Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

В. Г. Журавлев

МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА НА ДВУЛИСТНОЙ НАКРЫВАЮЩЕЙ БУТЫЛКИ КЛЕЙНА

Введение

0.1. Множества ограниченного остатка. Пусть на компактном многообразии $\mathbb{M}$ задано отображение

$$\mathbb{M} \xrightarrow{\mathbb{S}} \mathbb{M},$$

и пусть

$$\operatorname{Orb}(\mathbf{x}_0, \mathbb{S}) = \quad \{\mathbf{x}_i = \mathbb{S}^i(\mathbf{x}_0); \quad i = 0, 1, 2, \dots\} \tag{0.1}$$

– орбита некоторой начальной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{M}$ относительно отображения $\mathbb{S}$. Для произвольного множества $\mathbb{X} \subset \mathbb{M}$ функция распределения определяется равенством

$$\mathbf{r}_{\mathbb{X}}(i, \mathbf{x}_0) = \quad \sharp\{j; \quad \mathbb{S}^j(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{X}; \quad 0 \leqslant j < i\}, \tag{0.2}$$

а отвечающая ей функция отклонения – это разность

$$\delta_{\mathbb{X}}(i, \mathbf{x}_0) = \mathbf{r}_{\mathbb{X}}(i, \mathbf{x}_0) - ia(\mathbb{X}), \tag{0.3}$$

где константа $a(\mathbb{X}) \geqslant 0$ зависит только от множества $\mathbb{X}$. Тогда $\mathbb{X}$ называется *множеством ограниченного остатка* или *BR-множеством* (bounded remainder set) относительно орбиты (0.1), если найдутся такие константы $a(\mathbb{X})$ и $c(\mathbb{X}, \mathbf{x}_0)$, что для функции отклонения (0.3) будет выполняться неравенство

$$|\delta_{\mathbb{X}}(i, \mathbf{x}_0)| \leqslant c(\mathbb{X}, \mathbf{x}_0) \tag{0.4}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

Ключевые слова: множества ограниченного остатка, накрывающая бутылки Клейна, многомерная теорема Гекке.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант No. 14-11-00433.

0.2. Торические множества ограниченного остатка. Достаточно хорошо понята структура множеств ограниченного остатка $\mathbb{X}$ на торах $\mathbb{M} = \mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$ произвольных размерностей D [1–7]. Более того, в настоящее время после продолжительной перерыва [8–11], на фоне широкого проникновения квазирешеток и квазикристаллов в различные разделы математики и физики, стали появляться новые идеи и возродился интерес к изучению многомерных торических множеств ограниченного остатка (см. [6, 7]).

Так, например, в [2–5] разработан общий метод построения таких множеств $\mathbb{X}$. Суть метода состоит в следующем: выделен класс

$$\Pi = \quad \{\mathcal{P}_\xi^{D_\xi}; \quad \xi \in \Xi\} \tag{0.5}$$

в некотором смысле элементарных множеств ограниченного остатка $\mathcal{P}_\xi^{D_\xi}$ и из них строятся уже более сложные составные множества $\mathbb{X}$.

Относительно $\mathcal{P}_\xi^{D_\xi}$ скажем, что – это многогранники ограниченного остатка, являющиеся выпуклыми и невыпуклыми параллелоэдрами и допускающие непрерывные деформации [2, 4]. В малых размерностях $D = 1, 2, 3, 4$ примерами таких элементарных многогранников $\mathcal{P}^D$ являются: отрезки Гекке [12, 13], параллелограмы Сюза [8] и гексагоны с попарно параллельными сторонами [14], ромбо-додекаэдр Федорова [15], параллелоэдры Вороного [16] и др.

Что же касается способа получения составных множеств $\mathbb{X}$, то с этой целью в [2] было введено скрещенное произведение ($\otimes_i$-произведение) – некоммутативная и неассоциативная операция, зависящая от целого индекса i. С помощью данного произведения из двух BR-множеств $\mathbb{X}^{D_1} \subset \mathbb{T}^{D_1}$ и $\mathbb{X}^{D_2} \subset \mathbb{T}^{D_2}$ можно строить новые множества $\mathbb{X}^D = \mathbb{X}^{D_1} \otimes_i \mathbb{X}^{D_2}$ на торе $\mathbb{T}^D$ размерности $D = D_1 + D_2$, которые снова являются BR-множествами. При этом важно отметить, что константа $c(\mathbb{X}^D, \mathbf{x}_0)$ в неравенстве (0.4) для произведения $\mathbb{X}^D$ явно вычисляется через соответствующие константы исходных множеств $\mathbb{X}^{D_1}$ и $\mathbb{X}^{D_2}$. Применяя несколько раз операции $\otimes_i$-произведения, будем получать все более сложные композиционные BR-множества

$$\mathbb{X}^D = \mathcal{P}_1^{D_1} \otimes_{i_1} \mathcal{P}_2^{D_2} \otimes_{i_2} \cdots \otimes_{i_{k-1}} \mathcal{P}_k^{D_k} \tag{0.6}$$

из элементарных BR-многогранников $\mathcal{P}_k^{D_j}$, принадлежащих классу Π из (0.5). Сами же многогранники $\mathcal{P}_k^{D_j}$ не разлагаются в произведение вида (0.6).

0.3. Накрывающая бутылки Клейна $\mathbb{K}^2$. Естественно возникает вопрос о построении BR-множеств на других многообразиях $\mathbb{M}$, отличных от торов $\mathbb{T}^D$. В настоящей работе в качестве $\mathbb{M}$ выбрана поверхность Клейна $\mathbb{K}^2$, для которой в литературе более часто используется название – бутылка Клейна. Будучи вложенной в пространство $\mathbb{R}^4$, поверхность $\mathbb{K}^2$ не имеет самопересечений. В отличие от двумерного тора $\mathbb{T}^2$, это – компактная односторонняя поверхность. Однако, если вырезать малую окрестность $U_{\mathbf{x}}$ любой точки $\mathbf{x}$ на $\mathbb{K}^2$, то $U_{\mathbf{x}}$ будет двусторонней поверхностью. Таким образом, при раскраске сторон окрестности $U_{\mathbf{x}}$ сама точка $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}}$ может иметь разный цвет.

Чтобы избежать указанной двойственности, будем рассматривать не саму поверхность $\mathbb{K}^2$, а ее двулистную накрывающую $\widetilde{\mathbb{K}}^2 = \mathbb{K}^2 \times \{\pm 1\}$. На накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ будет задан сдвиг $\widetilde{\mathbb{S}} : \widetilde{\mathbb{K}}^2 \longrightarrow \widetilde{\mathbb{K}}^2$ и некоторым образом определена раскраска $\widetilde{\mathbb{K}}^2 = \widetilde{\mathbb{K}}^2_0 \sqcup \widetilde{\mathbb{K}}^2_1$ ее точек $\widetilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \varepsilon)$ в два цвета $\mathrm{col}(\widetilde{\mathbf{x}}) = k$, где $k = 0$ или 1. Аналогично (0.2) для отображения $\widetilde{\mathbb{S}}$ определяются функции распределения

$$\widetilde{\mathbf{r}}_k(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0) = \quad \sharp\{j; \quad \widetilde{\mathbb{S}}^j(\widetilde{\mathbf{x}}_0) \in \widetilde{\mathbb{K}}^2_k; \quad 0 \leqslant j < i\}, \tag{0.7}$$

равные количеству точек $\widetilde{\mathbf{x}}_j = \widetilde{\mathbb{S}}^j(\widetilde{\mathbf{x}}_0)$ для $0 \leqslant j < i$ из орбиты $\mathrm{Orb}(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \widetilde{\mathbb{S}})$, имеющих цвет $\mathrm{col}(\widetilde{\mathbf{x}}) = k$, где $k = 0, 1$. Тогда функции отклонения (0.3) на накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$, соответствующие функциям распределения (0.7), примут вид

$$\widetilde{\delta}_k(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0) = \widetilde{\mathbf{r}}_k(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0) - i a_k \tag{0.8}$$

с коэффициентами $a_0 = 1 - \alpha$ и $a_1 = \alpha$, зависящими от некоторого пареметра $0 < \alpha < 1$, входящего в определение сдвига $\widetilde{\mathbb{S}}$.

Основной результат работы содержится в **теореме 7.1**, где доказано, что отклонения (0.8) удовлетворяют следующим неравенствам

$$\begin{aligned} m - x_0 \leqslant \widetilde{\delta}_0(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0) \leqslant M - x_0, \\ x_0 - M \leqslant \widetilde{\delta}_1(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0) \leqslant x_0 - m \end{aligned} \tag{0.9}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ Здесь в (0.9) через m и M обозначены границы некоторой области $\widetilde{T}(W)$, содержащейся в накрывающей плоскости $\mathbb{R}^2 \times \{\pm 1\}$ и задающей раскраску $\widetilde{\mathbb{K}}^2 = \widetilde{\mathbb{K}}^2_0 \sqcup \widetilde{\mathbb{K}}^2_1$ накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$, а x_0 означает проекцию на вещественную прямую $\mathbb{R}$ начальной точки $\widetilde{\mathbf{x}}_0$ орбиты $\mathrm{Orb}(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \widetilde{\mathbb{S}})$ из $\widetilde{\mathbb{K}}^2$.

