Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

В. Н. Дубинин

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МОДУЛЕЙ ФУНКЦИЙ, p-ЛИСТНЫХ В СРЕДНЕМ ПО ОКРУЖНОСТИ

Введение

Пусть ω – вещественное число, $0 < \omega < 1$, и пусть f – голоморфная и однолистная в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$f(0) = 0, \quad f(\omega) = \omega. \tag{1}$$

В работе [1] Монтель поставил задачу о нахождении точных оценок модуля $|f(z)|$ при фиксированном $z \in U$. Решение этой задачи содержится в более общем результате, установленном впоследствии Кшижом [2]. В настоящее время равенства (1) принято называть нормировкой Монтеля [3, §3.4]. Решению эстремальных задач в подклассах голоморфных функций, удовлетворяющих условиям (1), посвящена обширная литература (см., например, [3–9]). Естественно поставить вопрос об оценках $|f(z)|, z \in U$, для неоднолистных функций. Пусть функция f голоморфна в круге U и отлична от постоянной, и пусть $n(w, f)$ означает число корней уравнения $f(z) = w$ в U. Функция f называется p-листной в среднем по окружности, если для любого $\rho > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} n(\rho e^{i\varphi}, f) d\varphi \leqslant p$$

(см. [10, гл. 5]). Обозначим через $M_p(\omega)$, $p \geqslant 1$, класс голоморфных в круге U функций f, p-листных в среднем по окружности и нормированных условиями (1). Применение техники круговой симметризации на римановых поверхностях, развитой Дженкинсом [11], стандартным путем ведет к следующим неравенствам для функций f класса $M_1(\omega)$:

$$|k_1(z)| \leqslant |f(z)| \leqslant |k_2(z)|, \quad z \in (-1, 0),$$

Ключевые слова: голоморфная функция, p-листная функция, p-листная в среднем по окружности функция, полином Чебышева, симметризация.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00022).

где

$$k_1(z) = \frac{z(1-\omega)^2}{(1-z)^2}, \quad k_2(z) = \frac{z(1+\omega)^2}{(1+z)^2}.$$

Остается открытым вопрос о справедливости аналогичных оценок в классах $M_p(\omega)$ при $p \geqslant 2$. Заметим, что в этом случае не существует нетривиальных оценок модуля $|f(z)|$, $z \in (-1, 0)$, без дополнительных ограничений на функцию f. Действительно, пусть $T_p(z) = 2^{p-1}z^p + \ldots$ – полином Чебышева первого рода степени p. При фиксированных ω, r $(0 < r < 1)$ и $p \geqslant 2$ рассмотрим функцию

$$f(z) = \omega \frac{T_p\left[\frac{2z(1+r)^2}{r(1-z)^2}\cos\frac{\pi}{2p} + \cos\frac{\pi}{2p}\right]}{T_p\left[\frac{2\omega(1+r)^2}{r(1-\omega)^2}\cos\frac{\pi}{2p} + \cos\frac{\pi}{2p}\right]}.$$

Легко видеть, что $f \in M_p(\omega)$. Однако $f(-r) = 0$ и, следовательно, в классе $M_p(\omega)$ не существует нетривиальных оценок $|f(z)|$ снизу при $z \in (-1, 0)$. С другой стороны, вновь при фиксированных ω, r и $p \geqslant 2$ и любом $\lambda > 0$ функция

$$f(z) = \lambda T_p\left[\frac{z(1+\omega)^2}{\omega(1+z)^2}\left(T_p^{-1}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) + \cos\frac{\pi}{2p}\right) - \cos\frac{\pi}{2p}\right]$$

