Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

В. Н. Дубинин

ГОЛОМОРФНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ФУНКЦИИ, НЕ ПОКРЫВАЮЩИЕ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Введение

Теоремы роста и искажения для голоморфных функций при геометрических условиях на образ составляют значительную часть теории функций комплексного переменного. Одним из мощных методов доказательства таких теорем является метод симметризации, развитый Хейманом [1]. Покажем эффективность этого метода на следующих примерах. В недавней статье [2] доказаны, в частности, следующие теоремы (см., [2, теоремы 4 и 5]).

Теорема A. *Пусть функция f голоморфна в круге $U := \{z : |z| < 1\}$, $f(U) \subset U$, и пусть образ $f(U)$ не отделяет начало от границы ∂U и $0 \notin f(U)$. Если точка $z = 1$ является неподвижной граничной точкой f, то угловая производная $f'(1)$ удовлетворяет неравенству*

$$f'(1) \geqslant -\frac{1}{2}\log|f(0)|.$$

Теорема B. *Пусть функция f голоморфна в круге U, $f(U) \subset U$, и пусть образ $f(U)$ не отделяет начало от границы ∂U и $0 \notin f(U)$. Тогда для любой точки $z \in U$ справедливы неравенства*

$$|f(0)|^{\frac{1+|z|}{1-|z|}} \leqslant |f(z)| \leqslant |f(0)|^{\frac{1-|z|}{1+|z|}}.$$

Выписанные утверждения можно отнести к обобщениям леммы Шварца, интерес к которым в последнее время достаточно высок (см., например, [3], а также последние работы [4–7]). В данной заметке методом работы [1] устанавливаются точные неравенства для величин $f'(1)$ и $|f(z)|$ в более широком, чем в [2], классе функций. Именно, обозначим через $\mathfrak{B}$ класс голоморфных в круге U функций f, удовлетворяющих условиям: $f(U) \subset U$ и $\gamma(\rho) \not\subset f(U)$ для любого ρ, $0 < \rho < 1$.

Ключевые слова: голоморфная функция, теоремы искажения, лемма Шварца, производная Шварца.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-12404-офи-м2) и программы ДВО РАН "Дальний Восток".

Здесь $\gamma(\rho)$ означает окружность $|w| = \rho$. Нетрудно видеть, что функции из теорем A и B принадлежат классу $\mathfrak{B}$. Мы получаем точные оценки в классе $\mathfrak{B}$ для модулей функций, модулей их производных во внутренних и граничных точках круга U и граничную оценку для производной Шварца.

§1. Неравенства для модулей функций

Всюду ниже $k(z)$ означает функцию Кёбе:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad z \in U.$$

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит классу $\mathfrak{B}$. Тогда для любых точек z_1, z_2 круга U, лежащих на одном луче, выходящем из начала координат, $|z_1| < |z_2|$, справедливы неравенства*

$$\frac{(1+|z_1|)(1-|z_2|)}{(1-|z_1|)(1+|z_2|)} \leqslant \sqrt{\frac{k(|f(z_2)|)}{k(|f(z_1)|)}} \leqslant \frac{(1-|z_1|)(1+|z_2|)}{(1+|z_1|)(1-|z_2|)}. \tag{1}$$

Равенство в правой части (1) *имеет место только для функций вида*

$$f(z) = e^{i\theta} k^{-1}(\alpha(k(e^{i\varphi} z) + \frac{1}{4})) \tag{2}$$

и точек z_j, $\arg z_j = -\varphi$, $j = 1, 2$, $|z_1| < |z_2|$, а в левой части (1) *– только для функций*

$$f(z) = e^{i\theta} k^{-1}(\alpha(k(e^{i\varphi} z) + \frac{1}{4})^{-1}) \tag{3}$$

и тех же точек z_1, z_2. В обоих случаях θ и φ – произвольные вещественные числа, а α – любое положительное число.