§1. Двулистная накрывающая бутылки Клейна

1.1. Бутылка Клейна $\mathbb{K}^2$. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[2e_1, e_2] \tag{1.1}$$

– двумерная решетка на плоскости $\mathbb{R}^2$ с базисными векторами $2e_1 = (2,0)$ и $e_2 = (0,1)$, и пусть

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^2 : \quad (x, x') \mapsto (x+1, -x') \tag{1.2}$$

– скользящая симметрия на плоскости $\mathbb{R}^2$. Она удовлетворяет свойству

$$\iota^2 = g(2e_1), \tag{1.3}$$

где $g(2e_1)$ обозначает параллельный сдвиг плоскости $\mathbb{R}^2$ на вектор $2e_1$.

Кроме решетки L, рассмотрим еще группу $\Gamma = \langle L, \iota \rangle$, действующую на плоскости $\mathbb{R}^2$ и порождаемую группой параллельных сдвигов L и симметрией ι. Из определения следует, что данная группа порождается тремя элементами $\Gamma = \langle g(2e_1), g(e_2), \iota \rangle$, а в силу соотношения (1.3) число порождающих можно уменьшить до двух

$$\Gamma = \langle \iota, g(e_2) \rangle \tag{1.4}$$

– скользящей симметрии ι и сдвига $g(e_2)$, причем эти образующие связаны коммутативным соотношением

$$g(e_2) \circ \iota = \iota \circ g(-e_2).$$

Бутылка Клейна $\mathbb{K}^2$ определяется как фактор-пространство

$$\mathbb{K}^2 = \mathbb{R}^2 / \Gamma \tag{1.5}$$

по группе (1.4). Рассмотрим *фундаментальную область* $K^2 \subset \mathbb{R}^2$ относительно группы Γ. Каноническое отображение

$$K^2 \overset{\operatorname{mod}\Gamma}{\longrightarrow} \mathbb{K}^2 : \quad \widehat{x} \mapsto \widehat{x} \cdot \Gamma \tag{1.6}$$

задает биекцию между фундаментальной областью K^2 и бутылкой Клейна $\mathbb{K}^2$. В качестве фундаментальной области K^2 выберем квадрат с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, горизонтальные стороны которого одинаково направлены, а вертикальные – разнонаправлены. При этом будем полагать, что отвечающие векторам e_1 и e_2 стороны квадрата принадлежат области K^2. После склейки сторон квадрата $K^2 \operatorname{mod}\Gamma$ получается компактная односторонняя поверхность – бутылка Клейна. Вложенная в $\mathbb{R}^4$, поверхность $K^2 \operatorname{mod}\Gamma$ не имеет самопересечений.

1.2. Двулистная накрывающая бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$. Пусть T^2 – развертка тора $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, где $\mathbb{Z}^2=\mathbb{Z}[e_1,e_1]$ – квадратная решетка. Так же, как для развертки бутылки Клейна K^2, в качестве T^2 выберем единичный квадрат, противоположные стороны которого теперь уже одинаково направлены. При этом снова будем полагать, что отвечающие векторам e_1 и e_2 стороны квадрата принадлежат развертке T^2. После склейки сторон квадрата $T^2 \bmod \mathbb{Z}^2$ получается двумерный тор $\mathbb{T}^2$, являющийся двусторонней поверхностью.

В дополнение к тору $\mathbb{T}^2$ рассмотрим *удвоенный тор* $\mathbb{T}^2_\pm=\mathbb{R}^2/L$, где L – решетка (1.1). В качестве развертки $T^2_\pm$ тора $\mathbb{T}^2_\pm$ выберем объединение

$$T^2_\pm = T^2_+ \sqcup T^2_-, \tag{1.7}$$

составленное из единичного квадрата $T^2_+=T^2$ и симметричного ему квадрата

$$T^2_- = g(e_2)\circ\iota\,(T^2_+)=\iota(T^2_+)+e_2,$$

примыкающего справа к T^2_+. Пусть

$$\widetilde{\mathbb{K}}^2 = \quad \{(\mathbf{x},\varepsilon);\quad \mathbf{x}\in\mathbb{K}^2,\varepsilon=\pm1\} = \quad \mathbb{K}^2\times E \tag{1.8}$$

– *двулистная накрывающая* бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$, где $E=\{\pm1\}$, и пусть

$$\widetilde{K}^2 = \quad \{(\widehat{x},\varepsilon);\quad \widehat{x}\in K^2,\varepsilon=\pm1\} = \quad K^2\times E \tag{1.9}$$

– фундаментальная область для накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$. Каноническое отображение (1.6) можно поднять до биекции

$$\widetilde{K}^2 \overset{\widetilde{\mathbf{mod}}\,\Gamma}{\longrightarrow} \widetilde{\mathbb{K}}^2:\quad (\widehat{x},\varepsilon)\mapsto(\widehat{x}\cdot\Gamma,\varepsilon) \tag{1.10}$$

соответствующих накрытий.

Предложение 1.1. *Отображение*

$$\sigma:\widetilde{K}^2\longrightarrow T^2_\pm, \tag{1.11}$$

определяемое условиями

$$\sigma:\begin{cases}(\widehat{x},+1)\mapsto\widehat{x},\\ (\widehat{x},-1)\mapsto g(e_2)\circ\iota\,(\widehat{x})= \quad \iota(\widehat{x})+e_2,\end{cases}$$

задает биекцию между фундаментальной областью $\widetilde{K}^2$ для накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ и разверткой $T^2_\pm$ тора $\mathbb{T}^2_\pm$, определенных соответственно в (1.9) *и* (1.7).

Доказательство вытекает из определений (1.6) и (1.7). □

В силу предложения 1.1 развертку $T^2_\pm \subset \mathbb{R}^2$ тора $\mathbb{T}^2_\pm$ можно рассматривать, как модель двулистного накрытия $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ бутылки Клейна $\mathbb{K}^2$ вместо фундаментальной области $\widetilde{K}^2$ из (1.9).

§2. Накрытие полосы $\widetilde{\mathbb{R}}$ и отображение $\widetilde{S}(W)$

2.1. Склейка. В бесконечной полосе

$$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times I, \tag{2.1}$$

где $I = [0, 1)$ – единичный полуинтервал, выделим прямоугольник

$$\widehat{W} = W \times I \tag{2.2}$$

с основанием $W = [w_0, w_1)$, являющимся произвольным полуинтервалом, содержащим некоторую фиксированную точку ω. Пусть прямоугольник $\widehat{W}$ разбит каким-то образом на два множества

$$\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1. \tag{2.3}$$

Прямоугольник $\widehat{W} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ будем называть *склейкой*, а разбиение (2.3) – *раскраской* склейки, указывающей на то, что точки $\widehat{x}$ из $\widehat{W}$ могут иметь два цвета $\mathrm{col}(\widehat{x}) = 0$ или $\mathrm{col}(\widehat{x}) = 1$ для $\widehat{x} \in \widehat{W}_0$ или $\widehat{x} \in \widehat{W}_1$ соответственно. Склейка $\widehat{W}$ вместе с ее разбиением (2.3) будут выступать в роли *возмущения* для рассматриваемых далее отображений, действующих на двулистном накрытии полосы $\widetilde{\mathbb{R}} = \widehat{\mathbb{R}} \times E$ полосы $\widehat{\mathbb{R}}$.

2.2. Раскраска полосы $\widehat{\mathbb{R}}$. На множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ зададим разбиение

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_0 \sqcup \mathbb{R}_1 \tag{2.4}$$

на два полуинтервала $\mathbb{R}_0 = [-\infty, \omega)$, $\mathbb{R}_1 = [\omega, +\infty,)$, где сечение $\omega \in \mathbb{R}$ – отмеченная точка полуинтервала W из (2.2). Используя раскраску (2.3) склейки $\widehat{W}$, зададим *раскраску* полосы $\widehat{\mathbb{R}}$, разбивая ее

$$\widehat{\mathbb{R}} = \widehat{\mathbb{R}}_0 \sqcup \widehat{\mathbb{R}}_1 \tag{2.5}$$

на множества

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{R}}_0 &= \quad (\mathbb{R}_0 \setminus W) \times I \quad \cup \quad \widehat{W}_0, \\ \widehat{\mathbb{R}}_1 &= \quad (\mathbb{R}_1 \setminus W) \times I \quad \cup \quad \widehat{W}_1. \end{aligned}$$

Будем говорить, что точки $\widehat{x}$ из $\widehat{\mathbb{R}}_k$, $k = 0, 1$, имеют цвет $\mathrm{col}(\widehat{x}) = k$.

2.3. Отображение $\widetilde{S}(W)$. Введем следующие обозначения

$$\widehat{x} = (x, x') \in \widehat{\mathbb{R}}, \quad \widetilde{x} = (\widehat{x}; \varepsilon) \in \widetilde{\mathbb{R}} \tag{2.6}$$

и определим отображение

$$\widetilde{S}(W): \quad \widetilde{\mathbb{R}} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}, \tag{2.7}$$

зависящее от некоторого параметра $\alpha \in I$.

Случай 1. Если α удовлетворяет условию

$$0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2.8}$$

то отображение (2.7) задается следующим образом.

