Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

В. О. Дронь, В. В. Жук

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2 МОДИФИЦИРОВАННЫМИ СРЕДНИМИ СТЕКЛОВА

Пусть L_2 – пространство 2π-периодических коплекснозначных функций f, суммируемых с квадратом на периоде,

$$S_{h,1}(f,x) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)dt,$$

$$S_{h,2}(f,x) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{h} f(x+t)\left(1-\left|\frac{t}{h}\right|\right)dt$$

– функции Стеклова соответственно первого и второго порядка.

Полагаем

$$U_{h,r}(f,x) = \frac{1}{3}(4S_{h,r}(f,x) - S_{2h,r}(f,x)),$$
$$U_{h,r,l}(f) = (E-(E-U_{h,r})^l)(f).$$

Основное содержание настоящей работы группируется вокруг вопроса о наименьшей постоянной $C(r,l,a)$ в неравенстве

$$\omega_{4l}(f,ah)_2 \leqslant C(r,l,a)\|f-U_{h,r,l}(f)\|_2$$

при $r=1$ и $r=2$, где $\omega_k(f,h)_2$ – модуль непрерывности порядка k функции f в пространстве L_2. Устанавливаются аналоги полученных результатов применительно к случаю приближения четных непрерывных периодических функций с неотрицательными коэффициентами Фурье в пространстве C.

§1. Введение

1.1. В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ суть множества комплексных, вещественных, неотрицательных вещественных, целых, натуральных

Ключевые слова: пространство L_2, модифицированные средние Стеклова, модули непрерывности, ряды Фурье с положительными коэффициентами.

чисел; L_p (при $1 \leqslant p < \infty$) – пространство 2π-периодических коплекснозначных функций f, суммируемых с p-ой степенью на отрезке $Q = [-\pi, \pi]$ и нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_Q |f(x)|^p \right)^{1/p},$$

$L_\infty = C$ – пространство непрерывных 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|;$$

E – тождественный оператор в L_1.

Функции, заданные на подмножествах $\mathbb{R}$, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв и неопределенные в ней, доопределяются в этой точке по непрерывности. В других случаях символ $0/0$ понимается как 0.

Через $\delta_t^r(f, x)$ обозначаем центральную разность r-го порядка функции f с шагом t в точке x:

$$\delta_t^r(f, x) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m C_r^m f\left(x + \tfrac{rt}{2} - mt\right).$$

Для $f \in L_p$, $r \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\omega_r(f, h)_p = \sup_{|t| \leqslant h} \|\delta_t^r(f)\|_p.$$

Величина $\omega_r(f)_p$ называется модулем непрерывности r-го порядка функции f в пространстве L_p.

Если $f \in L_1$, $h > 0$, $r - 1 \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, то полагаем

$$S_{h,1}(f, x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\,dt,$$

$$S_{h,r}(f, x) = S_{h,1}(S_{h,r-1}(f), x).$$

Функция $S_{h,r}(f)$ называется функцией Стеклова порядка r с шагом h для функции f. При $r \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\psi_r(t) = \begin{cases} r \displaystyle\sum_{0 \leqslant k < |t| + r/2} \frac{(-1)^k \left(|t| + \frac{r}{2} - k\right)^{r-1}}{k!(r-k)!} & \text{при } |t| \leqslant \frac{r}{2}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{r}{2}. \end{cases}$$

Если $f \in L_1$, $x \in \mathbb{R}$, то (см. [1, с. 100])

$$S_{h,r}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+th)\psi_r(t)dt.$$

Пусть $f \in L_1$, $r, m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{h,r,m}(f,x) &= \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}C_{2m}^{m+k}S_{kh,r}(f,x) \\ &= \frac{2(-1)^{m+1}}{C_{2m}^m}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\delta_{th}^{2m}(f,x)\psi_r(t)dt + f(x). \end{aligned}$$

