Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

В. В. Жук, Г. Ю. Пуеров

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества вещественных, целых неотрицательных, натуральных чисел, $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Все функции в дальнейшем предполагаются вещественнозначными; H_n – множество тригонометрических полиномов порядка не выше n. Через L_p при $1 \leqslant p < \infty$ обозначаем множество 2π-периодических измеримых функций, у которых $\|f\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{1/p} < \infty$. Для $f \in L_1$ полагаем

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

$$\rho_k(f) = \sqrt{a_k^2(f) + b_k^2(f)}.$$

Хорошо известно следующее неравенство С. Н. Бернштейна.

Теорема A (см. [1, с. 47; 2]). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, *точка* $x_0 \in \mathbb{R}$ *такая, что* $T(x_0) = \|T\|$. *Тогда при* $t \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$

$$T(x_0 + t) \geqslant \|T\| \cos nt. \tag{1}$$

Для полиномов вида $T(x) = a\cos nx + b\sin nx$ *неравенство* (1) *обращается в равенство.*

В §1 данной работы получены некоторые обобщения неравенства (1).

В §2 для сумм вида

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{\alpha}\rho_k(f) \tag{2}$$

установлены некоторые оценки сверху посредством величин, характеризующих структурные свойства функции f.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы, неравенство Бернштейна для производных, модули непрерывности, коэффициенты Фурье.

Суммы вида (2) рассматривались рядом авторов (см., например, [1, с. 647–648; 3]). Применяемые в работе методы дают возможность получить устанавливаемые неравенства с конкретными постоянными.

§1. Неравенства для тригонометрических полиномов

1.1. Пусть функция f задана на $\mathbb{R}$ и суммируема на любом конечном промежутке, $h > 0$, $r - 1 \in \mathbb{N}$.

Функцией Стеклова первого порядка для f с шагом h называется функция $S_{h,1}(f)$, определяемая формулой

$$S_{h,1}(f,x) = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\,dt.$$

Функцией Стеклова порядка r для функции f с шагом h называется функция

$$S_{h,r}(f,x) = S_{h,1}(S_{h,r-1}(f),x).$$

Положим при $r \in \mathbb{N}$

$$\psi_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{(r-1)!} \sum\limits_{0 \leqslant k < |t| + \frac{r}{2}} (-1)^k C_r^k \left(|t| + \frac{r}{2} - k\right)^{r-1}, & \text{если } |t| \leqslant r/2, \\ 0, & \text{если } |t| > r/2; \end{cases}$$

$$\psi_{h,r}(t) = \frac{1}{h}\psi_r\left(\frac{t}{h}\right).$$

Через $\delta_t^r(f,x)$ обозначаем центральную разность r-го порядка функции f с шагом t в точке x:

$$\delta_t^r(f,x) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m C_r^m f(x + rt/2 - mt).$$

Если $b < a$, то считаем $\sum\limits_a^b = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, $t \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *точка* x_0 *такая, что* $T^{(2k)}(x_0) = \|T^{(2k)}\|$. *Тогда*

$$T(x_0+t)-\sum_{l=0}^{2k-1}\frac{T^{(l)}(x_0)}{l!}t^l \geqslant \frac{(-1)^k}{n^{2k}}\left(\cos nt-\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(2l)!}(nt)^{2l}\right)\|T^{(2k)}\|. \quad (3)$$

Для полиномов вида $T(x) = a\cos nx + b\sin nx$ *неравенство* (3) *обращается в равенство.*

Доказательство. При $k = 0$ неравенства (1) и (3) совпадают. Считаем, что $k \in \mathbb{N}$.

Применив неравенство (1) к полиному $T^{(2k)}$, имеем

$$T^{(2k)}(x_0+tu) \geqslant \|T^{(2k)}\|\cos ntu, \quad (4)$$

где $u \in [0,1]$. Умножив неравенство (4) на $\dfrac{t^{2k}(1-u)^{2k-1}}{(2k-1)!}$ и проинтегрировав по u, получим

$$\frac{t^{2k}}{(2k-1)!}\int_0^1 (1-u)^{2k-1}T^{(2k)}(x_0+tu)\,du$$
$$\geqslant \|T^{(2k)}\|\frac{t^{2k}}{(2k-1)!}\int_0^1 (1-u)^{2k-1}\cos ntu\,du.$$

Остается воспользоваться формулой Тейлора:

$$T(x_0+t)-\sum_{l=0}^{2k-1}\frac{T^{(l)}(x_0)}{l!}t^l = \frac{t^{2k}}{(2k-1)!}\int_0^1(1-u)^{2k-1}T^{(2k)}(x_0+tu)\,du,$$

$$\cos nt-\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(2l)!}(nt)^{2l} = \frac{(-1)^k n^{2k}t^{2k}}{(2k-1)!}\int_0^1(1-u)^{2k-1}\cos ntu\,du.$$