Для $\varepsilon = +1$:

$$\begin{array}{lcll} ((x,x');+1) & \mapsto & ((x+v_0, x'+\alpha' \bmod \mathbb{Z}); +1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0, \\ ((x,x');+1) & \mapsto & ((x+v_1, \iota'(x'+\alpha') \bmod \mathbb{Z}); -1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1, \end{array} \tag{2.9}$$

где

$$v_0 = \alpha, \quad v_1 = \alpha - 1 \tag{2.10}$$

– сдвиги первой координаты в (2.9) и

$$I \xrightarrow{\iota'} I: \quad x' \mapsto -x' \bmod \mathbb{Z} \tag{2.11}$$

– инволюция, являющаяся биекцией на полуинтервале I.

Для $\varepsilon = -1$:

$$\begin{array}{lcll} ((x,x');-1) & \mapsto & ((x+v_0, x'-\alpha' \bmod \mathbb{Z}); -1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0, \\ ((x,x');-1) & \mapsto & ((x+v_1, \iota'(x'-\alpha') \bmod \mathbb{Z}); +1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1. \end{array} \tag{2.12}$$

Случай 2. В случае, если α удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1, \tag{2.13}$$

определение отображения (2.7) несколько модифицируется.

Для $\varepsilon = +1$:

$$\begin{array}{lcll} ((x,x');+1) & \mapsto & ((x+v_0, \iota(x'+\alpha') \bmod \mathbb{Z}); -1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1, \\ ((x,x');+1) & \mapsto & ((x+v_1, x'+\alpha' \bmod \mathbb{Z}); +1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0. \end{array} \tag{2.14}$$

Для $\varepsilon = -1$:

$$
\begin{array}{lll}
((x,x');-1) & \mapsto & ((x+v_0, \iota(x'-\alpha') \bmod \mathbb{Z}); +1), \quad \text{если} \ \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1, \\
((x,x');-1) & \mapsto & ((x+v_1, x'-\alpha' \bmod \mathbb{Z}); -1), \quad \text{если} \ \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0.
\end{array} \tag{2.15}
$$

Замечание 2.1. Второй случай (2.13) симметричен первому (2.8). Формулы (2.14), (2.15) получаются из формул (2.9), (2.12), если сделать перестановку

$$\alpha \leftrightarrows 1-\alpha, \quad \widehat{\mathbb{R}}_0 \leftrightarrows \widehat{\mathbb{R}}_1.$$

§3. Стабилизатор отображения $\widetilde{S}(W)$

3.1. Листы и раскраска подмножеств из $\widetilde{\mathbb{R}}$. Любое подмножество $\widetilde{X} \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ состоит из *листов*

$$\widetilde{X}_+ = \widetilde{\mathbb{R}}_+ \cap \widetilde{X}, \quad \widetilde{X}_- = \widetilde{\mathbb{R}}_- \cap \widetilde{X}, \tag{3.1}$$

где

$$
\begin{array}{l}
\widetilde{\mathbb{R}}_+ = \{\widetilde{x} = (\widehat{x};\varepsilon) \in \widetilde{\mathbb{R}}; \varepsilon = +1\}, \\
\widetilde{\mathbb{R}}_- = \{\widetilde{x} = (\widehat{x};\varepsilon) \in \widetilde{\mathbb{R}}; \varepsilon = -1\}
\end{array} \tag{3.2}
$$

– листы из накрывающей $\widetilde{\mathbb{R}}$ полосы $\widehat{\mathbb{R}}$. Перенесем раскраску полосы $\widehat{\mathbb{R}} = \widehat{\mathbb{R}}_0 \sqcup \widehat{\mathbb{R}}_1$, определенную в (2.5), на ее накрывающую $\widetilde{\mathbb{R}}$ и затем – на произвольные подмножества $\widetilde{X} \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$, полагая

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \widetilde{\mathbb{R}}_0 \sqcup \widetilde{\mathbb{R}}_0, \tag{3.3}$$

при этом

$$\widetilde{\mathbb{R}}_0 = \widehat{\mathbb{R}}_0 \times E, \quad \widetilde{\mathbb{R}}_1 = \widehat{\mathbb{R}}_1 \times E;$$

и

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}_0 \sqcup \widetilde{X}_1, \tag{3.4}$$

где

$$\widetilde{X}_0 = \widetilde{\mathbb{R}}_0 \cap \widetilde{X}, \quad \widetilde{X}_1 = \widetilde{\mathbb{R}}_1 \cap \widetilde{X}. \tag{3.5}$$

Комбинируя определения (3.1) и (3.5), получаем из $\widetilde{X}$ еще четыре новые множества

$$\widetilde{X}_{\pm,0} = \widetilde{X}_\pm \cap \widetilde{X}_0, \quad \widetilde{X}_{\pm,1} = \widetilde{X}_\pm \cap \widetilde{X}_1. \tag{3.6}$$

3.2. Стабилизатор $\widetilde{T}(W)$. Выделим в накрывающей полосы $\widetilde{\mathbb{R}}$ следующее подмножество

$$\widetilde{T}(W)=\widetilde{T}(W)_{+}\sqcup\widetilde{T}(W)_{-}, \tag{3.7}$$

где

$$\widetilde{T}(W)_{\pm}=\widetilde{S}(W)(\widetilde{\mathbb{R}}_{\pm,0})\cap\widetilde{S}(W)(\widetilde{\mathbb{R}}_{\pm,1}) \tag{3.8}$$

и множества $\widetilde{\mathbb{R}}_{\pm,0}$ и $\widetilde{\mathbb{R}}_{\pm,1}$ определены в (3.6). С помощью операции (3.4) перенесем на множество $\widetilde{T}(W)\subset\widetilde{\mathbb{R}}$ раскраску (3.3), полагая

$$\widetilde{T}(W)=\widetilde{T}(W)_{0}\sqcup\widetilde{T}(W)_{1}. \tag{3.9}$$

Заметим, что (3.9) – в точности разбиение множества $\widetilde{T}(W)$ на две области $\widetilde{T}(W)_0$ и $\widetilde{T}(W)_1$, окрашенные в 0- и 1-цвет соответственно.

Далее нам, кроме (3.9), для доказательства предложениея 3.1 потребуется еще одно дополнительное разбиение множества $\widetilde{T}(W)$ вида

$$\widetilde{T}(W)=\widetilde{T}(W)_{l}\sqcup\widetilde{T}(W)_{c}\sqcup\widetilde{T}(W)_{r} \tag{3.10}$$

на области

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(W)_l&=\widetilde{T}(W)\cap([w_0+v_1,w_1+v_1)\times I)\times E,\\
\widetilde{T}(W)_c&=([w_1+v_1,w_0+v_0)\times I)\times E,\\
\widetilde{T}(W)_r&=\widetilde{T}(W)\cap([w_0+v_0,w_1+v_0)\times I)\times E.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Сгруппируем разбиение (3.10) в виде

$$\widetilde{T}(W)=\widetilde{T}(W)_{\mathrm{st}}\sqcup\widetilde{T}(W)_{\mathrm{var}}, \tag{3.12}$$

где $\widetilde{T}(W)_{\mathrm{st}}=\widetilde{T}(W)_c$ и $\widetilde{T}(W)_{\mathrm{var}}=\widetilde{T}(W)_l\sqcup\widetilde{T}(W)_r$ – соответственно *стационарное* и *переменное* множества. Первое множество $\widetilde{T}(W)_{\mathrm{st}}$ – это центральная область из $\widetilde{T}(W)$, представляющее собою накрытие прямоугольника. Его размеры и положение в накрывающей полосы $\widetilde{\mathbb{R}}$ не зависят от выбора отображения $\widetilde{S}(W)$ из (2.7). Наоборот, множество $\widetilde{T}(W)_{\mathrm{var}}$ полностью формируется отображением $\widetilde{S}(W)$. Обратим внимание на то, что раскраска обоих множеств $\widetilde{T}(W)_{\mathrm{st}}$ и $\widetilde{T}(W)_{\mathrm{var}}$ естественно зависит от раскраски или возмущения (2.3) склейки $\widehat{W}$.