также принадлежит классу $M_p(\omega)$. Здесь и далее $T_p^{-1}(\cdot)$ означает непрерывную ветвь функции, обратной полиному Чебышева T_p, заданную на луче $[0, +\infty]$ и переводящую этот луч на луч $[\cos(\pi/(2p)), +\infty]$. При $\lambda \to \infty$ имеем $|f(-r)| \to \infty$. Следовательно, в классе $M_p(\omega)$ не существует оценки $|f(z)|$ сверху для $z \in (-1, 0)$. В этой связи введем дополнительное ограничение на характер накрытия функцией f некоторых концентрических окружностей. Именно, при фиксированном λ, $0 < \lambda < \infty$, определим подкласс $M_p(\omega, \lambda)$ всех функций класса $M_p(\omega)$, отображающих круг U на риманову поверхность $\mathscr{R}(f)$, обладающую следующим свойством. Для всех ρ, $\lambda \leqslant \rho < \infty$, любая замкнутая жордановая кривая на поверхности $\mathscr{R}(f)$, лежащая над окружностью $|w| = \rho$ и не проходящая через точки разветвления $\mathscr{R}(f)$, p-кратно покрывает эту окружность. В работах [12,13] рассматривался, в частности, класс $D_p(\lambda)$, $p \geqslant 2$, $\lambda \geqslant 0$, голоморфных и p-листных в круге U функций вида

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots,$$

для которых при любом $\rho > \lambda$[1] множество уровня $\{z \in U : |f(z)| = \rho\}$ не содержит замкнутой кривой. Класс $D_p(0)$ состоит из голоморфных p-листных в круге U функций, не имеющих в этом круге нулей (см. [10, §5.1]). Нетрудно видеть, что функция f класса $D_p(\lambda)$ с коэффициентом $a_0 = 0$ с точностью до множителя принадлежит классу $M_p(\omega, \lambda')$ при некотором λ'. Другие классы функций, p-листных в среднем по окружности, рассмотрены в монографиях [10, 11]. В данной заметке получены точные оценки модуля $|f(z)|$ при некоторых $z \in (-1, 0)$ для функций класса $M_p(\omega, \lambda)$ снизу и сверху. Доказательство теорем опирается на принцип круговой симметризации, предложенной в [14] и [15].

§1. Круговая симметризация

Всюду ниже под римановой поверхностью понимается поверхность $\mathscr{R}$, склеенная из конечного или счетного числа областей замкнутой комплексной плоскости таким образом, чтобы выполнялись условия: проекция каждой точки поверхности $\mathscr{R}$ совпадает с точкой склеиваемой области; окрестность каждой точки $\mathscr{R}$ представляет собой или однолистный круг, или конечнолистный круг с единственной точкой разветвления в его центре. Пусть $\gamma(\rho) = \{w : |w| = \rho\}$, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$. Обозначим через $\mathfrak{R}_p$, $p \geqslant 1$, совокупность всех римановых поверхностей $\mathscr{R}$, лежащих над комплексной w-сферой и удовлетворяющих следующим условиям:

(1) линейная мера всех дуг на поверхности $\mathscr{R}$, лежащих над любой окружностью $\gamma(\rho)$, с учетом кратности не превосходит $2\pi p\rho$, $0<\rho<\infty$;

(2) для всех ρ, $1 \leqslant \rho < \infty$, любая замкнутая жордановая кривая на поверхности $\mathscr{R}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$ и не проходящая через точки разветвления $\mathscr{R}$, p-кратно покрывает эту окружность.

Важным для нас частным случаем поверхности класса $\mathfrak{R}_p$ является риманова поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ функции, обратной полиному Чебышева $T_p(z)$. Приведем описание этой поверхности в случае $p \geqslant 2$. Напомним, что в терминах конформных отображений полином $T_p(z)$ можно определить как суперпозицию обратной функции Жуковского, степенной функции и функции Жуковского:

$$T_p(z) = \frac{1}{2}\left(\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)^p + \left(z - \sqrt{z^2-1}\right)^p\right), \qquad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

[1] В [12, 13] в определении класса $D_p(\lambda)$ допущена опечатка: вместо $\rho > \lambda$ стоит $\rho \geqslant \lambda$.

Гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 1$, проходящие через критические точки полинома Чебышева $z = \cos(k\pi/p)$, $k = 1, \dots, p-1$, разбивают z-плоскость на p попарно непересекающихся областей. Обозначим эти области, пронумерованные справа налево, как $B_1, \dots, B_p$. Полином T_p отображает область B_1 конформно и однолистно на область D_1 – w-плоскость с разрезом по лучу $L^- := [-\infty, -1]$. Области $B_2, \dots,$ B_{p-1} отображаются этим полиномом на области $D_2, \dots, D_{p-1}$ – w-плоскости с разрезами вдоль лучей L^- и $L^+ := [1, +\infty]$. Наконец, область B_p отображается на область D_p – w-плоскость с разрезом по лучу L^- в случае четного p и по лучу L^+ в случае, когда p нечетное. Риманову поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ можно получить склеиванием областей D_k, $k = 1, \dots, p$, следующим образом. Область D_1 склеивается "крест на крест" с областью D_2 по берегам разрезов вдоль луча L^-. Область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль луча L^+ и т.д. Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль луча L^- в случае четного p и луча L^+ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k, рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, будем обозначать буквами $\mathscr{D}_k$ соответственно, $k = 1, \dots, p$. Обозначим через $\mathscr{L}$ луч, лежащий на листе $\mathscr{D}_1$ над лучом $[0, +\infty]$.

Рассмотрим теперь произвольную поверхность $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$, $p \geqslant 2$. Пусть $\mathscr{B}$ – открытое множество на $\mathscr{R}$. Симметризация Sym преобразует множество $\mathscr{B}$ в множество $\mathrm{Sym}\mathscr{B}$, лежащее на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ и обладающее следующими свойствами. Если при данном ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, над "окружностью" $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{B}$, то над ней нет также и точек множества $\mathrm{Sym}\mathscr{B}$. Если множество $\mathscr{B}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, p-кратно, то множество $\mathrm{Sym}\mathscr{B}$ также покрывает $\gamma(\rho)$ p-кратно. Если $\mathscr{B}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leqslant \rho < 1$, l-кратно, $l \leqslant p$, то часть множества $\mathrm{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1, \dots, \mathscr{D}_l$. В остальных случаях при $1 \leqslant \rho < \infty$ часть множества $\mathrm{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, является открытой дугой[2] на $\mathscr{R}(T_p)$ с центром на луче $\mathscr{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathscr{B}(\rho) := \{W \in \mathscr{B} : |\mathrm{pr}W| = \rho\}$. При $0 < \rho < 1$ часть $\mathrm{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, представляет собой совокупность из m окружностней $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ и открытой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k = \Gamma_k(\mathscr{B}, \rho) \subset \mathscr{D}_k$,

[2]В случае $\rho > 1$ это открытая жордановая дуга, а при $\rho = 1$ данная дуга может иметь точки самоприкасания.

$k = 1, \ldots, m+1$, $0 \leqslant m \leqslant p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{B}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$. Здесь количество окружностей m зависит от меры множества $\mathscr{B}(\rho)$. Если указанная мера меньше $2\pi\rho$, то необходимо $m = 0$ и множество окружностей пусто. Результат симметризации $\mathrm{Sym}\mathscr{E}$ замкнутого множества $\mathscr{E} \subset \mathscr{R}$ также лежит на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ и определяется следующим образом. Если при данном ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{E}$, то над ней нет также и точек множества $\mathrm{Sym}\mathscr{E}$. Если множество $\mathscr{E}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, p-кратно, то множество $\mathrm{Sym}\mathscr{E}$ также покрывает $\gamma(\rho)$ p-кратно. Если $\mathscr{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leqslant \rho < 1$, l-кратно, $l \leqslant p$, то часть множества $\mathrm{Sym}\mathscr{E}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_l$. В остальных случаях часть множества $\mathrm{Sym}\mathscr{E}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho < \infty$, является замкнутой дугой (т.е. дугой, содержащей свои концы) на $\mathscr{R}(T_p)$ с центром на луче $\mathscr{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathscr{E}(\rho) := \{W \in \mathscr{E} : |\mathrm{pr}W| = \rho\}$ (в случае, когда данная мера равна нулю, соответсвующая дуга является точкой на луче $\mathscr{L}$). Часть $\mathrm{Sym}\mathscr{E}$ над $\gamma(\rho)$, $0 < \rho < 1$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ и замкнутой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k \subset \mathscr{D}_k$, $k = 1, \ldots, m+1$, $0 \leqslant m \leqslant p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{E}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$ (если указанная мера равна $2\pi\rho m$, где m – целое неотрицательное число, то дуга Γ_{m+1} является точкой).