Прямым подсчетом убеждаемся, что для

$$T(x) = a\cos nx + b\sin nx = \sqrt{a^2+b^2}\cos(nx+\varphi),$$
$$x_0 = -\frac{\varphi}{n}+\frac{\pi\left(1+(-1)^{k+1}\right)}{2n}$$

неравенство (3) при $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ обращается в равенство. □

Следствие 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, $t \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$, $k \in \mathbb{N}$, *точка* x_0 *такая, что* $|T^{(2k)}(x_0)| = \|T^{(2k)}\|$. *Тогда*

$$\left|T(x_0+t) - \sum_{l=0}^{2k-1} \frac{T^{(l)}(x_0)}{l!} t^l\right| \geqslant \frac{1}{n^{2k}} \left|\cos nt - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{(2l)!}(nt)^{2l}\right| \|T^{(2k)}\|. \quad (5)$$

Для полиномов вида $T(x) = a\cos nx + b\sin nx$ *неравенство* (5) *обращается в равенство.*

Доказательство. Если $T^{(2k)}(x_0) = \|T^{(2k)}\|$, то, учитывая соотношение

$$(-1)^k \left(\cos x - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l}\right) \geqslant 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

убеждаемся, что неравенства (5) и (3) совпадают.

Если $T^{(2k)}(x_0) = -\|T^{(2k)}\|$, то применяем доказанное к $-T$. □

Теорема 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *точка* x_0 *такая, что* $T^{(2k+1)}(x_0) = \|T^{(2k+1)}\|$. *Тогда если* $t \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$, *то*

$$\begin{aligned} T(x_0+t) &- \sum_{l=0}^{2k} \frac{T^{(l)}(x_0)}{l!} t^l \\ &\geqslant \frac{(-1)^k}{n^{2k+1}} \left(\sin nt - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}(nt)^{2l+1}\right) \|T^{(2k+1)}\|, \end{aligned} \quad (6)$$

если $t \in \left[-\frac{\pi}{n}, 0\right]$, *то*

$$\begin{aligned} T(x_0+t) &- \sum_{l=0}^{2k} \frac{T^{(l)}(x_0)}{l!} t^l \\ &\leqslant \frac{(-1)^k}{n^{2k+1}} \left(\sin nt - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}(nt)^{2l+1}\right) \|T^{(2k+1)}\|. \end{aligned} \quad (7)$$

Для полиномов вида $T(x) = a\cos nx + b\sin nx$ *неравенства* (6) *и* (7) *обращаются в равенства.*

Доказательство. Если $u \in [0,1]$, то применив неравенство (1) к полиному $T^{(2k+1)}$, имеем

$$T^{(2k+1)}(x_0+tu) \geqslant \|T^{(2k+1)}\| \cos ntu. \quad (8)$$

Пусть $t \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$. Умножив неравенство (8) на $\dfrac{t^{2k+1}(1-u)^{2k}}{(2k)!}$ и проинтегрировав по u, получим

$$\frac{t^{2k+1}}{(2k)!}\int\limits_0^1 T^{(2k+1)}(x_0+tu)(1-u)^{2k}\,du \geqslant \|T^{(2k+1)}\|\frac{t^{2k+1}}{(2k)!}\int\limits_0^1 (1-u)^{2k}\cos ntu\,du. \tag{9}$$

Сопоставив неравенство (9) с разложениями по формуле Тейлора

$$T(x_0+t) - \sum_{l=0}^{2k}\frac{T^{(l)}(x_0)}{l!}t^l = \frac{t^{2k+1}}{(2k)!}\int\limits_0^1 (1-u)^{2k}T^{(2k+1)}(x_0+tu)\,du,$$

$$\sin nt - \sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}(nt)^{2l+1} = \frac{(-1)^k n^{2k+1}t^{2k+1}}{(2k)!}\int\limits_0^1 (1-u)^{2k}\cos ntu\,du,$$

получим (6).

Непосредственные вычисления показывают, что для

$$T(x) = a\cos nx + b\sin nx = \sqrt{a^2+b^2}\cos(nx+\varphi),$$
$$x_0 = -\frac{\varphi}{n} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{2n}$$

неравенство (6) при $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ обращается в равенство.