Если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$, $h > 0$, то

$$\begin{aligned} \|f - S_{h,r,m}(f)\|_p &= \left\| \frac{2}{C_{2m}^m}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\delta_{th}^{2m}(f)\psi_r(t)dt \right\|_p \\ &\leqslant \frac{2}{C_{2m}^m}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\|\delta_{th}^{2m}(f)\|_p\psi_r(t)dt \\ &\leqslant \frac{2}{C_{2m}^m}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega_{2m}(f,th)_p\psi_r(t)dt \\ &\leqslant \frac{2}{C_{2m}^m}\omega_{2m}(f,\tfrac{rh}{2})_p\int\limits_{\mathbb{R}_+}\psi_r(t)dt = \frac{1}{C_{2m}^m}\omega_{2m}(f,\tfrac{rh}{2})_p. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $f \in L_1$. Полагаем

$$\begin{aligned} U_{h,r}(f,x) &= S_{h,r,2}(f,x) = \frac{1}{3}(4S_{h,r}(f,x) - S_{2h,r}(f,x)), \\ U_{h,r,l}(f) &= (E - (E - U_{h,r})^l)(f). \end{aligned}$$

Основное содержание настоящей работы группируется вокруг вопроса о наименьшей постоянной $C(r,l,a)$ в неравенстве

$$\omega_{4l}(f,ah)_2 \leqslant C(r,l,a)\|f - U_{h,r,l}(f)\|_2$$

при $r = 1$ и $r = 2$. В частности, доказывается (см. теоремы 1 и 2), что

$$\sup_{h>0}\sup_{f\in L_2}\frac{\omega_{4l}(f,ah)_2}{\|f - U_{h,1,l}(f)\|_2} = 2^{4l}\left(30a^4\right)^l \quad \left(a \geqslant \tfrac{1}{2},\ l \in \mathbb{N}\right), \tag{2}$$

$$\sup_{h>0}\sup_{f\in L_2}\frac{\omega_{4l}(f,ah)_2}{\|f-U_{h,2,l}(f)\|_2}=2^{4l}\left(\tfrac{45}{8}a^4\right)^l\quad\left(a\geqslant\tfrac{3}{4},\ l\in\mathbb{N}\right).\tag{3}$$

В связи с соотношениями (2) и (3) уместно отметить, что при $l\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{N}$, $h>0$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ для $f\in L_p$ справедливо неравенство

$$\|f-U_{h,r,l}(f)\|_p\leqslant C(r,l)\omega_{4l}(f,h)_p.\tag{4}$$

Соотношение (4) нетрудно получить, опираясь на теорему 1, приведенную в книге [2, стр. 201], но мы не будем здесь на этом останавливаться.

1.2. Дадим краткий обзор результатов, полученных в статье. Введем следующие обозначения

$$\alpha_r(x)=1-\frac{4}{3}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^r+\frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^r;$$

при $a>0$

$$D(a)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{\sin^4 ax}{\alpha_1(2x)},$$

$$G(a)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{\sin^4 ax}{\alpha_2(2x)}.$$

Работа состоит из трех параграфов. В §2 доказывается, что $D(a)=30a^4$ при $a\geqslant\frac{1}{2}$, $G(a)=\frac{45}{8}a^4$ при $a\geqslant\frac{3}{4}$, приводятся значения величин $D(a)$ и $G(a)$ при других значениях a, полученные с помощью вычислительной техники. В §3 устанавливаются равенства (2) и (3) (некоторые вспомогательные соотношения, используемые при доказательстве равенств (2) и (3), излагаются в §2). Приводятся аналоги соотношений (2) и (3) применительно к случаю приближения четных непрерывных периодических функций с неотрицательными коэффициентами Фурье в пространстве C.

§2. Вспомогательные результаты

2.1. Лемма 1. *Пусть $a\geqslant\frac{1}{2}$. Тогда*

$$D(a)=30a^4.$$

Доказательство. Положим $b=\frac{1}{2}$,

$$f_a(x)=\frac{\sin^4 ax}{\alpha_1(2x)}.$$

Легко видеть, что

$$f_a(0) = \lim_{x\to 0} f_a(x) = 30a^4.$$

Поэтому достаточно доказать, что при всех $x > 0$ и $a \geqslant b$ справедливо неравенство

$$f_a(x) \leqslant 30a^4. \tag{5}$$

Предположим, что (5) доказано при $a = b$. Тогда, учитывая известное неравенство

$$|\sin \alpha t| \leqslant \alpha \sin t \tag{6}$$

при $0 \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4}$ и $\alpha \geqslant 1$, находим, что

$$f_a(x) = \frac{\sin^4 \frac{a}{b} bx}{\alpha_1(2x)} \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^4 \frac{\sin^4 bx}{\alpha_1(2x)} \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^4 30b^4 = 30a^4$$