Конденсатором на поверхности $\mathscr{R}$ называют упорядоченную пару множеств $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$, где $\mathscr{B}$ – открытое подмножество $\mathscr{R}$, а $\mathscr{E}$ – компакт в $\mathscr{B}$. Множество $\mathscr{B}\backslash\mathscr{E}$ назовем полем конденсатора $\mathscr{C}$. Положим по определению

$$\mathrm{Sym}\mathscr{C} = (\mathrm{Sym}\mathscr{B}, \mathrm{Sym}\mathscr{E}).$$

Емкость $\mathrm{cap}\mathscr{C}$ конденсатора $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ определяется равенством

$$\mathrm{cap}\mathscr{C} = \inf \int\limits_{\mathscr{B}} |\nabla \mathscr{V}|^2 d\sigma,$$

где нижняя грань берется по всем *допустимым* функциям $\mathscr{V}$, т.е. вещественнозначным функциям $\mathscr{V}$, финитным в $\mathscr{B}$, равным единице на $\mathscr{E}$ и удовлетворющим условию Липшица локально в $\mathscr{B}$. Если существует функция $\mathcal{P}$, непрерывная в $\overline{\mathscr{B}}$, равная нулю на $\partial\mathscr{B}$, единице на $\mathscr{E}$ и гармоничная в поле $\mathscr{B}\backslash\mathscr{E}$, то ее называют потенцальной функцией

конденсатора $\mathscr{C}$. Из принципа Дирихле следует, что в этом случае

$$\mathrm{cap}\mathscr{C} = \int\limits_{\mathscr{B}\setminus\mathscr{E}} |\nabla\mathcal{P}|^2 d\sigma.$$

Пусть область $\mathscr{G}$ принадлежит поверхности $\mathscr{R}$, а область $\widetilde{\mathscr{G}}$ – поверхности $\widetilde{\mathscr{R}}$. Биективное отображение $\Phi : \mathscr{G} \to \widetilde{\mathscr{G}}$ называется *движением*, если при этом отображении сохраняется расстояние, т.е. для любых двух точек $W, W' \in \mathscr{G}$ выполняется равенство

$$d_{\mathscr{G}}(W, W') = d_{\widetilde{\mathscr{G}}}(\Phi(W), \Phi(W')),$$

где $d_{\mathscr{G}}(W, W')$ – расстояние между точками W и W' по области $\mathscr{G}$. *Вращением* (*поворотом*) области $\mathscr{G}$ на $\widetilde{\mathscr{G}}$ на угол θ вокруг начала координат назовем движение $\Phi_\theta : \mathscr{G} \to \widetilde{\mathscr{G}}$, при котором для любых $W \in \mathscr{G}$ выполняется

$$\mathrm{pr}\Phi_\theta(W) = e^{i\theta}\mathrm{pr}W,$$

где θ – вещественное число.

В работе [15] установлен следующий результат.