Доказательство. Можно считать, что точки z_1 и z_2 расположены на вещественной положительной полуоси, $z_j = r_j$, $j = 1, 2$, $0 < r_1 < r_2 < 1$ и $|f(r_1)| \neq |f(r_2)|$. Нам понадобится понятие конденсатора, с определением и свойствами которого читатель может ознакомиться, например, в [1] и [8]. В литературе встречаются два вида обозначений конденсатора:

$$(B, E) \equiv (E_0, E_1),$$

где $B = \overline{\mathbb{C}} \setminus E_0$, а $E = E_1$. В данной работе будем придерживаться первого обозначения. Введем следующие конденсаторы:

$C = (U, [r_1, r_2])$;

$k(C) = (k(U), k([r_1, r_2]))$ – образ конденсатора C при отображении $w = k(z)$;

$f(C) = (f(U), f([r_1, r_2]))$;

$(f(C))^*$ – результат круговой симметризации конденсатора $f(C)$ относительно вещественной положительной полуоси [1, §4.7];

$\widetilde{C}$ – образ конденсатора $(f(C))^*$ при отображении $\zeta = k(w)$; C_1 – образ конденсатора $k(C)$ при отображении

$$\zeta = \frac{k(|f(r_1)|)}{k(r_1) + 1/4}(w + \frac{1}{4}), \text{ если } |f(r_1)| < |f(r_2)|, \text{ и}$$

$$\zeta = \frac{k(|f(r_2)|)}{k(r_1) + 1/4}(w + \frac{1}{4}), \text{ если } |f(r_1)| > |f(r_2)|;$$

$$C_2 = (\overline{\mathbb{C}} \backslash \{\zeta : \arg\zeta = \pi, 0 \leqslant |\zeta| \leqslant \infty\}, \{\zeta : \arg\zeta = 0, k(|f(r_1)|) \leqslant |\zeta| \leqslant k(|f(r_2)|)\}), \quad \text{если} \quad |f(r_1)| < |f(r_2)| \quad \text{и}$$

$$C_2 = (\overline{\mathbb{C}} \backslash \{\zeta : \arg\zeta = \pi, 0 \leqslant |\zeta| \leqslant \infty\}, \{\zeta : \arg\zeta = 0, k(|f(r_2)|) \leqslant |\zeta| \leqslant k(|f(r_1)|)\}), \quad \text{если} \quad |f(r_1)| > |f(r_2)|.$$

Предположим теперь, что $|f(r_1)| < |f(r_2)|$. Тогда левое неравенство в (1) очевидно, причем равенство здесь невозможно. Ввиду конформной инвариантности емкости конденсатора,

$$\operatorname{cap} C_1 = \operatorname{cap} k(C) = \operatorname{cap} C. \tag{4}$$

Из принципа мажорации

$$\operatorname{cap} C \geqslant \operatorname{cap} f(C), \tag{5}$$

причем равенство в (5) достигается лишь в случае, когда функция f однолистна в круге U [8–10]. Принцип круговой симметризации дает неравенство

$$\operatorname{cap} f(C) \geqslant \operatorname{cap} (f(C))^*. \tag{6}$$

Если, дополнительно, конденсатор $f(C)$ имеет потенциальную функцию, то равенство в (6) достигается только в случае, когда конденсаторы $f(C)$ и $(f(C))^*$ совпадают с точностью до вращения вокруг начала координат [1, теорема 4.6], [8, теорема 4.2]. Из определения класса $\mathfrak{B}$ вытекает, что результат круговой симметризации $(f(U))^*$ открытого множества $f(U)$ принадлежит кругу U с разрезом по отрезку $(-1, 0]$. С другой стороны, результат симметризации $(f([r_1, r_2]))^*$ компакта $f([r_1, r_2])$ содержит отрезок $[|f(r_1)|, |f(r_2)|]$. Поэтому множество $k((f(U))^*)$ не содержит отрицательной вещественной полуоси, а множество $k((f([r_1, r_2]))^*)$ содержит отрезок $[k(|f(r_1)|), k(|f(r_2)|)]$. Из конформной инвариантности и монотонности емкости

$$\operatorname{cap}(f(C))^* = \operatorname{cap}\widetilde{C} \geqslant \operatorname{cap} C_2. \tag{7}$$

Если $\widetilde{C}$ имеет потенциальную функцию, то равенство в (7) влечет $\widetilde{C} = C_2$. Суммируя соотношения (4)-(7), получаем неравенство

$$\operatorname{cap} C_1 \geqslant \operatorname{cap} C_2. \tag{8}$$

Вновь из монотонности емкости конденсатора приходим к выводу, что из (8) вытекает неравенство