при $0 < x < \frac{3\pi}{2}$. Если же $x \geqslant \frac{3\pi}{2}$, $a \geqslant b$, то

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \frac{\sin^4 ax}{1 - \frac{4}{3}\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3}\frac{\sin 2x}{2x}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{4}{3x} - \frac{1}{6x}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{3}{2x}} \leqslant \frac{\pi}{\pi - 1} < \frac{15}{8} \leqslant 30a^4. \end{aligned}$$

Приступаем к доказательству неравенства $f_b(x) \leqslant \frac{15}{8}$ при $x \in \mathbb{R}$. Для этого достаточно установить, что при $x > 0$ справедливо соотношение

$$\sin^4 \frac{x}{2} \leqslant \frac{15}{8}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3}\frac{\sin 2x}{2x}\right). \tag{7}$$

Неравенство (7) очевидно при $x \geqslant \frac{45}{14}$. Поэтому можно ограничиться случаем $0 < x < \frac{45}{14}$. Используя известные соотношения

$$\frac{\sin t}{t} \geqslant \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \quad \left(t \in \mathbb{R},\ \tfrac{n+1}{2} \in \mathbb{N}\right),$$

$$\frac{\sin t}{t} \leqslant \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \quad \left(t \in \mathbb{R},\ \tfrac{n+2}{2} \in \mathbb{N}\right),$$

$$\sin^4 t \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(2t)^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{8}\sum_{k=2}^{m} (-1)^k \frac{(4t)^{2k}}{(2k)!} \quad \left(t \in \mathbb{R},\ \tfrac{n-1}{2},\ \tfrac{m}{2} \in \mathbb{N}\right), \tag{8}$$

усилим неравенство (7):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{5}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{6}(-1)^{k}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}\\&-\frac{15}{8}\left(1-\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{6}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{5}(-1)^{k}\frac{(2x)^{2k}}{(2k+1)!}\right)\leqslant 0.\end{aligned}\tag{9}$$

В силу (9) необходимо показать, что

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{5}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\frac{1}{8}\sum_{k=3}^{6}(-1)^{k}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}\\&-\frac{15}{8}\left(-\frac{4}{3}\sum_{k=3}^{6}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}+\frac{1}{3}\sum_{k=3}^{5}(-1)^{k}\frac{(2x)^{2k}}{(2k+1)!}\right)=x^6p(x)\leqslant 0\end{aligned}\tag{10}$$

для $0<x<\frac{45}{14}$.

Непосредственные вычисления показывают, что $p\left(\frac{45}{14}\right)<0$ и $p'(x)\geqslant 0$ при $x>0$, откуда следует (10) для $0<x<\frac{45}{14}$. □

Замечание 1. *Если* $0<a\leqslant\frac{1}{2}$, *то* $D(a)\leqslant D\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{8}$.

Доказательство. Функция $\sin t$ возрастает на $(0,\frac{\pi}{2}]$. Поэтому при $a\leqslant\frac{1}{2}$ и $x\in(0,\pi]$

$$f_a(x)=\frac{\sin^4 ax}{\alpha_1(2x)}\leqslant\frac{\sin^4\frac{1}{2}x}{\alpha_1(2x)}=f_{\frac{1}{2}}(x)\leqslant\frac{15}{8}.$$

Если же $x>\frac{45}{14}$, то

$$f_a(x)\leqslant\frac{1}{1-\frac{4}{3}\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{3}\frac{\sin 2x}{2x}}\leqslant\frac{1}{1-\frac{4}{3x}-\frac{1}{6x}}=\frac{1}{1-\frac{3}{2x}}\leqslant\frac{1}{1-\frac{3\cdot 14}{2\cdot 45}}=\frac{15}{8}.$$

