Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

Ю. В. Дымченко

УСЛОВИЕ МАЛОСТИ ОБХВАТА В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе [6] показано, что если $E - NED$-множество в комплексной плоскости, то его двумерная мера Лебега равна нулю и что любые две точки из его дополнения можно соединить кривой, не проходящей через E и такой, что её длина будет сколь угодно близка к расстоянию между этими двумя точками. В [5] приведено более сильное условие обхвата множества E относительно семейств прямых. В статье [2] приведено распространение этого результата на ёмкости и модули с весом Макенхаупта. В данной работе этот результат обобщается на финслеровы пространства.

Пусть G – ограниченная область в R^n, $F(x,\xi) : G \times R^n \to R^+$ – функция, дважды дифференцируемая по ξ при любом $x \in \bar{G}$, у которой частные производные по ξ до второго порядка включительно непрерывны на $G \times R^n$ и которая удовлетворяет условиям:

1) для любого $a > 0$ выполнено $F(x, a\xi) = aF(x,\xi)$ и $F(x,\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$;

2) для любых $\xi, \eta \in R^n$ квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^n g(x,\xi)\eta_i\eta_j$ положительно определена, где

$$g_{ij}(x,\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(x,\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}, \quad i,j = 1,2,\dots,n$$

являются непрерывными функциями по x и по ξ. Функция $F(x,\xi)$ определяет структуру финслерова многообразия [4].

Введём также функцию $H(x,\eta) : G \times R^n \to R^+$ как супремум евклидового скалярного произведения (ξ,η) по всем ξ, удовлетворяющим условию $F(x,\xi) \leqslant 1$.

Пусть $d\sigma$ – некий элемент финслерова объёма, непрерывно зависящий от $x \in G$ [8, глава 2].

Определим длину кривой посредством элемента длины $ds_F = F(x, dx)$.

Будем говорить, что кривая γ соединяет множество A с множеством B, если для какого-либо её параметрического представления

Ключевые слова: ёмкость коденсатора, модуль семейства кривых, условие малости обхвата, финслерово пространство.

$x(t)$, $t_0 < t < t_1$, выполняются условия

$$\liminf_{t\to t_0} d(x(t), A) = \liminf_{t\to t_1} d(x(t), B) = 0.$$

Пусть E_0, $E_1 \subset \bar{G}$ – замкнутые непересекающиеся множества. Упорядоченную тройку множеств (E_0, E_1, G) назовём конденсатором.

Пусть $p > 1$, а q такое, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Определим (p, F)-ёмкость конденсатора следующим образом:

$$C_{p,F}(E_0, E_1, G) = \inf \int\limits_G H(x, \nabla u)^p \, d\sigma,$$

где инфимум берётся по всем допустимым функциям u, т.е. по функциям, непрерывным и локально липшицевым в G, и если для любых точек $x_0 \in E_0 \cap \bar{G}$, $x_1 \in E_1 \cap \bar{G}$ выполняется

$$\limsup_{G\ni x\to x_0} u(x) \leqslant 0, \quad \liminf_{G\ni x\to x_1} u(x) \geqslant 1.$$

Пусть дано некоторое семейство Γ кривых в G. назовём (p, F)-модулем семейства Γ следующую величину:

$$M_{p,F}(\Gamma) = \inf \int\limits_G \rho^p \, d\sigma, \tag{1}$$

где инфимум берется по борелевским неотрицательным функциям ρ таким, что для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ выполнено $\int\limits_\gamma \rho F(x, dx) \geqslant 1$. Такие функции ρ называются допустимыми для модуля.

Введём в рассмотрение пространство функций $L^1_{p,F}(G)$, для которых почти всюду в G определён градиент и у которых норма

$$\|u\| = \left(\int\limits_G H(x, \nabla u)^p \, d\sigma \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть Γ – семейство кривых $u(x) = y$, $u : R^n \to R^{n-1}$, $y \in D \subset R^{n-1}$, заполняющих некоторую область G', компактно вложенную в G.

В работе [7] доказана формула коплощади для финслеровой метрики:

$$\int\limits_{G'} f(x) K(x) d\sigma = \int\limits_D \left(\int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} f(x) F(x, dx) \right) dy, \tag{2}$$

где $K(x) = C(du, dt^*, F^*_\sigma)$ – коякобиан отображения u.