$$k(|f(r_1)|)\frac{k(r_2)+1/4}{k(r_1)+1/4} \geqslant k(|f(r_2)|),$$

которое равносильно правой части неравенства (1). В случае равенства в правой части (1) равенство имеет место во всех соотношениях (5)-(8). Отсюда вытекает, что функция f конформно и однолистно отображает двусвязную область $U\backslash[r_1, r_2]$ на область вида $U\backslash\{(-e^{i\theta}, 0]\cup [e^{i\theta}|f(r_1)|, e^{i\theta}|f(r_2)|]\}$, где θ – некоторое вещественное число. При подходящем α, $0 < \alpha < \infty$, функция $e^{i\theta}k^{-1}(\alpha(k(z)+1/4))$ также отображает $U\backslash[r_1, r_2]$ на указанную область, причем граничной точке r_1 двусвязной области при обоих отображениях соответствует одна и та же граничная точка образа $(f(r_1))$. По теореме единственности,

$$f(z) \equiv e^{i\theta}k^{-1}\Big(\alpha\Big(k(z)+\frac{1}{4}\Big)\Big)$$

в кольце $U\backslash[r_1, r_2]$ и, следовательно, во всем круге U. Множитель $e^{i\theta}$ в (2) возникает ввиду того, что изначально мы рассматривали случай, когда точки z_1 и z_2 расположены на вещественной положительной полуоси. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для функции (2) при указанных точках z_1, z_2 в правой части (1) действительно имеет место равенство. Случай $|f(r_1)| > |f(r_2)|$ рассматривается аналогично с той лишь разницей, что неравенство для емкостей (8) на этот раз дает оценку

$$k(|f(r_2)|)\frac{k(r_2)+1/4}{k(r_1)+1/4} \geqslant k(|f(r_1)|),$$

равносильную левой части неравенства (1). Теорема доказана. $\square$

Следующее утверждение усиливает теорему В.

Теорема 2. *Если функция f принадлежит классу $\mathfrak{B}$, то для любой точки z круга U справедливы неравенства*

$$k^{-1}\left[k(|f(0)|)\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^2\right] \leqslant |f(z)| \leqslant k^{-1}\left[k(|f(0)|)\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2\right]. \quad (9)$$

Равенство в правой части (9) *при $z \neq 0$ достигается только для функций* (2), *а в левой – только для функций* (3) *в точках z с аргументом $-\varphi$.*

Доказательство. Требуемое утверждение вытекает из теоремы 1, если положить $z_1 = 0$, $z_2 = z$. □

§2. Теоремы искажения

Пусть функция f голоморфна в круге U и $f(U) \subset U$. Точка z, лежащая на окружности $|z| = 1$, называется неподвижной граничной точкой функции f, если существует угловой предел $\angle \lim\limits_{\zeta \to z} f(\zeta) = z$. Известно, что в этом случае существует угловая производная функции f в точке z, которую будем обозначать, как обычно, $f'(z)$ [11, с.82]. Следующий результат усиливает теорему A.

Теорема 3. *Если точка $z = 1$ является неподвижной граничной точкой функции f класса $\mathfrak{B}$, то справедливо неравенство*

$$f'(1) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{|f(0)|}} - \sqrt{|f(0)|}\right). \quad (10)$$

Равенство в (10) *достигается для функции*

$$f_\beta(z) = k^{-1}\left[\beta\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right]$$

при любом положительном β.

Доказательство. Функция

$$f_\beta(z) = k^{-1}\left[4\beta(k(z) + \frac{1}{4})\right], \quad 0 < \beta < \infty,$$

конформно и однолистно отображает круг U на круг U с разрезом по отрезку $(-1, 0]$, причем $f_\beta(0) = k^{-1}(\beta)$, $f_\beta(1) = 1$. По теореме 2 для любого r, $0 < r < 1$, выполняется неравенство

$$|f(r)| \leqslant |f_\beta(r)|,$$

где $\beta = k(|f(0)|)$. Поэтому

$$f'(1) = \lim_{r\to 1}\left|\frac{f(r)-1}{r-1}\right| \geqslant \lim_{r\to 1}\frac{1-|f(r)|}{1-r}$$
$$\geqslant \lim_{r\to 1}\frac{1-|f_\beta(r)|}{1-r} = \lim_{r\to 1}\frac{f_\beta(r)-1}{r-1} = f'_\beta(1).$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$f_\beta(r) = \frac{2\beta(1+r)^2 + (1-r)^2 - \sqrt{4\beta(1+r)^2(1-r)^2 + (1-r)^4}}{2\beta(1+r)^2},$$

где берется положительное значение корня. Отсюда вновь простыми вычислениями получаем

$$f'_\beta(1) = \lim_{r\to 1} f'_\beta(r) = \frac{1}{2\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{|f(0)|}} - \sqrt{|f(0)|}\right).$$

Итак, неравенство (10) доказано. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для функции f_β при любом положительном β в (10) имеет место равенство. Теорема доказана. $\square$

Приведем теперь частный случай неравенства И. П. Митюка [12].