При $x\in\left(\pi,\frac{45}{14}\right)$ функция $\sin x$ отрицательна и убывает, функция $\sin 2x$ положительна и возрастает, тогда

$$f_a(x)\leqslant\frac{1}{1-\frac{4}{3}\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{3}\frac{\sin 2x}{2x}}\leqslant\frac{1}{1-\frac{4}{3}\frac{\sin\pi}{x}+\frac{1}{3}\frac{\sin 2\pi}{2x}}=1<\frac{15}{8}.$$ □

Лемма 2. *Пусть* $a\geqslant\frac{3}{4}$. *Тогда*

$$G(a)=\frac{45}{8}a^4.$$

Доказательство. Положим $b = \frac{3}{4}$,

$$g_a(x) = \frac{\sin^4 ax}{\alpha_2(2x)}.$$

Легко видеть, что

$$g_a(0) = \lim_{x\to 0} g_a(x) = \frac{45}{8}a^4.$$

Поэтому достаточно доказать, что при всех $x > 0$ и $a \geqslant b$ справедливо неравенство

$$g_a(x) \leqslant \frac{45}{8}a^4. \tag{11}$$

Предположим, что (11) доказано при $a = b$. Тогда, применяя неравенство (6), находим, что

$$g_a(x) = \frac{\sin^4 \frac{a}{b}bx}{\alpha_2(2x)} \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^4 \frac{\sin^4 bx}{\alpha_2(2x)} \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^4 \frac{45}{8}b^4 = \frac{45}{8}a^4$$

при $0 < bx < \frac{3\pi}{4}$, то есть $0 < x < \pi$. Если же $x \geqslant \pi$, то

$$g_a(x) \leqslant \frac{1}{\alpha_2(2x)} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{4}{3x^2}} \leqslant \frac{3\pi^2}{3\pi^2 - 4} < \frac{45}{8}a^4.$$

Приступаем к доказательству неравенства $g_b(x) \leqslant \frac{45}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3645}{2048}$ при $x \in \mathbb{R}$. Перепишем его в виде:

$$\sin^4 \frac{3x}{4} \leqslant \frac{3645}{2048}\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\right). \tag{12}$$

Неравенство (12) очевидно при $x \geqslant \frac{7}{4}$. Поэтому можно ограничиться случаем $0 < x < \frac{7}{4}$. Используя известные соотношения

$$\sin^2 t \geqslant \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}t^{2k}}{(2k)!} \quad \left(t \in \mathbb{R},\ \tfrac{n}{2} \in \mathbb{N}\right),$$
$$\sin^2 t \leqslant \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}t^{2k}}{(2k)!} \quad \left(t \in \mathbb{R},\ \tfrac{n+1}{2} \in \mathbb{N}\right)$$

и неравенство (8), усилим неравенство (12):

$$\frac{3645}{2048}\left(1-\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}x^{2k-2}}{(2k)!}+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}(2x)^{2k-2}}{(2k)!}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{7}(-1)^{k+1}\frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^{2k}}{(2k)!}-\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{6}(-1)^{k}\frac{(3x)^{2k}}{(2k)!}\leqslant 0. \tag{13}$$

Чтобы доказать неравенство (13), достаточно установить, что

$$q(y)=\frac{3645}{2048}\left(\frac{4}{3}\sum_{k=4}^{7}(-1)^{k}\frac{2^{2k-1}y^{k-4}}{(2k)!}-\frac{1}{3}\sum_{k=4}^{8}(-1)^{k}\frac{2^{4k-3}y^{k-4}}{(2k)!}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}y^{k-3}}{(2k)!}-\frac{1}{8}\sum_{k=3}^{6}(-1)^{k}\frac{3^{2k}y^{k-3}}{(2k)!}\geqslant 0$$

для $0<y<\frac{49}{16}$. Усилим последнее неравенство:

$$v(y)=q(y)-\frac{351y}{5\cdot 2^{16}}\geqslant 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $v\left(\frac{49}{16}\right)>0$ и $v'(y)<0$ при $y>0$. Откуда следует (12) для $0<x<\frac{7}{4}$. □

Замечание 2. *Если* $0<a\leqslant\frac{3}{4}$, *то* $G(a)\leqslant G\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3645}{2048}$.