Лемма 1. *Модуль семейства кривых* Γ, *введенного выше, вычисляется по формуле:*

$$M_{p,F}(\Gamma) = \int\limits_D \left(\int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x, dx) \right)^{1-p} dy. \tag{3}$$

Доказательство. Для любой допустимой функции ρ, используя неравенство Гёльдера, получим:

$$1 \leqslant \int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} \rho F(x, dx) = \int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} \rho K^{-\frac{1}{p}} \cdot K^{\frac{1}{p}} F(x, dx)$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} \rho^p K(x)^{-1} F(x, dx) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x, dx) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} \rho^p K(x)^{-1} F(x, dx) \geqslant \left(\int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x, dx) \right)^{1-p}.$$

Проинтегрируем по y и применим формулу (2):

$$\int\limits_{G'} \rho^p d\sigma = \int\limits_D \left(\int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} \rho^p K(x)^{-1} F(x, dx) \right) dy$$

$$\geqslant \int\limits_D \left(\int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x, dx) \right)^{1-p} dy.$$

В силу произвольности функции ρ,

$$M_{p,F}(\Gamma) \geqslant \int\limits_D \left(\int\limits_{G' \cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x, dx) \right)^{1-p} dy.$$

Рассмотрим допустимую функцию

$$\rho_0(x) = \frac{K(x)^{q-1}}{\int\limits_{G'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1}F(x,dx)},$$

где $y = u(x)$. Для неё, снова используя формулу коплощади, имеем:

$$\int\limits_{G'} \rho_0^p d\sigma = \int\limits_{G'} K(x)^q \Bigg(\int\limits_{G'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1}F(x,dx)\Bigg)^{-p} d\sigma$$

$$= \int\limits_{D} \Bigg(\int\limits_{G'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1}F(x,dx) \Bigg(\int\limits_{G'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1}F(x,dx)\Bigg)^{-p}\Bigg) dy$$

$$= \int\limits_{D} \Bigg(\int\limits_{G'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1}F(x,dx)\Bigg)^{1-p} dy.$$

Отсюда следует, что функция ρ_0 является экстремальной для данного семейства кривых и имеет место равенство, сформулированное в условии леммы. □

В дальнейшем будем считать, что все кривые семейства Γ являются достаточно гладкими для того, чтобы существовала ортогональная криволинейная система координат, содержащая Γ в качестве координатных линий.

Пусть дано компактное множество $E \subset G$. Будем говорить, что множество E удовлетворяет условию малости обхвата относительно семейства кривых Γ, если выполняется следующее условие. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любой борелевской функции ρ, локально ограниченной в $G \setminus E$, для почти всех кривых γ этого семейства (в смысле модуля) существует конечное число криволинейных интервалов (a_k, b_k) на кривой γ между ортогональными поверхностями $v(z) = a_k$ и $v(z) = b_k$ с концами из $\gamma \setminus E$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Эти интервалы покрывают множество $\gamma \cap E$, причем их суммарная длина в метрике F меньше ε, и таковы, что существуют кривые γ_k с концами a_k и b_k, не проходящие через E, и при этом

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} \rho F(x,dx) < \varepsilon.$$

Компакт $E \subset G$ будем называть $NC_{p,F}$-множеством, если для любых непересекающихся замкнутых множеств F_0,$F_1 \subset \bar{G}$ выполнено условие

$$C_{p,F}(F_0, F_1, G) = C_{p,F}(F_0, F_1, G \setminus E).$$

Теорема 1. *Для того чтобы компакт $E \subset G$ был $NC_{p,F}$-множеством, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условию малости обхвата относительно любого семейства кривых Γ, удовлетворяющего вышеприведенным условиям, а также относительно всех других семейств кривых, образующих с Γ криволинейную ортогональную координатную систему.*

Доказательство. Необходимость. Можно считать, что $E \subset G'$. Пусть ρ – борелевская неотрицательная локально ограниченная в $G \setminus E$ функция из $L_{p,F}(G)$, $P_{ab} = \{z \in G : a < v(z) < b\}$. Рассмотрим те значения y, для которых:

1) $\int\limits_{u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x, dx) < \infty$;

2) существует

$$\frac{d}{dy} \int \left(\int\limits_{u^{-1}(y) \cap P_{ab}} K(x)^{q-1} F(x, dx) \right)^{1-p} dy$$
$$= \left(\int\limits_{u^{-1}(y) \cap P_{ab}} K(x)^{q-1} F(x, dx) \right)^{1-p} < \infty;$$

3) существует

$$\frac{d}{dy} \int \left(\int\limits_{u^{-1}(y) \cap P_{ab}} \frac{\rho^p ds_F}{K(x)} \right) dy = \int\limits_{u^{-1}(y) \cap P_{ab}} \frac{\rho^p ds_F}{K(x)} < \infty;$$

4) $H_1(\{u^{-1}(y) \cap E) = 0$.