Предложение 3.1. *Пусть* $\widetilde{S}(W)$ *– отображение* (2.7), *и пусть* $\widetilde{T}(W)\subset\widetilde{\mathbb{R}}$ *– подмножество, определенное в* (3.7). *Предположим, что выполнено условие*

$$|W|<\min\{|v_0|,|v_1|\}, \tag{3.13}$$

где $|W|$ – длина интервала W из (2.2). *Тогда подмножество $\widetilde{T}(W)$ замкнуто относительно отображения $\widetilde{S}(W)$:*

$$\widetilde{S}(W):\widetilde{T}(W)\longrightarrow\widetilde{T}(W). \tag{3.14}$$

Доказательство. Обозначим $\widetilde{W}=\widehat{W}\times E$ накрытие для склейки $\widehat{W}$, определенной в (2.2). Из (3.10) и определения (3.7) множества $\widetilde{T}(W)$ вытекают включения

$$\widetilde{S}(W)(\widetilde{T}(W)_c\setminus\widetilde{W})\subset\widetilde{T}(W)_c,\quad \widetilde{S}(W)(\widetilde{W}))\subset\widetilde{T}(W)_l\cup\widetilde{T}(W)_r$$

и, следовательно, можем записать

$$\widetilde{S}(W)(\widetilde{T}(W)_c)\subset\widehat{T}. \tag{3.15}$$

Из условия (3.13) и снова из (3.10) получаем еще два включения

$$\widetilde{S}(W)(\widetilde{T}(W)_l)\subset\widetilde{T}(W)_c,\quad \widetilde{S}(W)(\widetilde{T}(W)_r)\subset\widetilde{T}(W)_c,$$

из которых заключаем, что

$$\widetilde{S}(W)(\widetilde{T}(W)_l)\subset\widetilde{T}(W),\quad \widetilde{S}(W)(\widetilde{T}(W)_r)\subset\widetilde{T}(W), \tag{3.16}$$

так как по определению (3.10) и (3.11) имеем $\widetilde{T}(W)_c\subset\widetilde{T}(W)$. Теперь замкнутость (3.14) множества $\widetilde{T}(W)$ относительно действия отображения $\widetilde{S}(W)$ следует из включений (3.15) и (3.16). □

§4. Изоморфизм

4.1. Возмущенная развертка удвоенного тора $\mathbb{T}^2_{\pm}$. Пусть $\widetilde{T}(W)\subset\widetilde{\mathbb{R}}$ – стабилизатор (3.7) отображения $\widetilde{S}(W)$ и $\widetilde{T}(W)_+$, $\widetilde{T}(W)_-$ – его возмущенные листы (3.9). Определим проекцию

$$\widetilde{\mathbb{R}}\xrightarrow{\mathrm{pr}}\widehat{\mathbb{R}}:\quad \widetilde{x}=(\widehat{x},\varepsilon)\mapsto\widehat{x} \tag{4.1}$$

накрывающей $\widetilde{\mathbb{R}}=\widehat{\mathbb{R}}\times E$ на полосу $\widehat{\mathbb{R}}$. Далее, рассмотрим проекции

$$T(W)_+=\mathrm{pr}\,\widetilde{T}(W)_+,\quad T(W)_-=\mathrm{pr}\,\widetilde{T}(W)_- \tag{4.2}$$

листов $\widetilde{T}(W)_+$, $\widetilde{T}(W)_-$ на полосу $\widehat{\mathbb{R}}$ и склеим их проекции

$$T^2(W)_{\pm}=T^2(W)_+\sqcup T^2(W)_-, \tag{4.3}$$

состоящие из двух непересекающихся частей $T^2(W)_+$ и $T^2(W)_-$, имеющих вид

$$\begin{array}{rll} T^2(W)_+= & T(W)_+, & \\ T^2(W)_-= & g(e_2)\circ\iota\,(T(W)_-)= & \iota(T(W)_-)+e_2, \end{array} \tag{4.4}$$

где ι – скользящая симметрия (1.2) плоскости $\mathbb{R}^2$ и $g(e_2)$ – параллельный сдвиг плоскости на вектор $e_2 = (0,1)$.

Для доказательства следующего результата нам потребуется еще биекция

$$\widetilde{T}(W) \quad \xrightarrow{\pi} \quad T^2(W)_{\pm}, \tag{4.5}$$

где полагаем

$$\begin{array}{lcl} \widetilde{T}(W)_+ & \xrightarrow{\pi} & T^2(W)_+ : \quad (\widehat{x};+1) \mapsto \widehat{x}, \\ \widetilde{T}(W)_- & \xrightarrow{\pi} & T^2(W)_- : \quad (\widehat{x};-1) \mapsto g(e_2)\circ\iota\,(\widehat{x}) = \quad \iota(\widehat{x}) + e_2. \end{array} \tag{4.6}$$

Лемма 4.1. *Определенное в* (4.3) *множество* $T^2(W)_{\pm}$ *представляет собою разбиение на составляющие* $T^2(W)_+$ *и* $T^2(W)_-$. *Данное множество является фундаментальной областью* $T^2(W)_{\pm} \subset \mathbb{R}^2$ *решетки* $L = \mathbb{Z}[2e_1, e_2]$ *из* (1.1) *и, следовательно, каноническое отображение*

$$T^2(W)_{\pm} \xrightarrow{\operatorname{mod} L} T^2_{\pm} : \quad \widehat{x} \mapsto \widehat{x} \operatorname{mod} L, \tag{4.7}$$

где элемент $\widehat{x} \operatorname{mod} L$ *выбирается из условия* $\widehat{x} \operatorname{mod} L \in T^2_{\pm}$, *задает биекцию между возмущенной разверткой* $T^2(W)_{\pm}$ *и стандартной разверткой* $T^2_{\pm}$ *тора* $\mathbb{T}^2_{\pm} = \mathbb{R}^2/L$ *из* (1.7).

Доказательство. Выберем произвольную точку

$$\widehat{x} = (x, x') \in \partial\widehat{\mathbb{R}}_0 \cap \partial\widehat{\mathbb{R}}_1 = \partial\widehat{W}_0 \cap \partial\widehat{W}_1, \tag{4.8}$$

где $\partial X = X^c \setminus X^{\mathrm{int}}$ обозначает границу множества X.

Случай 1: склейка $T(W)_+$ и $T(W)_-$. Пусть точка $\widetilde{x} = (\widehat{x};+1)$ с условием (4.8) имеет цвет $\mathrm{col}(\widetilde{x}) = \mathrm{col}(\widehat{x}) = 0$. По определению (2.9) имеем

$$\widetilde{S}(W)(\widetilde{x}) = ((x + v_0, x' + \alpha' \bmod \mathbb{Z}); +1) = ((x + \alpha, x' + \alpha' \bmod \mathbb{Z}); +1) \tag{4.9}$$

и тогда по определению (4.5) получаем

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)(\widetilde{x}) = (x + \alpha, x' + \alpha' \bmod \mathbb{Z}). \tag{4.10}$$

Пусть теперь $\widetilde{x} = (\widehat{x};+1)$ имеет цвет $\mathrm{col}(\widetilde{x}) = 1$. По второй части определения (2.9) получаем равенство

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(W)(\widetilde{x}) &= ((x + v_1, \iota'(x' + \alpha') \bmod \mathbb{Z}); -1) \\ &= ((x + \alpha - 1, \iota'(x' + \alpha') \bmod \mathbb{Z}); -1) \end{aligned} \tag{4.11}$$

и тогда по (4.5) находим

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)(\widetilde{x}) = \iota(x + \alpha - 1, \iota'(x' + \alpha') \bmod \mathbb{Z}) + e_2 = \tag{4.12}$$

$$= (x+\alpha, \iota' \circ \iota'(x'+\alpha') \bmod \mathbb{Z}) = (x+\alpha, x'+\alpha' \bmod \mathbb{Z}).$$

Сравнивая правые части равенств (4.10) и (4.12), видим, что для $\widetilde{x} = (\widehat{x}; +1)$ граничные точки $\widehat{x}$ разных цветов из проекций $T(W)_+$ и $T(W)_-$ склеиваются в множестве $T^2(W)_\pm$ из (4.3). Отсюда следует, что $T^2(W)_\pm$ – разбиение на составляющие $T^2(W)_+$ и $T^2(W)_-$.

Случай 2: склейка $T(W)_+$ и $T(W)_-$ по $\bmod L$. Пусть точка $\widetilde{x} = (\widehat{x}; -1)$ с условием (4.8) имеет цвет $\mathrm{col}(\widetilde{x}) = \mathrm{col}(\widehat{x}) = 0$. По определению (2.12) получаем

$$\widetilde{S}(W)(\widetilde{x}) = ((x+v_0, x'-\alpha' \bmod \mathbb{Z}); -1) = ((x+\alpha, x'-\alpha' \bmod \mathbb{Z}); -1) \tag{4.13}$$

и тогда по (4.5) будем иметь

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)(\widetilde{x}) = (x+\alpha+1, \iota'(x'-\alpha') + 1 \bmod \mathbb{Z}) = \tag{4.14}$$

$$= (x+\alpha+1, \iota'(x'-\alpha') \bmod \mathbb{Z}).$$

Пусть теперь $\widetilde{x} = (\widehat{x}; +1)$ имеет цвет $\mathrm{col}(\widetilde{x}) = 1$. Используя определение (2.12), вычисляем

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(W)(\widetilde{x}) &= ((x+v_1, \iota'(x'-\alpha') \bmod \mathbb{Z}); +1) \\ &= ((x+\alpha-1, \iota'(x'-\alpha') \bmod \mathbb{Z}); -1) \end{aligned} \tag{4.15}$$

и тогда по (4.5) можем записать, что

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)(\widetilde{x}) = \iota(x+\alpha-1, \iota'(x'-\alpha') \bmod \mathbb{Z}). \tag{4.16}$$

Сравнивая правые части равенств (4.14) и (4.16), видим, что в данном случае для $\widetilde{x} = (\widehat{x}; -1)$ граничные точки $\widehat{x}$ разных цветов из проекций $T(W)_+$ и $T(W)_-$ получаются одна из другой сдвигом на вектор $2e_1$. Таким образом, края множества $T^2(W)_\pm$ можно соединить по модулю решетки $L = \mathbb{Z}[2e_1, e_2]$, поэтому $T^2(W)$ – фундаментальная область решетки L.

Отсюда и определения (1.7) развертки $T^2_\pm$ вытекает существование биекции (4.7). □

Условимся далее развертку $T^2_\pm$ из (1.7) называть *стандартной*, а развертку $T^2(W)_\pm$ из (4.3) – *возмущенной*.