Теорема 4 (ср. [12, теорема 13.3]). *Для любой точки $z_0 \in U$ и любой функции $f \in \mathfrak{B}$ выполняется неравенство*

$$(1-|z_0|^2)\left|\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right| \leqslant 4\frac{1-|f(z_0)|}{1+|f(z_0)|}. \tag{11}$$

Равенство в (11) *достигается только для функций вида*

$$f(z) = e^{i\theta} f_\beta(e^{i\varphi} g(z)),$$

где θ – произвольное вещественное число, β – положительное число, $\varphi = -\arg z_0$, а g – произвольный дробно-линейный автоморфизм круга U, оставляющий неподвижной точку z_0.

Доказательство. Можно считать, что $z_0 = r$, $0 \leqslant r < 1$, и $f(r) \in (0,1)$. Обозначим через $r(D,a)$ внутренний радиус области D относительно точки $a \in D$ [1,8]. Из принципа мажорации [1, теорема 4.7], [8, теорема 8.2] следует, что

$$(1-r^2)|f'(r)| \leqslant r(f(U), f(r)). \tag{12}$$

Равенство в (12) имеет место только для однолистных функций f. Принцип круговой симметризации дает

$$r(f(U), f(r)) \leqslant r((f(U))^*, f(r)), \tag{13}$$

где $(f(U))^*$ означает результат круговой симметризации области $f(U)$ относительно вещественной положительной полуоси [1, теорема 4.8], [8, следствие 4.3]. Если, дополнительно, область $f(U)$ имеет классическую функцию Грина, то равенство в (13) достигается только в случае $f(U) = (f(U))^*$. Так как $f \in \mathfrak{B}$, то $(f(U))^*$ содержится в области $D = U \backslash (-1, 0]$. Поэтому

$$r((f(U))^*, f(r)) \leqslant r(D, f(r)), \tag{14}$$

причем, если $(f(U))^*$ имеет классическую функцию Грина, то равенство в (14) достигается только при $(f(U))^* = D$ [8, с. 36]. Нетрудно вычислить внутренний радиус последней области:

$$r(D, f(r)) = 4k(f(r))/k'(f(r)).$$

Суммируя полученные соотношения, имеем

$$(1 - r^2)|f'(r)| \leqslant 4k(f(r))/k'(f(r)),$$

что равносильно неравенству (11) при $z_0 = r$. Предположим теперь, что в (11) выполняется равенство ($z_0 = r$). Тогда равенство имеет место во всех соотношениях (12)–(14). Из равенства в (12) следует, что функция f однолистна в U и, в частности, $f(U)$ имеет классическую функцию Грина. Равенство в (13) дает $(f(U))^* = f(U)$, а с учетом равенства в (14) получаем

$$f(U) = D.$$

По теореме Римана функция f совпадает с суперпозицией $f_\beta \circ g$ некоторого дробно-линейного автоморфизма g круга U, оставляющего неподвижной точку r, и функции f_β при некотором β, $0 < \beta < 1$. Для указанной суперпозиции (при любом β, $0 < \beta < 1$) в соотношениях (12)–(14) и, следовательно, в (11) имеет место равенство. Осталось заметить, что допущенное в начале доказательства условие $z_0 = r$ и $f(r) \in (0, 1)$ обеспечивается поворотами на углы $\varphi = -\arg z_0$ и θ в z и w плоскостях соответственно. Теорема доказана. □

Теорема 5. *Пусть функция f принадлежит классу $\mathfrak{B}$, и пусть в окрестности точки $z = 1$ имеет место разложение*

$$f(z) = 1 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + a_3(z-1)^3 + \angle o((z-1)^3), \ z \to 1,$$

где $a_1 > 0$ *и* $\angle o((z-1)^3)$ *означает бесконечно малую по сравнению с функцией* $(z-1)^3$ *при* $z \to 1$ *в каждом угле Штольца с вершиной в* $z = 1$, *лежащем в круге* U. *Предположим, что выполняется равенство*

$$\operatorname{Re}(2a_2 + a_1(1-a_1)) = 0. \tag{15}$$

Тогда для производной Шварца

$$S_f(1) = 6\left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right)$$

справедлива точная оценка

$$\operatorname{Re} S_f(1) \leqslant -\frac{3}{4}(f'(1))^2. \tag{16}$$

Равенство в (16) *достигается для функций* f_β, $0 < \beta < \infty$.