Утверждение 1. *Для любого конденсатора $\mathscr{C}$ на поверхности $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$ справедливо неравенство*

$$\mathrm{cap}\mathscr{C} \geqslant \mathrm{cap}Sym\mathscr{C}. \tag{2}$$

Если, дополнительно, поле конденсатора $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ связное и существует потенциальная функция этого конденсатора, то равенство в (2) *достигается только в следующих случаях:*

(i) *поле конденсатора $\mathscr{C}$ совпадает с полем конденсатора* $\mathrm{Sym}\mathscr{C}$ *с точностью до поворота вокруг начала координат,*

(ii) *при некоторых s, t и l, $0 < s < t < \infty$, $1 < l \leqslant p$, поле конденсатора $\mathscr{C}$ l-кратно накрывает круговое кольцо $s < |w| < t$ так, что над каждой граничной окружностью этого кольца расположены либо только граничные точки множества $\mathscr{B}$, либо только граничные точки $\mathscr{E}$.*

Заметим, что в отличие от плоского случая равенство в (2) нельзя описать в терминах пластин конденсатора $\mathscr{C}$ (т.е. множеств $\overline{\mathscr{R}}\setminus\mathscr{B}$ и $\mathscr{E}$), так как сдвиг точки разветвления в поле конденсатора может привести как к увеличению так и к уменьшению его емкости.

§2. Оценка модуля функции снизу

Обозначим через $\mathscr{R}(\lambda T_p)$ риманову поверхность функции, обратной функции $\lambda T_p(z)$, $0 < \lambda < \infty$. Понятно, что $\mathscr{R}(\lambda T_p)$ получается из $\mathscr{R}(T_p)$ растяжением с коэффициентом λ. Пусть $\mathscr{D}_k(\lambda)$ означает лист на поверхности $\mathscr{R}(\lambda T_p)$, полученный из листа $\mathscr{D}_k$ с помощью этого растяжения. Из описания поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ в §1 видно, что при любом λ, $0 < \lambda < \infty$, функция

$$f_1(z) \equiv f_1(z;\omega,p,\lambda) = \lambda T_p\left[\frac{z(1-\omega)^2}{\omega(1-z)^2}\left(T_p^{-1}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) - \cos\frac{\pi}{2p}\right) + \cos\frac{\pi}{2p}\right]$$

принадлежит классу $M_p(\omega,\lambda)$. Кроме того, при

$$\lambda < \lambda(\omega,p) := \frac{\omega}{T_p\left[\frac{1+6\omega+\omega^2}{(1-\omega)^2}\cos\frac{\pi}{2p}\right]}$$

функция f_1 отображает круг U на поверхность $\mathscr{R}(\lambda T_p)$, разрезанную вдоль луча на листе $\mathscr{D}_p(\lambda)$, лежащего над лучом $0 < f_1(-1) \leqslant u \leqslant \infty$ при p четном и $-\infty \leqslant u \leqslant f_1(-1) < 0$ при нечетном p. Пусть $x(\omega,p,\lambda)$ – единственный корень уравнения

$$\frac{x(1-\omega)^2}{\omega(1-x)^2}\left(T_p^{-1}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) - \cos\frac{\pi}{2p}\right) + \cos\frac{\pi}{2p} = -\cos\frac{\pi}{2p} \tag{3}$$

на промежутке $-1 < x < 0$. Ясно, что $f_1(x(\omega,p,\lambda)) = 0$ и, следовательно, нетривиальная оценка снизу для $|f(x)|$ невозможна при $x = x(\omega,p,\lambda)$. Кроме того, она невозможна для тех значений x, при которых левая часть (3) равна $\cos[(2k-1)\pi/(2p)]$, $k = 1,\dots,p$. В этом случае f_1 вновь обращается в ноль. Пример функции f_1 показывает также, что нетривиальная оценка $|f(x)|$ снизу невозможна ни на каком промежутке $(-1,x_0)$, $-1 < x_0 < 0$, если не фиксировать число p, и если не ограничивать число λ сверху. Тем не менее, справделива

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит классу $M_p(\omega,\lambda)$, $p \geqslant 2$, и пусть $\lambda < \lambda(\omega,p)$. Тогда для любого $z \in (-1,x(\omega,p,\lambda))$ справедливо неравенство*

$$|f(z)| \geqslant |f_1(z)|. \tag{4}$$

Равенство в (4) имеет место лишь в случае, когда $f = f_1$.