4.2. Коммутативная диаграмма. Пусть

$$\mathbb{T}^2_\pm \xrightarrow{\mathbb{S}} \mathbb{T}^2_\pm : \quad \widehat{x} \mapsto \widehat{x} + \widehat{\alpha} \bmod L \tag{4.17}$$

– сдвиг удвоенного тора $\mathbb{T}^2_\pm = \mathbb{R}^2/L$ на вектор $\widehat{\alpha} = (\alpha, \alpha')$ с координатами $\alpha, \alpha' \in I$. Так как $T^2_\pm$ является разверткой тора $\mathbb{T}^2_\pm$, то используя лемму 4.1 можем перенести сдвиг тора $\mathbb{S}$ на возмущенную развертку тора $T^2(W)_\pm$ с помощью коммутативной диаграммы

$$S(W) \quad \begin{array}{ccc} T^2(W)_\pm & \xrightarrow{\bmod L} & \mathbb{T}^2_\pm \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^2(W)_\pm & \xrightarrow{\bmod L} & \mathbb{T}^2_\pm \end{array} \quad \mathbb{S} \tag{4.18}$$

Здесь горизонтальные стрелки обозначают отображение, индуцированное отображением (4.7). Во избежание усложнений для нового отображения мы оставляем прежнее обозначение.

Предложение 4.1. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\widetilde{S}(W) \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{T}(W) & \xrightarrow{\pi} & T^2(W)_\pm \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{T}(W) & \xrightarrow{\pi} & T^2(W)_\pm \end{array} \quad S(W) \tag{4.19}$$

или, если записать в виде сравнения, выполняется формула коммутирования

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)\ (\widetilde{x}) \equiv S(W) \circ \pi\ (\widetilde{x}) \bmod L \tag{4.20}$$

для любого элемента $\widetilde{x} \in \widetilde{T}(W)$.

Доказательство. Случай 1: пусть $\widetilde{x} = (\widehat{x}, +1) \in \widetilde{T}(W)_+$, где $\widehat{x} = (x, x') \in \widehat{\mathbb{R}}_0$. По определению (2.7) отображения $\widetilde{S}(W)$ имеем

$$\widetilde{S}(W)(\widehat{x}, +1) = \quad ((x + v_0, x' + \alpha' \bmod \mathbb{Z}); +1).$$

Отсюда и определения (4.5) проекции π выводим сравнения

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)\ (\widehat{x}, +1) \equiv \quad \widehat{x} + \widehat{\alpha} \bmod L \equiv \quad S(W) \circ \pi\ (\widehat{x}, +1) \bmod L,$$

и тогда можем записать, что

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)\ (\widehat{x}, +1) \equiv S(W) \circ \pi\ (\widehat{x}, +1) \bmod L, \quad \text{если} \quad \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0. \tag{4.21}$$

Случай 2: предположим, что $\widetilde{x} = (\widehat{x}, +1) \in \widetilde{T}(W)_+$, где $\widehat{x} = (x, x') \in \widehat{\mathbb{R}}_1$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(W)(\widehat{x}, +1) \quad &= ((x + v_1, \iota(x' + \alpha') \bmod \mathbb{Z}); -1) \\ &= ((x + \alpha - 1, -x' - \alpha' \bmod \mathbb{Z}); -1). \end{aligned}$$

Отсюда и (4.5) следует сравнение

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)\ (\widehat{x}, +1) = \quad (x+\alpha, x'+\alpha' \bmod \mathbb{Z}),$$

а используя отображение $S(W)$ из диаграммы (4.18), будем иметь

$$S(W) \circ \pi\ (\widehat{x}, +1) \equiv \quad (x+\alpha, x'+\alpha') \bmod L,$$

и тогда, сравнивая два последних выражения, получаем нужную формулу коммутирования (4.20):

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)\ (\widehat{x}, +1) \equiv S(W) \circ \pi\ (\widehat{x}, +1) \bmod L, \quad \text{если} \quad \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1. \tag{4.22}$$

Случай 3: рассмотрим теперь $\widetilde{x} = (\widehat{x}, -1) \in \widetilde{T}(W)_-$, где $\widehat{x} = (x, x') \in \widehat{\mathbb{R}}_0$. В данном случае будем иметь

$$\widetilde{S}(W)(\widehat{x}, -1) = \quad ((x+\alpha, x'-\alpha' \bmod \mathbb{Z}); -1)$$

и, значит, в силу (4.5) находим

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)\ (\widehat{x}, -1) = \quad (x+1+\alpha, -x'+\alpha' \bmod \mathbb{Z}).$$

С другой стороны, можем записать следующее равенство

$$\pi(\widehat{x}, -1) = \quad (x+1, -x' \bmod \mathbb{Z}).$$

Поэтому

$$S(W) \circ \pi\ (\widehat{x}, -1) = \quad (x+1+\alpha, -x'+\alpha' \bmod \mathbb{Z}),$$

и тогда получаем нужное нам сравнение

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)\ (\widehat{x}, -1) \equiv S(W) \circ \pi\ (\widehat{x}, -1) \bmod L, \quad \text{если} \quad \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0. \tag{4.23}$$

Случай 4: наконец, пусть будем $\widetilde{x} = (\widehat{x}, -1) \in \widetilde{T}(W)_-$, где $\widehat{x} = (x, x') \in \widehat{\mathbb{R}}_1$. Действуя аналогично, имеем

$$\widetilde{S}(W)(\widehat{x}, -1) = \quad ((x+\alpha-1, \iota(x'-\alpha') \bmod \mathbb{Z}); +1).$$

Отсюда и (4.5) следует равенство

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)\ (\widehat{x}, -1) = \quad ((x-1)+\alpha, \iota(x')+\alpha' \bmod \mathbb{Z})$$

или иначе его можно переписать в виде сравнения

$$\pi \circ \widetilde{S}(W)\ (\widehat{x}, -1) \equiv \quad \pi(\widehat{x}) + (\alpha, \alpha') \bmod L. \tag{4.24}$$

С другой стороны, будем иметь

$$\pi(\widehat{x}, -1) = \quad (x+1, -x' \bmod \mathbb{Z})$$

и поэтому записываем

$$\begin{aligned} S(W)\circ\pi\,(\widehat{x},-1) &= (x+1+\alpha,-x'+\alpha' \bmod \mathbb{Z}) \\ &\equiv (x+1+\alpha,-x'+\alpha')-2e_1 \bmod L \\ &\equiv (x-1+\alpha,-x'+\alpha') \bmod L \\ &\equiv \pi(\widehat{x})+(\alpha,\alpha') \bmod L. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Тогда (4.24) и (4.25) находим, что выполняется коммутативное соотношение

$$\pi\circ\widetilde{S}(W)\,(\widehat{x},-1)\equiv S(W)\circ\pi\,(\widehat{x},-1) \bmod L, \quad \text{если} \quad \widehat{x}\in\widehat{\mathbb{R}}_1. \tag{4.26}$$

Теперь из (4.21), (4.22), (4.23) и (4.26) вытекает коммутативность диаграммы (4.19). □

§5. Раскраска накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$

5.1. Переход на двулистную накрывающую бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$. Пусть $\widetilde{T}(W)$ – стабилизатор (3.7) и $\widetilde{K}^2$ – фундаментальная область (1.9) для накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$. Биекцию

$$\widetilde{\operatorname{mod}}\,\Gamma:\ \widetilde{T}(W)\longrightarrow\widetilde{K}^2 \tag{5.1}$$

определим из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & \widetilde{T}(W) & \xrightarrow{\pi} & T^2(W)_{\pm} & \\ \widetilde{\operatorname{mod}}\,\Gamma & \downarrow & & \downarrow & \operatorname{mod} L \\ & \widetilde{K}^2 & \xrightarrow{\sigma} & T^2_{\pm} & \end{array}$$

а отображение

$$\widetilde{S}:\ \widetilde{K}^2\longrightarrow\widetilde{K}^2 \tag{5.2}$$

определим еще из одной коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & \widetilde{T}(W) & \xrightarrow{\widetilde{S}(W)} & \widetilde{T}(W) & \\ \widetilde{\operatorname{mod}}\,\Gamma & \downarrow & & \downarrow & \widetilde{\operatorname{mod}}\,\Gamma \\ & \widetilde{K}^2 & \xrightarrow{\widetilde{S}} & \widetilde{K}^2 & \end{array} \tag{5.3}$$

Используя биекцию (1.10) и диаграмму (5.3), через коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \widetilde{T}(W) & \xrightarrow{\widetilde{S}(W)} & \widetilde{T}(W) & \\ \widetilde{\mathbf{mod}}\,\Gamma & \downarrow & & \downarrow & \widetilde{\mathbf{mod}}\,\Gamma \\ & \widetilde{\mathbb{K}}^2 & \xrightarrow{\widetilde{\mathbb{S}}} & \widetilde{\mathbb{K}}^2 & \end{array} \tag{5.4}$$

перенесем отображение $\widetilde{S}$ с фундаментальной области $\widetilde{K}^2$ на отвечающее ему отображение $\widetilde{\mathbb{S}}: \ \widetilde{\mathbb{K}}^2 \longrightarrow \widetilde{\mathbb{K}}^2$ для накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$, сохраняя для вертикальных стрелок – биекций в (5.4) – прежнее обозначение $\widetilde{\mathbf{mod}}\,\Gamma$ из (5.1).