В 2) и 3) a, b – рациональные числа, $y \in R^{n-1}$, $\frac{d}{dy}$ – производная по системе параллелепипедов $Q_\delta = \{z = (z_1, \ldots, z_n) : y_i - \delta/2 \leqslant z_i \leqslant y_i + \delta/2, i = 1, \ldots, n-1\}$ (см. [3, гл. XIII, §1]).

Покажем, что эти условия выполняются для L_{n-1}-почти всех y. Для 1) это следует из конечности модуля и леммы 2, для 2) – из теоремы 3, для 3) – из того условия, что $\rho \in L_{p,F}(G)$, и леммы 2.

Докажем, что 4) выполнено для L_{n-1}-почти всех y. Дословно повторяя рассуждения из [2, теорема 7], покажем, что $L_n(E) = 0$. Отсюда получаем:

$$0 = \int\limits_E d\sigma = \int dy \int\limits_{u^{-1}(y)\cap E} K(x)^{-1} ds_F.$$

Поэтому для L_{n-1}-почти всех y

$$\int\limits_{u^{-1}(y)\cap E} K(x)^{-1} ds_F = 0.$$

Далее,

$$H_F^1(u^{-1}(y)\cap E) = \int\limits_{u^{-1}(y)\cap E} ds_F \leqslant$$

$$\left(\int\limits_{u^{-1}(y)\cap E} K(x)^{-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{u^{-1}(y)\cap E} K(x)^{q-1} F(x, dx)\right)^{\frac{1}{q}} = 0$$

для L_{n-1}-почти всех y.

Пусть y удовлетворяет условиям 1)–4). Рассмотрим соответствующую кривую $u^{-1}(y)$. Ее можно задать уравнениями $x_1 = x_1(t), ..., x_n = x_n(t)$, где параметр t зададим так, чтобы точка $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ являлась пересечением $u^{-1}(y)$ с ортогональной поверхностью $v(x) = t$. Покроем $u^{-1}(y) \cap E$ множествами $A_k = \{x \in u^{-1}(y) : a_k < t < b_k\}$, $k = \overline{1, m}$, где все a_k, b_k – рациональные числа и

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k} K(x)^{q-1} F(x, dx) < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k} \frac{\rho^p ds_F}{K(x)} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Фиксируем k. Пусть $\delta > 0$, $\Pi_\delta = \{x : u(x) = y', y' \in Q_\delta, a_k < t < b_k\}$. Рассмотрим семейство кривых Γ_k, соединяющих $v(x) = a_k$ с $v(x) = b_k$ в Π_δ и не проходящих через E. Так как E – $N_{p,F}$-компакт, то модуль этого семейства равен модулю всех кривых, соединяющих $v = a_k$ с $v = b_k$ в Π_δ, который, в свою очередь, не меньше модуля семейства Γ_k^1

кривых $\gamma_z^k = \{x : u(x) = z, a_k < t < b_k\}$, где $z \in Q_\delta$. Таким образом, имеем по лемме 3

$$M_{p,F}(\Gamma_k) \geqslant M_{p,F}(\Gamma_k^1) = \int\limits_{Q_\delta} \left(\int\limits_{\gamma_z^k} K(x)^{q-1} F(x, dx) \right)^{1-p} dz. \qquad (4)$$

Пусть $L = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma_k} \int\limits_\gamma \rho ds_F$. Тогда функция ρ/L допустима для модуля семейства Γ_k и поэтому

$$M_{p,F}(\Gamma_k) \leqslant L^{-p} \int\limits_{\Pi_\delta} \rho^p d\sigma. \qquad (5)$$

Соединяя (4) и (5), получим:

$$L^{-p} \int\limits_{\Pi_\delta} \rho^p d\sigma \geqslant \int\limits_{Q_\delta} \left(\int\limits_{\gamma_z^k} K(x)^{q-1} F(x, dx) \right) dz.$$