Доказательство. Предположим, что для некоторой функции f класса $M_p(\omega,\lambda)$, $\lambda < \lambda(\omega,p)$, в некоторой точке $z = -r$, $-x(\omega,p,\lambda) < r < 1$,

выполняется неравенство

$$|f(-r)| \leqslant |f_1(-r)|. \tag{5}$$

Рассмотрим в плоскости $\mathbb{C}$ конденсатор

$$C_r = (B_r, E),$$

где $B_r = U \backslash [-1, -r]$, $E = [0, \omega]$. Функция $F = f/\lambda$ отображает этот конденсатор на конденсатор

$$\mathscr{C}_r = (\mathscr{B}_r, \mathscr{E}),$$

$\mathscr{B}_r = F(B_r)$, $\mathscr{E} = F(E)$, лежащий на поверхности $\mathscr{R}(F)$ класса $\mathfrak{R}_p$. Здесь и далее отображение в w-плоскость и на соответствующую риманову поверхность обозначается одной буквой. Функция $F_1 = f_1/\lambda$ отображает конденсатор C_r на конденсатор

$$\mathscr{C}_r^1 = (\mathscr{B}_r^1, \mathscr{E}^1)$$

на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$. Множество $\mathscr{B}_r^1$ есть поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ с разрезом по лучу на листе $\mathscr{D}_p$, лежащему над $f_1(-r)/\lambda \leqslant u \leqslant \infty$ при четном p и над $-\infty \leqslant u \leqslant f_1(-r)/\lambda$ при p нечетном. Множество $\mathscr{E}^1$ есть отрезок на листе $\mathscr{D}_1$ над отрезком $[0, \omega/\lambda]$. Ввиду конформной инвариантности емкости и утверждения 1 выполняется

$$\operatorname{cap} \mathscr{C}_r^1 = \operatorname{cap} C_r = \operatorname{cap} \mathscr{C}_r \geqslant \operatorname{cap} \operatorname{Sym} \mathscr{C}_r. \tag{6}$$

Справедливы включения:

$$\operatorname{Sym} \mathscr{E} \supset \mathscr{E}^1, \quad \operatorname{Sym} \mathscr{B}_r \subset \mathscr{B}_r^1. \tag{7}$$

Действительно, множество $\mathscr{E}$ представляет собой кусочно гладкую кривую на поверхности $\mathscr{R}(F)$, соединяющую точки $F(0)$ и $F(\omega)$, причем $\operatorname{pr} F(0) = 0$, $\operatorname{pr} F(\omega) = \omega/\lambda$. Поэтому над каждой окружностью $\gamma(\rho)$, $0 \leqslant \rho \leqslant \omega/\lambda$, расположена по крайней мере одна точка множества $\mathscr{E}$. Из определения симметризации замкнутого множества следует, что каждая точка луча $\mathscr{L}$ над отрезком $[0, \omega/\lambda]$ принадлежит множеству $\operatorname{Sym} \mathscr{E}$. Таким образом, выполняется левое включение в (7). Множества $\mathscr{B}_r^1$ и $\operatorname{Sym} \mathscr{B}_r$ лежат на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$. Если

$$\operatorname{Sym} \mathscr{B}_r \not\subset \mathscr{B}_r^1,$$

то существует такое число ρ_1, $\rho_1 > |f_1(-r)/\lambda|$, что окружность $\gamma(\rho_1)$ покрывается множеством $\operatorname{Sym} \mathscr{B}_r$ p-кратно. Следовательно, множество $\mathscr{B}_r$ также покрывает эту окружность p-кратно. С другой стороны, над окружностью $\gamma(|f(-r)|/\lambda)$ есть граничные точки множества $\mathscr{B}_r$ и,