Если $t \in \left[-\frac{\pi}{n}, 0\right]$, то аналогично (единственное отличие в том, что знак неравенства (9) меняется на противоположный) получим (7). $\square$

Следствие 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, $t \in \left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$, $k \in \mathbb{Z}_+$, точка x_0 такая, что $|T^{(2k+1)}(x_0)| = \|T^{(2k+1)}\|$. Тогда*

$$\left|T(x_0+t) - \sum_{l=0}^{2k}\frac{T^{(l)}(x_0)}{l!}t^l\right| \geqslant \frac{1}{n^{2k+1}}\left|\sin nt - \sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}(nt)^{2l+1}\right|\|T^{(2k+1)}\|. \tag{10}$$

Для полиномов вида $T(x) = a\cos nx + b\sin nx$ неравенство (10) обращается в равенство.

Доказательство. Пусть $T^{(2k+1)}(x_0) = \|T^{(2k+1)}\|$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$. Если $k = 0$, то неравенство (10) следует из неравенств (6) и $\sin nt \geqslant 0$. При $k \in \mathbb{N}$ неравенство (10) следует из неравенств (6) и

$$(-1)^k \left(\sin x - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} \right) \geqslant 0 \qquad (x \geqslant 0).$$

Если $t \in \left[-\frac{\pi}{n}, 0\right]$, то при $k = 0$ неравенство (10) следует из неравенств (7) и $\sin nt \leqslant 0$. При $k \in \mathbb{N}$ неравенство (10) следует из неравенств (7) и

$$(-1)^k \left(\sin x - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} \right) \leqslant 0 \qquad (x \leqslant 0).$$

В случае $T^{(2k+1)}(x_0) = -\|T^{(2k+1)}\|$ применяем доказанное к $-T$. □

Следствие 3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$, *точка* x_0 *такая, что* $T^{(m)}(x_0) = \|T^{(m)}\|$. *Тогда если* $m = 2k$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$, *то*

$$T(x_0 + t) + T(x_0 - t) - 2 \sum_{l=0}^{k-1} \frac{T^{(2l)}(x_0)}{(2l)!} t^{2l} \geqslant \frac{2(-1)^k}{n^{2k}} \left(\cos nt - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{(2l)!} (nt)^{2l} \right) \|T^{(2k)}\|, \qquad (11)$$

если $m = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$, *то*

$$T(x_0 + t) - T(x_0 - t) - 2 \sum_{l=0}^{k-1} \frac{T^{(2l+1)}(x_0)}{(2l+1)!} t^{2l+1} \geqslant \frac{2(-1)^k}{n^{2k+1}} \left(\sin nt - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} (nt)^{2l+1} \right) \|T^{(2k+1)}\|. \qquad (12)$$

Для полиномов вида $T(x) = a \cos nx + b \sin nx$ *неравенства* (11) *и* (12) *обращаются в равенство.*

Доказательство. Применяя (3), имеем

$$T(x_0-t)-\sum_{l=0}^{2k-1}\frac{T^{(l)}(x_0)}{l!}(-1)^l t^l \geqslant \frac{(-1)^k}{n^{2k}}\left(\cos nt-\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(2l)!}(nt)^{2l}\right)\|T^{(2k)}\|. \tag{13}$$

Для доказательства (11) достаточно сложить неравенства (3) и (13).

Аналогично, используя (7), имеем

$$-T(x_0-t)+\sum_{l=0}^{2k}\frac{T^{(l)}(x_0)}{l!}(-1)^l t^l \geqslant \frac{(-1)^k}{n^{2k+1}}\left(\sin nt-\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}(nt)^{2l+1}\right)\|T^{(2k+1)}\|.$$

Сложив полученное неравенство и (6), получим (12). □

Замечание 1. В случае $m=1$ неравенство (12) содержится в работе [2].

Следствие 4. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $T\in H_n$, $m\in\mathbb{N}$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{n}\right]$, *точка* x_0 *такая, что* $|T^{(m)}(x_0)|=\|T^{(m)}\|$. *Тогда если* $m=2k$ $(k\in\mathbb{N})$, *то*

$$\left|T(x_0+t)+T(x_0-t)-2\sum_{l=0}^{k-1}\frac{T^{(2l)}(x_0)}{(2l)!}t^{2l}\right| \geqslant \frac{2}{n^{2k}}\left|\cos nt-\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(2l)!}(nt)^{2l}\right|\|T^{(2k)}\|, \tag{14}$$

если $m=2k+1$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$, *то*

$$\left|T(x_0+t)-T(x_0-t)-2\sum_{l=0}^{k-1}\frac{T^{(2l+1)}(x_0)}{(2l+1)!}t^{2l+1}\right| \geqslant \frac{2}{n^{2k+1}}\left|\sin nt-\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}(nt)^{2l+1}\right|\|T^{(2k+1)}\|. \tag{15}$$

Для полиномов вида $T(x)=a\cos nx+b\sin nx$ *неравенства* (14) *и* (15) *обращаются в равенства.*

Неравенства (14) и (15) доказываются аналогично неравенствам (5) и (10), соответственно.