Доказательство. При $a\leqslant\frac{3}{4}$ функция $\sin^4 ax$ возрастает по x на $\left(0,\frac{2\pi}{3}\right]$. Поэтому на указанном промежутке $g_a(x)\leqslant g_{\frac{3}{4}}(x)\leqslant G\left(\frac{3}{4}\right)$. Если же $x>\frac{2\pi}{3}>2$, то

$$g_a(x)\leqslant\frac{1}{1-\frac{4}{3x^2}}\leqslant\frac{3}{2}<\frac{3645}{2048}.$$ □

2.2. Приведем значения величин $D(a)$ и $G(a)$, полученные с помощью вычислительной техники. Положим

$$f_a(x)=\frac{\sin^4 ax}{\alpha_1(2x)}$$

и рассмотрим эту функцию на промежутке $[0,+\infty)$. Через $x_0=x_0(a)$ обозначим значение x, при котором достигается $D(a)$. Занумеруем максимумы функции $f_a(x)$ в порядке возрастания x. При этом через $n_0=n_0(a)$ обозначим номер максимума, соответствующего x_0.

Таблица 1. Значения функции $D(a)$.

a	$f_a(0)$	x_0	n_0	$D(a)$
1	max	0	1	30
0.9	max	0	1	19.683
0.8	max	0	1	12.288
0.7	max	0	1	7.203
0.6	max	0	1	3.888
0.5	max	0	1	1.875
0.45	max	0	1	1.230188
0.43142	max	0	1	1.039256
0.43141	max	32.792169	5	1.039267
0.425	max	33.258949	5	1.042971
0.4125	min	26.674585	4	1.052067
0.4	min	27.435558	4	1.043096
0.35	min	13.589278	2	1.074429
0.3	min	26.261611	3	1.041487
0.25	min	6.852485	1	1.046843
0.2	min	7.920941	1	1.205494
0.15	min	52.276633	3	1.02588
0.1	min	14.648387	1	1.073388
0.05	min	32.856915	2	1.029758

Положим

$$g_a(x) = \frac{\sin^4 ax}{\alpha_2(2x)}$$

и рассмотрим эту функцию на промежутке $[0, +\infty)$. Через $x_0 = x_0(a)$ обозначим значение x, при котором достигается $G(a)$. Занумеруем максимумы функции $g_a(x)$ в порядке возрастания x. При этом через $n_0 = n_0(a)$ обозначим номер максимума, соответствующего x_0.

2.3. Если $d_k \in \mathbb{C}$, то, по определению,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(d_{-k} + d_k).$$

Таблица 2. Значения функции $G(a)$.

a	$g_a(0)$	x_0	n_0	$G(a)$
1	max	0	1	5.625
0.9	max	0	1	3.690563
0.8	max	0	1	2.304
0.75	max	0	1	1.779785
0.732	max	0	1	1.614979
0.7315	min	0.149508	1	1.610578
0.725	min	0.59855	1	1.555982
0.7125	min	0.9879	1	1.463396
0.7	min	1.249736	1	1.38486
0.65	min	1.920253	1	1.172278
0.6	min	2.375294	1	1.063513
0.55	min	2.761446	1	1.013748
0.5	min	3.141593	1	1
0.45	min	3.562653	1	1.011964
0.4	min	4.029026	1	1.043056
0.35	min	4.500236	1	1.066309
0.3	min	5.068232	1	1.040981
0.25	min	6.283185	1	1
0.2	min	7.827639	1	1.022169
0.15	min	10.569266	1	1.009132
0.1	min	15.707963	1	1
0.05	min	31.415927	1	1

Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_Q f(t) e^{-ikt} dt$$

– ее коэффициенты Фурье,

$$\sigma(f, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikt}$$

– ряд Фурье.