поскольку $\mathscr{B}_r$ не покрывает бескнoченость, то над некоторой окружностью $\gamma(\rho_2)$, $\rho_2 > \rho_1$, также есть точки границы $\mathscr{B}_r$. Учитывая предположение (5), имеем

$$|f(-r)|/\lambda < \rho_1 < \rho_2,$$

что противоречит связности границы $\mathscr{B}_r$. Итак, правое включение в (7) также выполняется. Из включений (7) и монотонности емкости кондесатора получаем

$$\operatorname{cap} \operatorname{Sym} \mathscr{C}_r \geqslant \operatorname{cap} \mathscr{C}_r^1. \tag{8}$$

Вместе с (6) этот факт приводит к заключению, что в (6) и (8) имеет место знак равенства. Из равенства в (8) следует, что поле конденсатора $\operatorname{Sym}\mathscr{C}_r$ совпадает с полем конденсатора $\mathscr{C}_r^1$ и представляет собой двусвязную область на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$. Ввиду утверждения 1 и равенства в (6) поле конденсатора $\mathscr{C}_r$ совпадает с полем конденсатора $\operatorname{Sym}\mathscr{C}_r = \mathscr{C}_r^1$ с точностью до поворота. Поскольку при повороте (движении) точки разветвления поверхности переходят в точки разветвления и вид листов поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ должен сохраняться, то с учетом нормировки (1) возможно лишь тождественное отображение, либо поворот на угол, кратный $2\pi(p-1)$. В первом случае $f \equiv f_1$. Если же выполняется второй случай, то при четном p множество $\mathscr{B}_r$ есть поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ с разрезом по лучу на листе $\mathscr{D}_1$, лежащему над $f_1(-r)/\lambda \leqslant u \leqslant \infty$, а множество $\mathscr{E}$ есть отрезок на листе $\mathscr{D}_p$ над отрезком $[0, \omega/\lambda]$. При нечетном p множества $\mathscr{B}_r$ и $\mathscr{E}$ имеют аналогичный вид, но располагаются на поверхности $\mathscr{R}(-T_p)$. В обоих случаях из единственности конформного отображения кольца на двусвязную область с заданной нормировкой на границе легко заключаем, что функция f совпадает с f_1. Теорема 1 доказана. $\square$

§3. Оценка модуля функции сверху

Функция

$$f_2(z) \equiv f_2(z;\omega,p,\lambda) = \lambda T_p\left[\frac{z(1+\omega)^2}{\omega(1+z)^2}\left(T_p^{-1}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) + \cos\frac{\pi}{2p}\right) - \cos\frac{\pi}{2p}\right]$$

принадлежит классу $M_p(\omega,\lambda)$, $0 < \lambda < \infty$. Она отображает круг U на поверхность $\mathscr{R}(\lambda T_p)$ с разрезом вдоль луча на листе $\mathscr{D}_1(\lambda)$, лежащего над лучом $f_2(1) \leqslant u \leqslant \infty$.

Теорема 2. *Если функция f принадлежит классу $M_p(\omega,\lambda)$, $0<\lambda<\infty$, то для любого $z\in(-1,0)$ справедливо неравенство*

$$|f(z)|\leqslant|f_2(z)|. \tag{9}$$

Равенство в (9) *достигается только для функции f_2.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой функции f класса $M_p(\omega,\lambda)$, $0<\lambda<\infty$, в некоторой точке $z=-r$, $0<r<1$, выполняется неравенство

$$|f(-r)|\geqslant|f_2(-r)|. \tag{10}$$

В плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим конденсатор

$$C_r=(B,E_r),$$

где на этот раз $B=U\backslash[\omega,1]$, $E_r=[-r,0]$. Функция $F=f/\lambda$ отображает этот конденсатор на конденсатор

$$\mathscr{C}_r=(\mathscr{B},\mathscr{E}_r),$$

лежащий на поверхности $\mathscr{R}(F)$ класса $\mathfrak{R}_p$, $\mathscr{B}=F(B)$, $\mathscr{E}_r=F(E_r)$. Обозначим через