Замечание 2. В случае $m = 1$ неравенство (15) содержится в [4, с. 227].

Следствие 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $h \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right]$, *точка* x_0 *такая, что* $T^{(2k)}(x_0) = \|T^{(2k)}\|$. *Тогда*

$$S_{2h,1}(T, x_0) - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{T^{(2l)}(x_0)}{(2l+1)!} h^{2l} \geqslant \frac{(-1)^k}{n^{2k+1}h} \left(\sin nh - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}(nh)^{2l+1} \right) \|T^{(2k)}\|, \tag{16}$$

$$S_{h,2}(T, x_0) - 2\sum_{l=0}^{k-1} \frac{T^{(2l)}(x_0)}{(2l+2)!} h^{2l} \geqslant \frac{2(-1)^{k+1}}{n^{2k+2}h^2} \left(\cos nh - \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(2l)!}(nh)^{2l} \right) \|T^{(2k)}\|. \tag{17}$$

Для полиномов вида $T(x) = a\cos nx + b\sin nx$ *неравенства* (16) *и* (17) *обращаются в равенства.*

Доказательство. Известно (см., [5, с. 100]), что

$$S_{h,r}(f, x) = \int_{-\frac{rh}{2}}^{\frac{rh}{2}} f(x+t)\psi_{h,r}(t)\, dt. \tag{18}$$

Чтобы установить (16) достаточно умножить неравенство (3) на $\psi_{2h,1}$, проинтегрировать от $-h$ до h и воспользоваться равенствами (18) и

$$\int_{-h}^{h} t^{2l+1}\psi_{2h,1}(t)\, dt = 0, \qquad \int_{-h}^{h} t^{2l}\psi_{2h,1}(t)\, dt = \frac{h^{2l}}{2l+1}, \quad (l \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\int_{-h}^{h} \psi_{2h,1}(t)\cos nt\, dt = \frac{\sin nh}{nh}.$$

Так как

$$\int_{-h}^{h} t^{2l+1}\psi_{h,2}(t)\,dt = 0, \quad \int_{-h}^{h} t^{2l}\psi_{h,2}(t)\,dt = \frac{2h^{2l}}{(2l+1)(2l+2)}, \quad (l \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\int_{-h}^{h} \psi_{h,2}(t)\cos nt\,dt = \frac{2(1-\cos nh)}{(nh)^2},$$

то умножив неравенство (3) на $\psi_{h,2}$, проинтегрировав от $-h$ до h, с учетом (18), имеем

$$S_{h,2}(T,x_0) - 2\sum_{l=0}^{k-1}\frac{T^{(2l)}(x_0)}{(2l+2)!}h^{2l} \geqslant \frac{2(-1)^k}{n^{2k}}\left(\frac{1-\cos nh}{(nh)^2} - \sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(2l+2)!}(nh)^{2l}\right)\|T^{(2k)}\|.$$

После несложных преобразований правой части доказанного неравенства получаем (17). □

Следствие 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, $k \in \mathbb{N}$, $h \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right]$, точка x_0 такая, что $|T^{(2k)}(x_0)| = \|T^{(2k)}\|$. Тогда*

$$\left|S_{2h,1}(T,x_0) - \sum_{l=0}^{k-1}\frac{T^{(2l)}(x_0)}{(2l+1)!}h^{2l}\right| \geqslant \frac{1}{n^{2k+1}h}\left|\sin nh - \sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}(nh)^{2l+1}\right|\|T^{(2k)}\|, \quad (19)$$

$$\left|S_{h,2}(T,x_0) - 2\sum_{l=0}^{k-1}\frac{T^{(2l)}(x_0)}{(2l+2)!}h^{2l}\right| \geqslant \frac{2}{n^{2k+2}h^2}\left|\cos nh - \sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l}{(2l)!}(nh)^{2l}\right|\|T^{(2k)}\|. \quad (20)$$

Для полиномов вида $T(x) = a\cos nx + b\sin nx$ неравенства (19) и (20) обращаются в равенства.