Лемма 3. *Пусть* $a>0$, $h>0$, $r\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{N}$, $f\in L_2$,

$$D_r(a,h)=\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\sin^4\frac{akh}{2}}{\alpha_r(kh)}.$$

Тогда

$$\|\delta_{ah}^{4l}(f)\|_2\leqslant 2^{4l}D_r^l(a,h)\|f-U_{h,r,l}(f)\|_2.$$

Доказательство. Используя равенство Парсеваля

$$\|g\|_2^2=\int\limits_Q|g|^2=2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(g)|^2,$$

если $g\in L_2$, и соотношения

$$\delta_{ah}^{4l}(f,x)=2^{4l}\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(f)e^{ikx}\sin^{4l}\frac{akh}{2},$$

$$f(x)-U_{h,r,l}(f,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(f)e^{ikx}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{\sin\frac{kh}{2}}{\frac{kh}{2}}\right)^r+\frac{1}{3}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^r\right)^l,$$

имеем

$$\|\delta_{ah}^{4l}(f)\|_2^2=(2\pi)2^{8l}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(f)|^2\sin^{8l}\frac{akh}{2},$$

$$\|f-U_{h,r,l}(f)\|_2^2=2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(f)|^2\alpha_r^{2l}(kh).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\delta_{ah}^{4l}(f)\|_2^2&=(2\pi)2^{8l}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(f)|^2\frac{\sin^{8l}\frac{akh}{2}}{\alpha_r^{2l}(kh)}\alpha_r^{2l}(kh)\\&\leqslant\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\sin^{8l}\frac{akh}{2}}{\alpha_r^{2l}(kh)}(2\pi)2^{8l}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(f)|^2\alpha_r^{2l}(kh)\\&=2^{8l}D_r^{2l}(a,h)\|f-U_{h,r,l}(f)\|_2^2.\end{aligned}\tag{14}$$

Извлекая квадратные корни из обеих частей соотношения (14), получаем требуемое. □

Замечание 3. *Для функции* $f(x)=\cos x$ *имеем*

$$\|\delta_{ah}^{4l}(f)\|_2=2^{4l}\left(\frac{\sin^4\frac{ah}{2}}{\alpha_r(h)}\right)^l\|f-U_{h,r,l}(f)\|_2,$$

и, следовательно,

$$\sup_{h>0} \frac{\|\delta_{ah}^{4l}(f)\|_2}{\|f - U_{h,r,l}(f)\|_2} = 2^{4l} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{\sin^4 ax}{\alpha_r(2x)}\right)^l.$$

Следствие 1. *Пусть* $a > 0$, $r, l \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{h>0} \sup_{f\in L_2} \frac{\|\delta_{ah}^{4l}(f)\|_2}{\|f - U_{h,r,l}(f)\|_2} = 2^{4l} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{\sin^4 ax}{\alpha_r(2x)}\right)^l.$$

Для доказательства следствия 1 достаточно сопоставить лемму 3 и замечание 3.

§3. Основные результаты

3.1. Теорема 1. *Пусть* $a \geqslant \frac{1}{2}$, $l \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{h>0} \sup_{f\in L_2} \frac{\omega_{4l}(f, ah)_2}{\|f - U_{h,1,l}(f)\|_2} = 2^{4l} \bigl(30a^4\bigr)^l.$$

Доказательство. В силу замечания 1 и леммы 1 из §2

$$\sup_{0<t\leqslant 1} D(at) = 30a^4$$

при $a \geqslant \frac{1}{2}$. Учитывая этот факт и опираясь на лемму 3, находим, что

$$\omega_{4l}(f, ah)_2 = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|\delta_{ath}^{4l}(f)\|_2 \leqslant 2^{4l} \left(\sup_{0<t\leqslant 1} D(at)\right)^l \|f - U_{h,1,l}(f)\|_2$$
$$\leqslant 2^{4l} \bigl(30a^4\bigr)^l \|f - U_{h,1,l}(f)\|_2.$$

Следовательно,

$$\sup_{h>0} \sup_{f\in L_2} \frac{\omega_{4l}(f, ah)_2}{\|f - U_{h,1,l}(f)\|_2} \leqslant 2^{4l} \bigl(30a^4\bigr)^l.$$

Обратное неравенство очевидно в силу следствия 1 из §2. □

Теорема 2. *Пусть* $a \geqslant \frac{3}{4}$, $l \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{h>0} \sup_{f\in L_2} \frac{\omega_{4l}(f, ah)_2}{\|f - U_{h,2,l}(f)\|_2} = 2^{4l} \left(\frac{45}{8} a^4\right)^l.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. При этом используются замечание 2, леммы 2 и 3 и следствие 1 предыдущего параграфа.