$$\mathscr{C}_r^1=(\mathscr{B}^1,\mathscr{E}_r^1),$$

конденсатор на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, для которого $\mathscr{B}^1$ есть поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ с разрезом по лучу на листе D_p, лежащим над $[\omega/\lambda,+\infty]$ при четном p и над $[-\infty,-\omega/\lambda]$ при p нечетном. Множество $\mathscr{E}_r^1$ есть отрезок на листе $\mathscr{D}_1$ над отрезком $[0,|f_2(-r)/\lambda|]$. Нетрудно видеть, что конденсаторы $\mathscr{C}_r$ и $\mathscr{C}_r^1$ конформно эквивалентны. Отсюда и из утверждения 1 получаем соотношения (6). Как и при доказательстве теоремы 1, но с учетом (10) вместо (5), убеждаемся в справедливости включений:

$$\mathrm{Sym}\mathscr{E}_r\supset\mathscr{E}_r^1,\quad \mathrm{Sym}\mathscr{B}\subset\mathscr{B}^1.$$

Поэтому вновь выполняется неравенство (8), что вместе с (6) дает равенство во всех этих соотношениях. Заключение о единственности экстремального отображения совпадает по форме с концовкой доказательства теоремы 1. Теорема 2 доказана. □

Литература

1. P. Montel, *Lecons sur les fonctions univalentes ou multivalentes.* — Paris, Gauthier-Villars, 1933.
2. J. Krzyz, *On univalent functions with two preassigned values.* — Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sec. A, **15** (1961), No. 5, 57–77.

3. A. Vasil'ev, *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings.* — Lecture Notes in Math. **1788**, Springer, 2002.
4. V. Singh, *Some extremal problems for a new class of univalent functions.* — J. Math. Mech., **7** (1958), 811–821.
5. Z. Lewandowski, *Sur certaines classes de fonctions univalentes dans le cercleunité.* — Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sec. A, **13** (1959), No. 6, 115–126.
6. J. Krzyz, E. Zlotkiewicz, *Koebe sets for univalent functions with two preassigned values.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **487** (1971), 12 pp.
7. R.J. Libera, E.J. Zlotkiewicz, *Bounded Montel univalent functions.* — Collog. Math., **56** (1988), 169–177.
8. A. Vasil'ev, P. Pronin, *On some extremal problem for bounded univalent functions with Montel's normalization.* — Demonstratio Math., **26** (1993), 703–707.
9. A. Vasil'ev, P. Pronin, *The range of a system of functionals for the Montel univalent functions.* — Bol. Soc. Mat. Mexicana, **6** (2000), 147–190.
10. W. K. Hayman, *Multivalent functions*, Second ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
11. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения.* М., 1962.
12. В. Н. Дубинин, *Симметризация конденсаторов и неравенства для многолистных в круге функций.* — Мат. заметки **94** (2013), No. 6, 846–856.
13. В. Н. Дубинин, *К теореме Дженкинса о покрытии окружностей голоморфными в круге функциями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ. **418** (2013), 60–73.
14. В. Н. Дубинин, *Новая версия круговой симметризации с приложениями к p-листным функциям.* — Мат. сб. **203** (2012), No. 7, 79–94.
15. В. Н. Дубинин, *Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях.* — Мат. сб. 2015 (в печати).

Dubinin V. N. Inequalities for moduli of the circumferentially mean p-valent functions.

Let f be a circumferentially mean p-valent function in the disk $|z| < 1$ with Montel's normalization: $f(0) = 0, f(\omega) = \omega$ $(0 < \omega < 1)$. Under an additional constraint on the covering of the concentric circles by f, precise lower and upper bounds of modulus $|f(z)|$ for some $z \in (-1, 0)$ are established. The necessity of such constraint for the non-trivial estimates to be true is shown.

Дальневосточный
федеральный университет,
ул. Суханова 8, Владивосток 690950;
Институт прикладной математики
ДВО РАН
ул. Радио 7, Владивосток 690041
Россия
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 1 августа 2014 г.