Теорема 3. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $b, h > 0$, $\frac{mhb}{2} \leqslant \frac{\pi}{n}$, $T \in H_n$, точка $x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что $|T^{(m)}(x_0)| = \|T^{(m)}\|$, Φ – неотрицательная суммируемая* *на* $[0, b]$ *функция. Тогда*

$$\left| \int\limits_0^b \delta_{th}^m(T, x_0)\Phi(t)\,dt \right|$$

$$\geqslant \frac{2}{h}\|T^{(m)}\| \int\limits_0^{\frac{mhb}{2}} \left(\int\limits_{\frac{2u}{m}}^{hb} t^{m-1}\psi_m\left(\frac{u}{t}\right)\Phi\left(\frac{t}{h}\right)\,dt \right)\cos nu\,du. \qquad (21)$$

Для полиномов вида $T(x) = \alpha\cos nx + \beta\sin nx$ *неравенство* (21) *обращается в равенство.*

Доказательство. Пусть $T^{(m)}(x_0) = \|T^{(m)}\|$ (если $T^{(m)}(x_0) = -\|T^{(m)}\|$, то рассуждение ведется для $-T$).

Положим

$$A = \int\limits_0^b \delta_{th}^m(T, x_0)\Phi(t)\,dt.$$

Воспользовавшись равенствами (18) и

$$S_{h,r}^{(r)}(f, x) = \frac{1}{h^r}\delta_h^r(f, x),$$

получим

$$\delta_t^m(T, x) = t^{m-1}\int\limits_{-\frac{mt}{2}}^{\frac{mt}{2}} T^{(m)}(x+u)\psi_m\left(\frac{u}{t}\right)du$$

$$= t^{m-1}\int\limits_0^{\frac{mt}{2}} \left(T^{(m)}(x+u) + T^{(m)}(x-u)\right)\psi_m\left(\frac{u}{t}\right)du.$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{h}\int\limits_0^{hb} \delta_t^m(T, x_0)\Phi\left(\frac{t}{h}\right)dt$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_0^{hb} t^{m-1}\left(\int_0^{\frac{mt}{2}} \left(T^{(m)}(x_0+u) + T^{(m)}(x_0-u)\right)\psi_m\left(\frac{u}{t}\right)du\right)\Phi\left(\frac{t}{h}\right)dt.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$A = \frac{1}{h} \int\limits_0^{\frac{mbh}{2}} \left(T^{(m)}(x_0+u) + T^{(m)}(x_0-u)\right) \times \left(\int\limits_{\frac{2u}{m}}^{hb} t^{m-1} \psi_m\left(\frac{u}{t}\right) \Phi\left(\frac{t}{h}\right) dt \right) du.$$

Остается воспользоваться неравенством (1).

Ясно, что для

$$T(x) = \alpha\cos nx + \beta \sin nx = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(nx+\varphi),$$

$$x_0 = -\frac{\varphi}{n} + \frac{\pi\left(1+(-1)^{m+1}\right)}{4n}$$

неравенство (21) при $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ обращается в равенство. $\square$

Получим ряд следствий, при этом в качестве Φ возьмем ядра Стеклова. Обозначим

$$C(m,b,r,h,n) = \frac{2}{h}\int\limits_0^{\frac{mhb}{2}} \left(\int\limits_{\frac{2u}{m}}^{hb} t^{m-1}\psi_m\left(\frac{u}{t}\right)\psi_r\left(\frac{t}{h}\right) dt\right) \cos nu\, du.$$

Следствие 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 < h \leqslant \frac{4\pi}{n}$, $T \in H_n$, точка $x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что $|T'(x_0)| = \|T'\|$. Тогда*

$$\|T'\| \leqslant \frac{n^2 h}{4(1-\cos\frac{nh}{4})} \left| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \delta^1_{th}(T,x_0)\, dt \right|.$$

Доказательство. Так как при $l \in \mathbb{N}$ (см., например, [6, с. 332]).

$$\int x^l \cos nx\, dx = \sum_{p=0}^{l} p!\, C_l^p \frac{x^{l-p}}{n^{p+1}} \sin\left(nx + p\frac{\pi}{2}\right) + C \quad (C \in \mathbb{R}), \tag{22}$$

то

$$I_1(c) = \int\limits_0^c u\cos nu\, du = \frac{nc\sin nc + \cos nc}{n^2} - \frac{1}{n^2}. \tag{23}$$

Таким образом,

$$C\left(1, \frac{1}{2}, 1, h, n\right) = \frac{2}{h} \int\limits_0^{\frac{h}{4}} \left(\int\limits_{2u}^{\frac{h}{2}} dt \right) \cos nu \, du = \frac{2}{h} \int\limits_0^{\frac{h}{4}} \left(\frac{h}{2} - 2u \right) \cos nu \, du$$

$$= \frac{2}{h} \left(\frac{h}{2n} \sin \frac{nh}{4} - 2I_1\left(\frac{h}{4}\right) \right) = \frac{4}{n^2 h} \left(1 - \cos \frac{nh}{4}\right).$$