5.2. Раскраска стабилизатора $\widetilde{T}(W)$ и накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$. Используя разбиение полосы $\widehat{\mathbb{R}} = \widehat{\mathbb{R}}_0 \sqcup \widehat{\mathbb{R}}_1$ из (2.5), зададим раскраску

$$T(W)_{\pm,0} = T(W)_{\pm} \cap \widehat{\mathbb{R}}_0, \quad T(W)_{\pm,1} = T(W)_{\pm} \cap \widehat{\mathbb{R}}_1, \tag{5.5}$$

проекций $T(W)_{\pm} = \mathrm{pr}\ \widetilde{T}(W)_{\pm}$, а затем – раскраску и самого накрывающего множества $\widetilde{T}(W)$:

$$\widetilde{T}(W) = \widetilde{T}(W)_0 \sqcup \widetilde{T}(W)_1, \tag{5.6}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(W)_0 &= (T(W)_{+,0}, +1) \sqcup (T(W)_{-,0}, -1), \\ \widetilde{T}(W)_1 &= (T(W)_{+,1}, +1) \sqcup (T(W)_{-,1}, -1). \end{aligned}$$

Раскраску же

$$\widetilde{\mathbb{K}}^2 = \widetilde{\mathbb{K}}^2_0 \sqcup \widetilde{\mathbb{K}}^2_1 \tag{5.7}$$

для накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ зададим переносом раскраски (3.9) множества $\widetilde{T}(W)$ с помощью биекции $\widetilde{\mathbf{mod}}\,\Gamma$ из диаграммы (5.4). Таким образом, по определению полагаем

$$\mathrm{col}\,\widetilde{\mathbf{x}} = \mathrm{col}\,\widetilde{x} \tag{5.8}$$

для любого элемента $\widetilde{x} \in \widetilde{T}(W)$ и его образа $\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{x}\ \widetilde{\mathbf{mod}}\,\Gamma$ из накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$. Напомним, что здесь использовано обозначение $\mathrm{col}\,\widetilde{x} = k$ для цвета элементов $\widetilde{x}$ из области $\widetilde{T}(W)_k$, где $k = 0, 1$. Условие (5.8) будем называть *согласованием* цветов точек из $\widetilde{T}(W)$ и $\widetilde{\mathbb{K}}^2$.

Предложение 5.1. *Отображения $\widetilde{S}(W)$ и $\widetilde{\mathbb{S}}$ из диаграммы (5.4) сохраняют*

$$\mathrm{col}\,\widetilde{S}(W)(\widetilde{x})\ \widetilde{\mathbf{mod}}\,\Gamma = \mathrm{col}\,\widetilde{\mathbb{S}}(\widetilde{x}\ \widetilde{\mathbf{mod}}\,\Gamma) \tag{5.9}$$

согласованность (5.8) *раскрасок* (5.6) *и* (5.7) *множеств $\widetilde{T}(W)$ и $\widetilde{\mathbb{K}}^2$, где $\widetilde{x}$ – произвольный элемент из $\widetilde{T}(W)$.*

Доказательство. вытекает из предложения 4.1 и определений (5.6) и (5.8). □

§6. Отклонения для стабилизатора $\widetilde{T}(W)$

6.1. Орбиты на стабилизаторе $\widetilde{T}(W)$. Пусть

$$\mathrm{Orb}(\widetilde{x}_0, \widetilde{S}(W)) = \quad \{\widetilde{x}_i = \widetilde{S}^i(W)(\widetilde{x}_0); \quad i = 0, 1, 2, \dots\} \tag{6.1}$$

– орбита начальной точки $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{T}(W)$ относительно отображения $\widetilde{S}(W)$. Обозначим

$$x(\widetilde{x}_i) = x_i \tag{6.2}$$

для точки $\widetilde{x}_i = (x_i, x_i', \varepsilon_i)$. Согласно определению (2.7) отображения $\widetilde{S}(W)$, координату x_i любой точки $\widetilde{x}_i$ орбиты $\mathrm{Orb}(\widetilde{x}_0, \widetilde{S}(W))$ можем записать в виде

$$x_i = x(\widetilde{S}^i(W)(\widetilde{x}_0)) = x_0 + \sum_{0 \leqslant j < i} v_{(\mathrm{col}(\widetilde{x}_j))}, \tag{6.3}$$

где сдвиги v_k заданы (2.10) равенствами $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - 1$ для некоторого $\alpha \neq 0$ из единичного полуинтервала $I = [0, 1)$.

Для $k = 0, 1$ определим *функции распределения*

$$\widetilde{r}_k(i, \widetilde{x}_0) = \quad \sharp\{j; \quad \widetilde{S}^j(W)(\widetilde{x}_0) \in \widetilde{T}(W)_k, \quad 0 \leqslant j < i\}, \tag{6.4}$$

т.е. $\widetilde{r}_k(i, \widetilde{x}_0)$ равно количеству точек $\widetilde{x}_i = \widetilde{S}^i(W)(\widetilde{x}_0)$ для $0 \leqslant j < i$ из орбиты $\mathrm{Orb}(\widetilde{x}_0, \widetilde{S}(W))$, имеющих цвет $\mathrm{col}(\widetilde{x}_j) = k$. Используя такие функции, можем переписать равенство (6.3) в свернутом виде

$$x_i = x(\widetilde{S}^i(W)(\widetilde{x}_0)) = x_0 + \widetilde{r}_0(i, \widetilde{x}_0) v_0 + \widetilde{r}_1(i, \widetilde{x}_0) v_1. \tag{6.5}$$

В силу определения (6.4) и условия (6.1) между функциями распределения $\widetilde{r}_0(i, \widetilde{x}_0)$ и $\widetilde{r}_1(i, \widetilde{x}_0)$ существует очевидная связь

$$\widetilde{r}_0(i, \widetilde{x}_0) + \widetilde{r}_1(i, \widetilde{x}_0) = i \tag{6.6}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

6.2. Функции отклонения на стабилизаторе $\widetilde{T}(W)$. Выражая из (6.6) функцию $\widetilde{r}_1(i, \widetilde{x}_0)$ через $\widetilde{r}_0(i, \widetilde{x}_0)$ и подставляя ее значение в равенство (6.5), получаем

$$x_i = x(\widetilde{S}^i(W)(\widetilde{x}_0)) = x_0 + \widetilde{r}_0(i, \widetilde{x}_0) + i v_1, \tag{6.7}$$

так как по условию $v_0 - v_1 = 1$. Введем дополнительные функции

$$\widetilde{\delta}_k(i, \widetilde{x}_0) = \widetilde{r}_k(i, \widetilde{x}_0) - i a_k \tag{6.8}$$

для $k = 0, 1$ с коэффициентами $a_0 = -v_1$ и $a_1 = v_0$, которые, вспоминая условие из (2.10), удобно выразить через один параметр

$$a_0 = 1 - \alpha, \quad a_1 = \alpha. \tag{6.9}$$

Из (6.6), (6.9) и определения (6.8) вытекает, что между функциями отклонений $\widetilde{\delta}_0(i, \widetilde{x}_0)$ и $\widetilde{\delta}_1(i, \widetilde{x}_0)$ имеет место соотношение

$$\widetilde{\delta}_0(i, \widetilde{x}_0) + \widetilde{\delta}_1(i, \widetilde{x}_0) = 0 \tag{6.10}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ Соотношение (6.10) является аналогом соотношения (6.6) для функций распределения $\widetilde{r}_0(i, \widetilde{x}_0)$ и $\widetilde{r}_1(i, \widetilde{x}_0)$. Далее мы увидим, что значение функции $\widetilde{\delta}_k(i, \widetilde{x}_0)$ равно *отклонению* числа $\widetilde{r}_k(i, \widetilde{x}_0)$ точек $\widetilde{x}_j = \widetilde{S}^j(W)(\widetilde{x}_0)$, $0 \leqslant j < i$, из орбиты $\mathrm{Orb}(\widetilde{x}_0, \widetilde{S}(W))$, имеющих цвет $\mathrm{col}(\widetilde{x}_j) = k$, от ожидаемого среднего значения ia_k, где коэффициент a_k равен частоте точек $\widetilde{x}_j \in \mathrm{Orb}(\widetilde{x}_0, \widetilde{S}(W))$ цвета $\mathrm{col}(\widetilde{x}_j) = k$.