Доказательство. По теореме 4 для любого r, $0 < r < 1$, выполняется неравенство

$$\frac{(1-r^2)|f'(r)|}{1-|f(r)|^2} \leqslant \frac{4|f(r)|}{(1+|f(r)|)^2} \tag{17}$$

с равенством, например, для функций f_β, $0 < \beta < \infty$. Пользуясь разложениями, приведенными в [13, с. 71], заключаем, что левая часть неравенства (17) представима в виде

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{8a_1^2}\big[16|a_2|^2 &+ 24a_1 \operatorname{Re} a_3 + 16a_1 \operatorname{Re} a_2 + a_1^2 - (2\operatorname{Re} a_2 + a_1^2)^2 \\
&-8a_1(\operatorname{Re} a_3 + a_1 \operatorname{Re} a_2)\big](r-1)^2 + o((r-1)^2) \\
&= 1 + 2\left[\operatorname{Re}\frac{a_3}{a_1} + \frac{|a_2|^2}{a_1^2} - 2\frac{(\operatorname{Re} a_2)^2}{a_1^2}\right](r-1)^2 + o((r-1)^2) \\
&= 1 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right)(r-1)^2 + o((r-1)^2), \quad r \to 1.
\end{aligned}$$

Мы применили здесь равенство (15). Простые вычисления приводят к разложению правой части (17), которая равна

$$1 - \frac{a_1^2}{4}(r-1)^2 + o((r-1)^2), \quad r \to 1.$$

Поэтому из неравенства (17) вытекает оценка

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) \leqslant -\frac{a_1^2}{4},$$

равносильная (16), и с равенством для функции f_β. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что равенство (15) является необходимым условием для оценки шварциана в граничной точке. Геометрический смысл этого условия показан в работе [14, с. 31–32].

Литература

1. W. K.Hayman, Multivalent functions, Second ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
2. A. Frolova, M. Levenshtein, D. Shoikhet, A. Vasil'ev, *Boundary distortion estimates for holomorphic maps.* — Complex Anal. Oper. Theory **8** (2014), 1129–1149.
3. V. Bolotnikov, M. Elin, D. Shoikhet, *Inequalities for angular derivatives and boundary interpolation.* — Anal. Math. Phys. **3** (2013), 63–96.
4. T. Aliyev Azeroğlu, B.N.Örnek, *A refined Schwarz inequality on the boundary.* — Complex Var. Elliptic Equ. **58** (2013), 571–577.
5. A. Lecko, B. Uzar, *A note on Julia-Caratheodory Theorem for functions with fixed initial coefficients.* — Proc. Japan Acad. **89**, Ser. A (2013), 133–137.
6. B. N. Örnek, *Sharpened forms of the Schwarz lemma on the boudary.* — Bull. Korean Math. Soc. **50** (2013), 2053-2059.
7. G. Cleanthous, *Growth theorems for holomorphic functions under geometric conditions for the image.* — Comput. Methods Funct. Theory **13** (2013), 277–294.
8. В.Н. Дубинин, Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного, Дальнаука, Владивосток, 2009.
9. S. Pouliasis, *Condenser capacity and meromorphic functions.* — Comput. Methods Funct. Theory **11** (2011), 237–245.
10. В. Н. Дубинин, *О сохранении конформной емкости при отображении мероморфными функциями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 67–73.
11. Ch. Pommerenke, Boundary behaviour of conformal maps. Springer, 1992.
12. И. П. Митюк, Применение симметризационных методов в геометрической теории функций. Куб. ГУ, Краснодар, 1985.
13. В. Н. Дубинин, *Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения.* — Мат. сб. **196** (2005), No. 11, 53–74.
14. В. Н. Дубинин, *О граничных значениях производной Шварца регулярной функции.* — Мат. сб. **202** (2011), No. 5, 29–44.

Dubinin V. N. Bounded holomorphic functions covering no concentric circles.

By the symmetrization method, the growth and distortion theorems for the functions mentioned in the title of the paper are proved. Precise estimates for the moduli of such functions and of their derivatives at inner and boundary points and an estimate for the Schwarzian derivative are given.

Дальневосточный
федеральный университет,
ул. Суханова 8, Владивосток 690950;
Институт прикладной математики
ДВО РАН
ул. Радио 7, Владивосток 690041
Россия
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 1 августа 2014 г.