Остается применить теорему 3 при $m = 1,\ b = \frac{1}{2},\ \Phi = \psi_1$. $\square$

Следствие 8. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, *точка* $x_0 \in \mathbb{R}$ *такая, что* $|T'(x_0)| = \|T'\|$. *Тогда*

$$\|T'\| \leqslant \frac{\pi n}{2} \left| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \delta^1_{\frac{4\pi t}{n}}(T, x_0) \, dt \right|.$$

Для доказательства достаточно положить $h = \frac{4\pi}{n}$ в следствии 7.

Следствие 9. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, *точка* $x_0 \in \mathbb{R}$ *такая, что* $|T'(x_0)| = \|T'\|$. *Тогда*

$$\|T'\| \leqslant \frac{\pi n}{2} \left| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \delta^1_{\frac{2\pi t}{n}}(T, x_0) \, dt \right|.$$

Для доказательства достаточно положить $h = \frac{2\pi}{n}$ в следствии 7.

Следствие 10. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $0 < h \leqslant \frac{2\pi}{n}$, $T \in H_n$, *точка* $x_0 \in \mathbb{R}$ *такая, что* $|T'(x_0)| = \|T'\|$. *Тогда*

$$\|T'\| \leqslant \frac{n^3 h^2}{4(nh - 2\sin\frac{nh}{2})} \left| \int\limits_0^1 \delta^1_{th}(T, x_0)(1 - t) \, dt \right|.$$

Доказательство. По равенству (22) имеем

$$I_2(c) = \int\limits_0^c u^2 \cos nu \, du = \frac{(n^2c^2 - 2)\sin nc + 2nc \cos nc}{n^3}. \qquad (24)$$

Таким образом, учитывая равенства (23) и (24), получаем

$$
\begin{aligned}
C\,(1,1,2,h,n) &= \frac{2}{h}\int\limits_0^{\frac{h}{2}}\left(\int_{2u}^{h}\left(1-\frac{t}{h}\right)\,dt\right)\cos nu\,du \\
&= \frac{1}{h^2}\int\limits_0^{\frac{h}{2}}(h-2u)^2\cos nu\,du \\
&= \frac{1}{h^2}\left(h^2\int\limits_0^{\frac{h}{2}}\cos nu\,du-4hI_1\left(\frac{h}{2}\right)+4I_2\left(\frac{h}{2}\right)\right) \\
&= \frac{4(nh-2\sin\frac{nh}{2})}{n^3h^2}.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Остается применить теорему 3 при $m=1,\ b=1,\ \Phi=\psi_2$. □

Следствие 11. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $T\in H_n$, *точка* $x_0\in\mathbb{R}$ *такая, что* $|T'(x_0)|=\|T'\|$. *Тогда*

$$
\|T'\|\leqslant\frac{\pi n}{2}\left|\int\limits_0^1\delta^1_{\frac{2\pi t}{n}}(T,x_0)(1-t)\,dt\right|.
$$

Для доказательства достаточно положить $h=\frac{2\pi}{n}$ в следствии 10.

Следствие 12. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $0<h\leqslant\frac{2\pi}{n}$, $T\in H_n$, *точка* $x_0\in\mathbb{R}$ *такая, что* $|T''(x_0)|=\|T''\|$. *Тогда*

$$
\|T''\|\leqslant\frac{n^3h}{nh-2\sin\frac{nh}{2}}\left|\int\limits_0^{\frac12}\delta^2_{th}(T,x_0)\,dt\right|.
$$

Доказательство. Аналогично (25) имеем

$$
\begin{aligned}
C\left(2,\frac12,1,h,n\right) &= \frac{2}{h}\int\limits_0^{\frac{h}{2}}\left(\int_u^{\frac{h}{2}}t\left(1-\frac{u}{t}\right)\,dt\right)\cos nu\,du \\
&= \frac{1}{4h}\int\limits_0^{\frac{h}{2}}(h-2u)^2\cos nu\,du=\frac{nh-2\sin\frac{nh}{2}}{n^3h}.
\end{aligned}
$$

Остается применить теорему 3 при $m = 2,\ b = \frac{1}{2},\ \Phi = \psi_1$. □

Следствие 13. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, *точка* $x_0 \in \mathbb{R}$ *такая, что* $|T''(x_0)| = \|T''\|$. *Тогда*

$$\|T''\| \leqslant n^2 \left| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \delta^2_{\frac{2\pi t}{n}}(T, x_0)\, dt \right|.$$

Для доказательства достаточно положить $h = \frac{2\pi}{n}$ в следствии 12.