Следствие 2. *Пусть $a \geqslant \frac{1}{2}$, $h > 0$, $f \in L_2$. Тогда*

$$\frac{1}{480a^4}\omega_4(f, ah)_2 \leqslant \|f - S_{h,1,2}(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{6}\omega_4\big(f, \tfrac{h}{2}\big)_2.$$

Для доказательства следствия 2 достаточно сопоставить теорему 1 ($l = 1$) и неравенство (1) при $r = 1$ и $m = 2$.

В частности, из следствия 2 вытекает, что для любой $f \in L_2$ при $h > 0$

$$\frac{1}{30}\omega_4\big(f, \tfrac{h}{2}\big)_2 \leqslant \|f - S_{h,1,2}(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{6}\omega_4\big(f, \tfrac{h}{2}\big)_2.$$

Следствие 3. *Пусть $a \geqslant \frac{3}{4}$, $h > 0$, $f \in L_2$. Тогда*

$$\frac{1}{90a^4}\omega_4(f, ah)_2 \leqslant \|f - S_{h,2,2}(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{6}\omega_4(f, h)_2.$$

Для доказательства следствия 3 достаточно сопоставить теорему 2 ($l = 1$) и неравенство (1) при $r = 2$ и $m = 2$.

В частности, из следствия 3 вытекает, что для любой $f \in L_2$ при $h > 0$

$$\frac{1}{90}\omega_4(f, h)_2 \leqslant \|f - S_{h,2,2}(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{6}\omega_4(f, h)_2.$$

3.2. Обозначим через A множество четных вещественных функций f из C, у которых коэффициенты Фурье

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_Q f(x)\cos kx dx \geqslant 0$$

при всех $k = 0, 1, 2\ldots$. Известно [3, с. 277], что если $f \in A$, то ее ряд Фурье равномерно сходится на $\mathbb{R}$ и справедливо равенство

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx. \tag{15}$$

Опираясь на (15), находим, что если $f \in A$, то

$$\delta_t^{4l}(f, x) = 2^{4l}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\sin^{4l}\frac{kt}{2}\cos kx,$$

$$f(x) - U_{h,r,l}(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\sin\frac{kh}{2}}{\frac{kh}{2}}\right)^r + \frac{1}{3}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^r\right)^l \cos kx,$$

$$\|\delta_t^{4l}(f)\| = 2^{4l} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \sin^{4l} \frac{kt}{2},$$

$$\|f - U_{h,r,l}(f)\| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \alpha_r^l(kh).$$

Опираясь на приведенные соотношения и рассуждая так же как при доказательстве теорем 1 и 2, легко приходим к следующим утверждениям.

Теорема 1′. *Пусть* $a \geqslant \frac{1}{2}$, $l \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{h>0} \sup_{f \in A} \frac{\omega_{4l}(f, ah)_\infty}{\|f - U_{h,1,l}(f)\|} = 2^{4l} \left(30a^4\right)^l.$$

Теорема 2′. *Пусть* $a \geqslant \frac{3}{4}$, $l \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{h>0} \sup_{f \in A} \frac{\omega_{4l}(f, ah)_\infty}{\|f - U_{h,2,l}(f)\|} = 2^{4l} \left(\frac{45}{8} a^4\right)^l.$$

Литература

1. В. В. Жук, В. Ф. Кузютин, *Аппроксимация функций и численное интегрирование*, СПб., Изд-во СПбГУ, 1995.
2. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций*, Л., Изд-во ЛГУ, 1982.
3. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, М., 1961.

Dron V. O., Zhuk V. V. On approximation of periodic functions by modified Steklov averages in L_2.

In the space L_2 of periodic functions, sharp (in the sence of constants) estimates from below for the deviation of the modified Steklov functions of the first and second order in terms of the modulus of continuity are established. Similar results are also obtained for even continuous periodic functions with nonnegative Fourier coefficients in the space C.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vera.dron@gmail.com
E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 2 сентября 2014 г.