Лемма 6.1. *Для функций отклонений* $\widetilde{\delta}_k(i, \widetilde{x}_0)$, $k = 0, 1$, *определенных в* (6.8), *выпоняются следующие формулы*:

$$\widetilde{\delta}_0(i, \widetilde{x}_0) = x_i - x_0, \quad \widetilde{\delta}_1(i, \widetilde{x}_0) = x_0 - x_i, \tag{6.11}$$

где $x_i = x(\widetilde{x}_i)$ *– первая координата текущей точки* $\widetilde{x}_i = \widetilde{S}^i(W)(\widetilde{x}_0) = (x_i, x'_i, \varepsilon_i)$ *из орбиты* $\mathrm{Orb}(\widetilde{x}_0, \widetilde{S}(W))$ *с номером* $i = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Подставим значение (6.8) функции отклонения $\widetilde{\delta}_0(i, \widetilde{x}_0)$ в равенство (6.7) и получим первое равенство из (6.11). Второе же равенство вытекает из соотношения (6.10). $\square$

§7. Распределение точек на накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$

7.1. Функции распределения и отклонения на $\widetilde{\mathbb{K}}^2$. В (5.7) и (5.8) была определена раскраска $\widetilde{\mathbb{K}}^2 = \widetilde{\mathbb{K}}^2_0 \sqcup \widetilde{\mathbb{K}}^2_1$ точек $\mathrm{col}(\widetilde{\mathbf{x}}) = 0, 1$ на накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$. Аналогично (6.4) для отображения $\widetilde{\mathbb{S}}$ накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ определим *функции распределения*

$$\widetilde{\mathbf{r}}_k(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0) = \quad \sharp\{j; \quad \widetilde{\mathbb{S}}^j(\widetilde{\mathbf{x}}_0) \in \widetilde{\mathbb{K}}^2_k; \quad 0 \leqslant j < i\}, \tag{7.1}$$

равные количеству точек $\widetilde{\mathbf{x}}_j = \widetilde{\mathbb{S}}^j(\widetilde{\mathbf{x}}_0)$ для $0 \leqslant j < i$ из орбиты $\mathrm{Orb}(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \widetilde{\mathbb{S}})$, имеющих цвет $\mathrm{col}(\widetilde{\mathbf{x}}) = k$, где $k = 0, 1$. Тогда *функции отклонения* на накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$, соответствующие функциям распределения (7.1), примут вид

$$\widetilde{\delta}_k(i,\widetilde{\mathbf{x}}_0)=\widetilde{\mathbf{r}}_k(i,\widetilde{\mathbf{x}}_0)-ia_k \tag{7.2}$$

с теми же коэффициентами $a_0=1-\alpha$ и $a_1=\alpha$, что и для отклонений (6.8).

7.2. Основной результат. Пусть $\widetilde{x}=(x,x',\varepsilon)$ – произвольная точка из стабилизатора $\widetilde{T}(W)$ и $\widetilde{\mathbf{x}}=\widetilde{x}\ \widetilde{\mathbf{mod}}\ \Gamma$ – точка из накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$, являющаяся образом $\widetilde{x}$ относительно биекции $\widetilde{\mathbf{mod}}\ \Gamma$ из диаграммы (6.8). Чтобы сформулировать следующий результат, удобно ввести обозначение

$$x=\mathbf{pr}(\widetilde{\mathbf{x}}) \tag{7.3}$$

для *проекции* точки $\widetilde{\mathbf{x}}\in\widetilde{\mathbb{K}}^2$ на прямую $\mathbb{R}$.

Теорема 7.1. *Пусть $\widetilde{T}(W)$ – стабилизатор отображения $\widetilde{S}(W)$ из* (3.9)*, $\widetilde{\mathbf{x}}_0$ – произвольная начальная точка на накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ и $\widetilde{\mathbb{S}}$ – отображение накрывающей* (5.4)*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для функций отклонений $\widetilde{\delta}_k(i,\widetilde{\mathbf{x}}_0)$, $k=0,1$, определенных в* (7.2)*, выпоняются следующие формулы*:

$$\widetilde{\delta}_0(i,\widetilde{\mathbf{x}}_0)=x_i-x_0,\quad \widetilde{\delta}_1(i,\widetilde{\mathbf{x}}_0)=x_0-x_i, \tag{7.4}$$

где

$$x_i=\mathbf{pr}(\widetilde{\mathbf{x}}_i)\quad \text{для}\quad \widetilde{\mathbf{x}}_i=\widetilde{\mathbb{S}}^i(\widetilde{\mathbf{x}}_0) \tag{7.5}$$

– текущей точки из орбиты $\mathrm{Orb}(\widetilde{\mathbf{x}}_0,\widetilde{\mathbb{S}})$ *с номером $i=0,1,2,\ldots$*

2. *Отклонения $\widetilde{\delta}_k(i,\widetilde{\mathbf{x}}_0)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} m-x_0\leqslant \widetilde{\delta}_0(i,\widetilde{\mathbf{x}}_0)\leqslant M-x_0,\\ x_0-M\leqslant \widetilde{\delta}_1(i,\widetilde{\mathbf{x}}_0)\leqslant x_0-m \end{aligned} \tag{7.6}$$

для всех $i=0,1,2,\ldots$ Здесь через $m=m(\widetilde{T}(W))$ и $M=M(\widetilde{T}(W))$ обозначили граничные значения

$$m=\inf\nolimits_{\widetilde{x}\in\widetilde{T}(W)}x(\widetilde{x}),\quad M=\sup\nolimits_{\widetilde{x}\in\widetilde{T}(W)}x(\widetilde{x}), \tag{7.7}$$

где $x(\widetilde{x})=x$ для точки $\widetilde{x}=(x,x',\varepsilon)$ из стабилизатора $\widetilde{T}(W)$.

Доказательство. 1. В силу предложений 4.1 и 5.1 можем записать равенство
$$\widetilde{\mathbf{r}}_k(i,\widetilde{\mathbf{x}}_0)=\widetilde{r}_k(i,\widetilde{x}_0). \tag{7.8}$$
Тогда из (7.8) и определений (6.8), (7.3) следует равенство и для соответствующих функций отклонений
$$\widetilde{\delta}_k(i,\widetilde{\mathbf{x}}_0)=\widetilde{\delta}_k(i,\widetilde{x}_0). \tag{7.9}$$
Из (7.9) и леммы 6.1 получаем формулы (7.4).

2. Рассмотрим орбиту $\mathrm{Orb}(\widetilde{x}_0,\widetilde{S}(W))$, определенную в (6.1), для начальной точки $\widetilde{x}_0$ из из стабилизатора $\widetilde{T}(W)$, отвечающую
$$\widetilde{\mathbf{x}}_0=\widetilde{x}_0\,\widetilde{\mathbf{mod}}\,\Gamma$$
точке $\widetilde{\mathbf{x}}_0$ из $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ относительно биекции из диаграммы (5.4). Из замкнутости (3.14) развертки стабилизатора $\widetilde{T}(W)$ относительно отображения $\widetilde{S}(W)$ следует включение
$$\mathrm{Orb}(\widetilde{x}_0,\widetilde{S}(W))\subset\widetilde{T}(W).$$
Поэтому, согласно формуле (7.4) и предложению 3.1, для функций отклонений $\widetilde{\delta}_k(i,\widetilde{x}_0)=\widetilde{r}_k(i,\widetilde{x}_0)-ia_k$ распределения точек
$$\widetilde{x}_j=\widetilde{S}^j(W)(\widetilde{x}_0)=(x_j,x'_j,\varepsilon_j)$$
орбиты $\mathrm{Orb}(\widetilde{x}_0,\widetilde{S}(W))$ по областям $\widetilde{T}(W)_k$ из разбиения
$$\widetilde{T}(W)=\widetilde{T}(W)_0\sqcup\widetilde{T}(W)_1$$
(см. определение (5.6)) будут выполняться неравенства
$$\begin{gathered}m-x_0\leqslant\widetilde{\delta}_0(i,\widetilde{x}_0)\leqslant M-x_0,\\ x_0-M)\leqslant\widetilde{\delta}_1(i,\widetilde{x}_0)\leqslant x_0-m,\end{gathered}$$
из которых вытекают требуемые неравенства (7.6). □

7.3. Возмущения d_k. В качестве склейки выберем прямоугольник $\widehat{W}=W\times I$ с основанием $W=[w_0,w_1)$, где
$$w_0=\omega+d_0,\quad w_1=\omega+d_1. \tag{7.10}$$
Величины $d_0\leqslant 0$ и $d_1\geqslant 0$ называются *возмущениями.* В случае $d_0=0$, $d_1=0$ полоса $\widehat{\mathbb{R}}$ имеет прямое разбиение $\widehat{\mathbb{R}}=\widehat{\mathbb{R}}_0\sqcup\widehat{\mathbb{R}}_1$ на две области: точки $\widehat{x}\in\widehat{\mathbb{R}}_0$ с ординатами $x<\omega$ имеют цвет $\mathrm{col}(\widehat{x})=0$, а точки

$\widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1$ с $x \geqslant \omega$ имеют цвет $\mathrm{col}(\widehat{x}) = 1$. Если же $d_0 - d_1 > 0$, то указанное разбиение возмущается (2.5) произвольной раскраской склейки $\widehat{W}$, имеющей ширину

$$|\widehat{W}| = |W| = d_1 - d_0. \tag{7.11}$$

В терминах возмущений d_0 и d_1 можно в явном виде выписать оценки (7.6) из теоремы 7.1.