Следствие 14. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $0 < h \leqslant \frac{\pi}{n}$, $T \in H_n$, *точка* $x_0 \in \mathbb{R}$ *такая, что* $|T''(x_0)| = \|T''\|$. *Тогда*

$$\|T''\| \leqslant \frac{n^4h^2}{n^2h^2 + 2\cos nh - 2} \left| \int\limits_0^1 \delta^2_{th}(T, x_0)(1-t)\, dt \right|.$$

Доказательство. Используя соотношение (22), имеем

$$I_3(c) = \int\limits_0^c u^3 \cos nu du = \frac{(n^3c^3 - 6nc)\sin nc + (3n^2c^2 - 6)\cos nc}{n^4} + \frac{6}{n^4}. \quad (26)$$

Таким образом, учитывая равенства (23), (24) и (26), получаем

$$\begin{aligned} &C\,(2,1,2,h,n) \\ &= \frac{2}{h}\int\limits_0^h \left(\int_u^h t\left(1 - \frac{u}{t}\right)\left(1 - \frac{t}{h}\right)\, dt \right) \cos nu\, du = \frac{1}{3h^2}\int\limits_0^h (h-u)^3 \cos nu\, du \\ &= \frac{1}{3h^2}\left(h^3 \int\limits_0^h \cos nu\, du - 3h^2 I_1(h) + 3h I_2(h) - I_3(h) \right) \\ &= \frac{2\cos nh + n^2h^2 - 2}{n^4h^2}. \end{aligned}$$

Остается применить теорему 3 при $m = 2,\ b = 1,\ \Phi = \psi_2$. □

Следствие 15. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, *точка* $x_0 \in \mathbb{R}$ *такая, что* $|T''(x_0)| = \|T''\|$. *Тогда*

$$\|T''\| \leqslant \frac{\pi^2n^2}{\pi^2 - 4} \left| \int\limits_0^1 \delta^2_{\frac{\pi t}{n}}(T, x_0)(1-t)\, dt \right|.$$

Для доказательства достаточно положить $h = \frac{\pi}{n}$ в следствии 14.

§2. Неравенства для коэффициентов Фурье

2.1. Прежде всего установим одну простую лемму, относящуюся к положительным рядам.

Лемма 1. *Пусть* $a_k \geqslant 0$ *при* $k \in \mathbb{N}$, $m, r \in \mathbb{R}$, $p \in (0,1)$, $r - mp < 0$, $q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^m a_k$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r a_k^p \leqslant (mp - r) \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-p(m+1)} q_n^p.$$

Доказательство. Положим

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} k^{mp} a_k^p,$$

если $n \geqslant 1$, $t_0 = 0$, $\alpha = r - mp$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{l} k^r a_k^p = \sum_{k=1}^{l} k^{\alpha}(t_k - t_{k-1}) = l^{\alpha} t_l + \sum_{k=1}^{l-1} \{k^{\alpha} - (k+1)^{\alpha}\} t_k. \tag{27}$$

Из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{k^{\alpha} - (k+1)^{\alpha}\} t_k$$

вытекает, что $\lim\limits_{l \to \infty} l^{\alpha} t_l = 0$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда по критерию Коши сходимости рядов существует такой номер n_{ε}, что для всех $n \geqslant n_{\varepsilon}$

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^{2n-1} \{k^{\alpha} - (k+1)^{\alpha}\} t_k \geqslant t_n n^{\alpha}(1 - 2^{\alpha}).$$

Поэтому из (27) следует равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r a_k^p = \sum_{k=1}^{\infty} \{k^{\alpha} - (k+1)^{\alpha}\} t_k. \tag{28}$$

Применяя неравенство Гельдера для сумм, находим, что $t_k \leqslant k^{1-p} q_k^p$. Далее,

$$\{k^\alpha - (k+1)^\alpha\} k^{1-p} = -\alpha k^{1-p} \int\limits_k^{k+1} t^{\alpha-1}\, dt \leqslant -\alpha \int\limits_k^{k+1} t^{\alpha-p}\, dt \leqslant -\alpha k^{\alpha-p}.$$

Сопоставляя эти неравенства и (28), получаем требуемое. □

Замечание 3. В связи с утверждениями типа леммы 1 см. [7, с. 306–308; 8].