При достаточно малых δ, используя неравенство Юнга, имеем:

$$L^{-p} \left(\int\limits_{\gamma_y^k} \frac{\rho^p ds_F}{K(x)} + \frac{\varepsilon}{8m} \right) \geqslant \left(\int\limits_{\gamma_y^k} K(x)^{q-1} F(x, dx) + \frac{\varepsilon}{8m} \right)^{1-p},$$

$$L^p \leqslant \left(\int\limits_{\gamma_y^k} \frac{\rho^p ds_F}{K(x)} + \frac{\varepsilon}{8m} \right) \left(\int\limits_{\gamma_y^k} K(x)^{q-1} F(x, dx) + \frac{\varepsilon}{8m} \right)^{p-1},$$

$$L \leqslant \left(\int\limits_{\gamma_y^k} \frac{\rho^p ds_F}{K(x)} + \frac{\varepsilon}{8m} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\gamma_y^k} K(x)^{q-1} F(x, dx) + \frac{\varepsilon}{8m} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \left(\int\limits_{\gamma_y^k} \frac{\rho^p ds_F}{K(x)} + \frac{\varepsilon}{8m} \right) + \frac{1}{q} \left(\int\limits_{\gamma_z^k} K(x)^{q-1} F(x, dx) + \frac{\varepsilon}{8m} \right)$$

$$= \frac{1}{p} \int\limits_{A_k} \frac{\rho^p ds_F}{K(x)} + \frac{1}{q} \int\limits_{A_k} K(x)^{q-1} F(x, dx) + \frac{\varepsilon}{8m}.$$

По определению инфимума, найдется кривая $\gamma_k' \in \Gamma_k$ такая, что

$$\int\limits_{\gamma_k'} \rho ds_F \leqslant L + \frac{\varepsilon}{8m} \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{A_k} \frac{\rho^p ds_F}{K(x)} + \frac{1}{q} \int\limits_{A_k} K(x)^{q-1} F(x, dx) + \frac{\varepsilon}{4m}.$$

В силу локальной ограниченности ρ на $G \setminus E$ при достаточно малом δ существуют кривые γ_k^1, γ_k^2, не проходящие через E, которые соединяют $t = a_k$ и $t = b_k$ на $u^{-1}(y)$ с соответствующими концами кривой γ_k' и такие, что

$$\int\limits_{\gamma_k^1} \rho ds_F + \int\limits_{\gamma_k^2} \rho ds_F < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Пусть $\gamma_k \subset \gamma_k^1 \cup \gamma_k' \cup \gamma_k^2$ – кривая, начало и конец которой лежат на $u^{-1}(y)$. Тогда для полученных γ_k имеем:

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^m \gamma_k} \rho ds_F \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^m A_k} \frac{\rho^p ds_F}{K(x)} + \frac{1}{q} \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^m A_k} K(x)^{q-1} F(x, dx) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$+ \sum_{k=1}^m \left(\int\limits_{\gamma_k^1} \rho ds_F + \int\limits_{\gamma_k^2} \rho ds_F \right) \leqslant \frac{1}{p}\frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{q}\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. В работе [2] доказан следующий факт: E является $NC_{p,w}$-множеством тогда и только тогда, когда любая функция из $L^1_{p,w}(G \setminus E)$ продолжается единственным образом до функции из $L^1_{p,w}(G)$. Для получения этого результата используется теорема о плотности линейной оболочки экстремальных функций, доказательство которой не зависит от конкретного вида ёмкости, а зависит только от таких её общих свойств, как монотонность и непрерывность. Следовательно, этот факт имеет место и в финслеровом случае.

Легко видеть, что достаточно доказать следующее утверждение: для любой области G', компактно вложенной в G, любую функцию из $L^1_{p,F}(G' \setminus E)$ можно продолжить единственным образом до функции из $L^1_{p,F}(G')$. Но на G' и $G' \setminus E$ классы L^1_p и $L^1_{p,F}$ совпадают, а длины ds и ds_F эквивалентны в силу свойств функции F. Поэтому множество E удовлетворяет в G' евклидову условию малости обхвата. Следовательно, любая функция из $L^1_p(G' \setminus E)$ продолжается единственным образом до функции из $L^1_p(G')$.

Теорема доказана. □

Литература

1. В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, М., 1983.

2. И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 52–82.
3. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, СПб.: Лань, 1999.
4. Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, М., 1981.
5. В. А. Шлык, *Условие ε-обхвата для N-компактов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 154–161.
6. L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets.* — Acta Math. **83** (1950), 101–129.
7. D. Cibotaru, J. de Lira, *A note on the area and coarea formulas*, `http://arxiv.org/abs/1305.2968`.
8. Z. Shen, *Lectures on Finsler geometry*, Series on Multivariate Analysis Series, World Scientific Publishing Company, Inc., 2001.

Dymchenko Yu. V. A condition of smallness of girth on Finsler's space.

In this paper, a condition of smallness of girth relatively some curve families for removable sets on Finsler's space is stated.

Дальневосточный
федеральный университет,
ул. Суханова 8,
690000 Владивосток, Россия
E-mail: `dymch@mail.ru`

Поступило 1 августа 2014 г.