Предложение 7.1. *Пусть $\widetilde{\mathbf{x}}_0$ – некоторая произвольная фиксированная начальная точка на накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$, $\widetilde{\mathbb{S}}$ – отображение накрывающей $\widetilde{\mathbb{K}}^2$, отвечающее с помощью диаграммы* (5.4) *отображению $\widetilde{S}(W)$, и пусть возмущения $d_0 \leqslant 0$ и $d_1 \geqslant 0$ из* (7.10) *удовлетворяют условию*

$$d_1 - d_0 < \min\{|v_0|, |v_1|\}. \tag{7.12}$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. *Множество $\widetilde{T}(W)$ замкнуто относительно отображения $\widetilde{S}(W)$ и является фундаментальной областью для накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ относительно группы Γ.*

2. *Функции отклонений $\widetilde{\delta}_k(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0)$, $k = 0, 1$, определенные в* (7.2), *удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} d_0 - x_0 \leqslant \quad & \widetilde{\delta}_0(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0) \quad \leqslant 1 + d_1 - x_0, \\ x_0 - 1 - d_1 \leqslant \quad & \widetilde{\delta}_1(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0) \quad \leqslant x_0 - d_0 \end{aligned} \tag{7.13}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь $x_0 = \mathbf{pr}(\widetilde{\mathbf{x}}_0)$ – проекция (7.3) *точки $\widetilde{\mathbf{x}}_0 \in \widetilde{\mathbb{K}}^2$ на прямую $\mathbb{R}$.*

3. *Для произвольной начальной точки $\widetilde{\mathbf{x}}_0$ на накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ выполняются общие неравенства*

$$\begin{aligned} |\widetilde{\delta}_0(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0)| \leqslant 1 + |\widehat{W}|, \\ |\widetilde{\delta}_1(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0)| \leqslant 1 + |\widehat{W}| \end{aligned} \tag{7.14}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$, где $|\widehat{W}| = d_1 - d_0$ – ширина склейки $\widehat{W}$.

Доказательство. 1. Поскольку неравенство (7.12) равносильно неравенству (3.13), то первое утверждение вытекает из предложения 3.1 и леммы 4.1.

2. Согласно построению (3.7) фундаментальной области $\widetilde{T}(W)$ для накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ из (7.7) следуют, что граничные

значения $m = m(\widetilde{T}(W))$ и $M = M(\widetilde{T}(W))$ удовлетворяют неравенствам

$$w_0 + v_1 \leqslant m, \quad M \leqslant w_1 + v_0. \tag{7.15}$$

Подставляя в (7.15) значения для v_0, v_1 и w_0, w_1 из (2.10) и (7.10), получаем соотношения

$$d_0 \leqslant m, \quad M \leqslant 1 + d_1 \tag{7.16}$$

между граничные значения m, M и возмущениями d_0, d_1. Неравенства (7.13) вытекают из теоремы 7.1 и неравенств (7.16).

3. Воспользовавшись биекцией $\widetilde{\mathbf{mod}}\ \Gamma$ из диаграммы (5.4), получаем точку $\widetilde{x}_0 = (x_0, x_0', \varepsilon_0)$ – прообраз начальной точки $\widetilde{\mathbf{x}}_0 \in \widetilde{\mathbb{K}}^2$. Поскольку $\widetilde{x}_0$ принадлежит фундаментальной области $\widetilde{T}(W)$, то в силу (7.16) координата x_0 точки $\widetilde{x}_0$ должна удовлетворять неравенствам $d_0 \leqslant x_0 \leqslant 1 + d_1$. Отсюда и (7.13) выводим неравенства (7.14). □

Замечание 7.1. Названия возмущений для величин d_0 и d_1, данные им в (7.10), объясняются неравенствами (7.13) и (7.14): с увеличением этих величин растут и границы изменений для функций отклонений $\widetilde{\delta}_0(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0)$ и $\widetilde{\delta}_1(i, \widetilde{\mathbf{x}}_0)$.

7.4. Распределение точек на бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$. Если сделать разрез на бутылке Клейна $\mathbb{K}^2$ вдоль прямой $x = 0$, то $\mathbb{K}^2$ становится двусторонней поверхностью

$$\mathbb{K}^2_{\text{cut}} = \mathbb{K}^2_{\text{cut},+} \sqcup \mathbb{K}^2_{\text{cut},-} \tag{7.17}$$

со сторонами $\mathbb{K}^2_{\text{cut},+}$ и $\mathbb{K}^2_{\text{cut},-}$ Используя биекцию (1.10) и диаграмму (5.4), через коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \widetilde{T}(W) & \xrightarrow{\widetilde{S}(W)} & \widetilde{T}(W) & \\ \mathbf{mod}\,\Gamma_{\pm} & \downarrow & & \downarrow & \mathbf{mod}\,\Gamma_{\pm} \\ & \mathbb{K}^2_{\text{cut}} & \xrightarrow{\mathbb{S}_{\text{cut}}} & \mathbb{K}^2_{\text{cut}} & \end{array} \tag{7.18}$$

перенесем отображение $\widetilde{S}(W)$ с фундаментальной области $\widetilde{T}(W)$ для накрывающей бутылки Клейна $\widetilde{\mathbb{K}}^2$ на двустороннюю поверхность $\mathbb{K}^2_{\text{cut}}$ из (7.17). Тогда на эту поверхность $\mathbb{K}^2_{\text{cut}}$ можно также перенести раскраску

$$\mathbb{K}^2_{\text{cut}} = \mathbb{K}^2_{\text{cut},0} \sqcup \mathbb{K}^2_{\text{cut},1} \tag{7.19}$$

фундаментальной области $\widetilde{T}(W) = \widetilde{T}(W)_0 \sqcup \widetilde{T}(W)_1$, определенную в (7.10). После этого соглашения каждую точку $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^2_{\mathrm{cut}}$ можно считать принадлежащей как стороне $\mathbb{K}^2_{\mathrm{cut},+}$, так и стороне $\mathbb{K}^2_{\mathrm{cut},-}$. Следовательно, данная точка $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^2_{\mathrm{cut}}$ может принимать разные цвета $\mathrm{col}\,\mathbf{x} = k$, $k = 0, 1$.

Заметим, что отображение $\mathbf{mod}\ \Gamma_{\pm}$ из диаграммы (5.4) не переводит стороны $\mathbb{K}^2_{\mathrm{cut},+}$ и $\mathbb{K}^2_{\mathrm{cut},-}$ в листы $\widetilde{T}(W)_+$ и $\widetilde{T}(W)_-$ фундаментальной области $\widetilde{T}(W)$ из (3.7), поскольку данные листы являются возмущенными в общем случае, когда возмущения d_0 и d_1 из (7.10) удовлетворяют условию $d_0 - d_1 > 0$.

Используя диаграмму (7.18) и раскраску (7.19), можем на поверхности $\mathbb{K}^2_{\mathrm{cut}}$ относительно отображения $\mathbb{S}_{\mathrm{cut}}$ определить функции распределения $\mathbf{r}_0(i, \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{r}_1(i, \mathbf{x}_0)$ и отвечающие им функции отклонения $\delta_0(i, \mathbf{x}_0)$, $\delta_1(i, \mathbf{x}_0)$. Затем на новые функции отклонения можно распространить теорему 7.1 и предложение 7.1.

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.
2. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
3. В. Г. Журавлев, *Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей.* — Алгебра и анализ **24**, No. 1 (2012), 95–130.
4. В. Г. Журавлев, *Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова.* — Алгебра и анализ **24**, No. 4 (2012), 97–136.
5. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем. **16**, МИАН, М. (2012), 82–102.
6. S. Grepstad, N. Lev, *Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation.* — arXiv:1404.0165v1 [math.DS] **1 Apr** (2014), 1–39.
7. A. Haynes, H. Koivusalo, *Constructing bounded remainder sets and cut-and-project sets which are bounded distance to lattices.* — arXiv:1402.2125v2 [math.DS] **20 Feb** (2014), 1–11.
8. R. Szüsz, *Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats.* — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **5** (1954), 35–39.
9. G. Rauzy, *Ensembles à restes bornés.* — Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux. exposé **24** (1984), 1–24.
10. P. Liardet, *Regularities of distribution.* — Compositio Math. **61** (1987), 267–293.
11. S. Ferenczi, *Bounded Remaider Sets.* — Acta Arithmetica **61**, No. 4 (1992), 319–326.

12. E. Hecke, *Eber analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins.* — Math. Sem. Hamburg. Univ. **1** (1921), 54–76.
13. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи и индуцированные двуцветные повороты единичной окружности.* — Изв. РАН, сер. матем. **74**, No. 2 (2010), 65–108.
14. А. А. Абросимова, *Средние значения отклонений для распределения точек на торе.* — Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика **5:26** (2012), 5–11.
15. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах.* М., 1953.
16. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений.* Т. 2. Киев, 1952.

Zhuravlev V. G. Bounded remainder sets on the double covering of the Klein bottle.

The shift $\widetilde{\mathbb{S}}: \widetilde{\mathbb{K}}^2 \longrightarrow \widetilde{\mathbb{K}}^2$ on the double covering of the Klein bottle $\widetilde{\mathbb{K}}^2 = \mathbb{K}^2 \times \{\pm 1\}$ is considered. This shift $\widetilde{\mathbb{S}}$ generates some tiling $\widetilde{\mathbb{K}}^2 = \widetilde{\mathbb{K}}^2_0 \sqcup \widetilde{\mathbb{K}}^2_1$ into two bounded remainder sets $\widetilde{\mathbb{K}}^2_0$ and $\widetilde{\mathbb{K}}^2_1$ with respect to the shift $\widetilde{\mathbb{S}}$. Two-sided estimates are proved for the deviation functions of these sets.

Владимирский
государственный университет
Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 23 июня 2014 г.