2.2. Положим для $f \in L_1$

$$S_k(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{l=1}^{k} (a_l(f)\cos lx + b_l(f)\sin lx).$$

Теорема 4. *Пусть* $f \in L_1,\ p \in (0,1),\ m,n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ r - 2mp < 0.$ *Тогда*

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^r \rho_k^{2p}(f) \leqslant (2mp - r)\pi^{-p} \sum_{k=n}^{\infty} k^{r-p(2m+1)} \|S_k^{(m)}(f)\|_2^{2p}. \tag{29}$$

Доказательство. Пологая в лемме 1 $a_k = \rho_k^2(f)$, заменяя m на $2m$ и учитывая равенство

$$\|S_k^{(m)}(f)\|_2^2 = \pi \sum_{l=1}^{k} l^{2m} \rho_l^2(f),$$

приходим к (29) при $n = 1$. Осталось применить полученное неравенство к функции $f - S_{n-1}(f)$. □

2.3. Нам понадобятся два известных утверждения.

Теорема B (см. [4, с. 230]). *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$\|T^{(r)}\|_2 \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^r \left\|\delta^r_{\frac{\pi}{n}}(T)\right\|_2.$$

Обозначим через $W_p^{(r)}$ множество 2π-периодических непрерывных функций, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна на каждом отрезке, а r-я принадлежит L_p.

Теорема C (см. [9, с. 136]). *Пусть* $r \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty,\ f \in W_p^{(1)}.$ *Тогда*

$$\|\delta_h^{r+1}(f)\|_q \leqslant |h|^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \|\delta_h^r(f')\|_p.$$

Теорема 5. *Пусть* $1 \leqslant q \leqslant 2$, $p \in (0,1)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r - 2mp < 0$, $f \in L_q$. *Тогда*

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^r \rho_k^{2p}(f) \leqslant \frac{(2mp-r)\pi^{2p\left(1-\frac{1}{q}\right)}}{2^{(m+1)2p}} \sum_{k=n}^{\infty} k^{r-2p\left(1-\frac{1}{q}\right)} \|\delta_{\frac{\pi}{k}}^{m}(f)\|_q^{2p}. \tag{30}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_0(f) = 0$. Обозначим через $f^{(-1)}$ первообразную для f такую, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(-1)} = 0$. Используя теоремы B и C, имеем

$$\begin{aligned} \|S_k^{(m)}(f)\|_2 &= \|S_k^{(m+1)}(f^{(-1)})\|_2 \leqslant \left(\frac{k}{2}\right)^{m+1} \|\delta_{\frac{\pi}{k}}^{m+1}(S_k(f^{(-1)}))\|_2 \\ &\leqslant \left(\frac{k}{2}\right)^{m+1} \|\delta_{\frac{\pi}{k}}^{m+1}(f^{(-1)})\|_2 \leqslant \left(\frac{k}{2}\right)^{m+1} \left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{q}} \|\delta_{\frac{\pi}{k}}^{m}(f)\|_q. \end{aligned} \tag{31}$$

Осталось сопоставить (29) и (31). □

Замечание 4. При $q = 2$ неравенство (30) может быть заменено на более сильное соотношение

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^r \rho_k^{2p}(f) \leqslant (2mp-r)4^{-mp}\pi^{-p} \sum_{k=n}^{\infty} k^{r-p} \|\delta_{\frac{\pi}{k}}^{m}(f)\|_2^{2p}.$$

Для доказательства его достаточно сопоставить (29) и теорему B.

В заключение отметим, что §1 написан совместно обоими авторами, §2 – В. В. Жуком.

Литература

1. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды.* М., 1961.
2. С. Б. Стечкин, *Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна* — Докл. АН СССР **60**, No. 9 (1948), 1511–1514.
3. А. А. Конюшков, *Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье.* — Мат. сб. **44** (86), No. 1 (1958), 53–84.
4. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М., 1960.
5. В. В. Жук, В. Ф. Кузютин, *Аппроксимация функций и численное интегрирование,* СПб., 1995.
6. А. Ф. Тимофеев, *Интегрирование функций.* М.–Л., 1948.
7. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* М., 1948.
8. G. G. Hardy, J. E. Littlewood, *Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions.* — J. f. Math. **157** (1927), 141–158.

9. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.

Zhuk V. V., Puerov G. Yu. Some inequalities for trigonometric polynomials and Fourier coefficients.

The Bernstein inequalities for trigonometric polynomials are generalized. For the sums of Fourier coefficients, upper bounds with certain constants are obtained with respect to values that characterize the structural properties of functions.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 3 сентября 2014 г.

ОАО “Концерн Океанприбор”,
Чкаловский пр., д. 46,
197376, Санкт-Петербург, Россия;
С.-Петербургский НИУ ИТМО
Кронверкский пр., д. 49,
197101, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: puerov@gp11429.spb.edu, puerov@gmail.com