}$$

Теорема 7. *Для* $n, m = 0, 1, 2\ldots$ *справедливо равенство*

$$\int_{-1}^{1} \widehat{V}_n^{r*}(x)\widehat{V}_m^{r*}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ *- символ Кронекера.*

Доказательство. Пусть $m \leqslant n$, тогда по теореме 5

$$\int_{-1}^{1} \widehat{V}_n^r(x)\frac{1}{x-a_j}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = 0, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

а также

$$\int_{-1}^{1} \widehat{V}_n^r(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int_{-1}^{1}(V_n^r(x) + c_n V_{n-1}^r(x))\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

$$= \pi(-1)^n c_1 c_2 \cdot \cdots \cdot c_n + c_n \pi(-1)^{n-1} c_1 c_2 \cdot \cdots \cdot c_{n-1} = 0.$$

Это в свою очередь влечет

$$\int_{-1}^{1} \widehat{V}_n^r(x)\widehat{V}_m^r(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = 0, \quad m < n.$$

Если $m = n$, то с учетом (23) получаем

$$\int_{-1}^{1} \widehat{V}_n^r(x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int_{-1}^{1} \widehat{V}_n^r(x)V_n^r(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(V_n^r(x) + c_n V_{n-1}^r(x))V_n^r(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \pi(1-c_n^2).$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 7 позволяет построить ортонормированную последовательность рациональных функций в пространстве с весом $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, порожденном функциями

$$\left\{1,\ \frac{1}{z-a_1},\ \frac{1}{z-a_2},\dots\right\}.$$

Подобную задачу в пространстве с весом $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, порожденном функциями

$$\left\{\frac{1}{z-a_1},\ \frac{1}{z-a_2},\dots\right\},$$

решает (с учетом леммы 1) последовательность

$$V_n^{r**}(x)=\frac{1}{(\pi(1-c_n^2))^{1/2}}(c_nV_n^r(x)+V_{n-1}^r(x)),\quad n\geqslant 1, \tag{29}$$

так как справедлива

Теорема 8. *Для* $n,m=1,2\dots$ *справедливо равенство*

$$\int_{-1}^{1}V_n^{r**}(x)V_m^{r**}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\delta_{n,m},$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $m\leqslant n$. Случай $m<n$ рассматривается также, как и при доказательстве теоремы 7. Если теперь $m=n$, то с учетом (23) получаем

$$\int_{-1}^{1}\widehat{V}_n^{r**}(x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\frac{1}{(\pi(1-c_n^2))^{1/2}}\int_{-1}^{1}\widehat{V}_n^{r**}(x)V_{n-1}^r(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi(1-c_n^2)}\int_{-1}^{1}(c_nV_n^r(x)+V_{n-1}^r(x))V_{n-1}^r(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=1.$$

Теорема доказана. □

В соответствующих пространствах с весом $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ последовательностями, аналогичными (27)-(29), служат последовательности

$$W_0^{r*}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad W_n^{r*}(x)=\frac{1}{(\pi(1-c_n^2))^{1/2}}(W_n^r(x)+c_nW_{n-1}^r(x))$$

и

$$W_n^{r**}(x) = \frac{1}{(\pi(1-c_n^2))^{1/2}}(c_n W_n^r(x) + W_{n-1}^r(x)), \quad n \geqslant 1,$$

а в пространствах с весом $\sqrt{1-x^2}$ –

$$\widetilde{U}_0^{r*}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \widetilde{U}_n^{r*}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1-c_n^2)}}(\widetilde{U}_n^r(x) + c_n \widetilde{U}_{n-1}^r(x))$$

и

$$\widetilde{U}_n^{r**}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1-c_n^2)}}(c_n \widetilde{U}_n^r(x) + \widetilde{U}_{n-1}^r(x)), \quad n \geqslant 1.$$

Литература

1. Я. Л. Геронимус, *Теория ортогональных многочленов.* М., ГИТТЛ. 1950.
2. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов.* — Алгебра и анализ **13**, No. 5 (2001), 16–43.
3. В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, *Принцип мажорации для мероморфных функций.* — Мат. сб. **198**, No. 12 (2007), 37–46.
4. С. И. Калмыков, *Принципы мажорации и некоторые неравенства для полиномов и рациональных функций с предписанными полюсами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 143–157.
5. В. Н. Дубинин, А. В. Олесов, *О применении конформных отображений к неравенстам для полиномов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 85–102.
6. В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, *Экстремальные свойства полиномов Чебышёва.* — Дальневост. мат. ж. **5**, No. 2 (2004), 169–177.
7. P. Borwein, T.Erdelyi, J. Zhang, *Chebyshev polynomials and Markovs–Bernstein type inequalities for rational spaces.* — J. London Math. Soc. **50**, No. 3 (1994), 501–519.
8. P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities.* New York, Springer-Verlag, 1995.
9. K. Deckers, J. Van Deun, A. Bultheel, *An extended relation between orthogonal rational functions on the unit circle and the interval* $[-1,1]$. — J. Math. Anal. Appl. **334**, No. 2 (2007), 1260–1275.
10. В. Н. Дубинин, *О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций.* — Изв. РАН. Сер. мат. **66**, No 2 (2002), 67–80.
11. А. Л. Лукашов, *Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках.* — Изв. РАН. Сер. мат. **68**, No 3 (2004), 115–138.
12. G. Min, *Inequalities for rational functions with prescribed poles.* — Can. J. Math. **50**, No. 1 (1998), 152–166.
13. А. В. Олесов, *Неравенства для полиномов и рациональных функций.* — Препринт No. 18. — ДВО РАН, Владивосток, Даль-наука ДВО РАН, 2004.

Kalmykov S. I. On some rational functions which are analogues of Chebyshev polynomials.

In this paper, rational functions, which are analogues of Chebyshev polynomials of the second, third and fourth kind, are considered. These rational functions are extremal in Bernstein type inequalities with corresponding weights. Orthogonalization of mentioned functions also is presented.

Институт прикладной математики ДВО РАН
Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7;
Дальневосточный федеральный университет
Россия, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8;
Bolyai Institute, University of Szeged,
Szeged, Aradi v. tere1, 6720, Hungary
E-mail: sergeykalmykov@inbox.ru

Поступило 1 августа 2014 г.