Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 429, 2014 г.

Е. П. Голубева

ПРОБЛЕМА САЛЕМА ДЛЯ ФУНКЦИИ, ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ МИНКОВСКОГО $?(t)$

Явное выражение для знаменитой функции Минковского $?(t)$ основано на разложении вещественного числа t в непрерывную дробь: если $0 \leqslant t < 1$ и

$$t = [0, k_1, \dots, k_l, \dots], \tag{1}$$

то

$$?(t) = 1/2^{k_1-1} - 1/2^{k_1+k_2-1} + \dots .$$

Минковский [1] ввел эту функцию для того, чтобы установить взаимно-однозначное соответствие между рациональными числами из $(0,1)$ и вещественными квадратичными иррациональностями из $(0,1)$. Это соответствие основано на том факте, что для квадратичных иррациональностей (и только для них) разложение (1) является периодическим и, следовательно, $?(t)$ принимает рациональные значения.

Салем [2] показал, что $?(t)$, которая является строго возрастающей непрерывной функцией, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\log 2/2\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Кроме того, $?'(t) = 0$ почти всюду и других конечных значений $?'(t)$ не принимает.

Размерность Хаусдорфа множества, где $?'(t) = \infty$, оценена снизу (см., например, [3,4]).

Кроме того, существуют точки, в которых $?'(t)$ не существует. (Можно показать, что для квадратичных иррациональностей t последний случай невозможен, т.е. $?'(t) = 0$ или $?'(t) = \infty$. Этот факт, возможно, известен, но обнаружить его в литературе не удалось.)

Существует ряд обобщений функции $?(t)$, наиболее известные из которых принадлежат Данжуа ([5]).

Там же было найдено явное выражение для обратной функции.

В работе [6] были введены функции, родственные $?(t)$ и обладающие такими же свойствами.

Ключевые слова: функция Минковского $?(t)$, дерево Фарея, вопрос Салема.

Салем [2] поставил следующий вопрос: стремится ли коэффициент Фурье–Стилтьеса

$$b_n = \int\limits_0^1 \cos 2\pi n t d?(t)$$

к 0 при $n \to \infty$?

Этот вопрос был (положительно) решен в работе [7]. Однако в работе [8] утверждается, что в работе [7] доказательство содержит неустранимый пробел.

В настоящей работе мы решаем аналогичную задачу для обратной функции: стремится ли последовательность

$$\alpha_n = \int\limits_0^1 \cos(2\pi n ?(t))\, dt$$

к 0 при $n \to \infty$. В данном случае ответ на вопрос Салема является отрицательным (см. теорему ниже).

Всюду в дальнейшем через W_n мы обозначаем множество точек дерева Фарея поколения n:

$$W_n = \Big\{ p/q : p/q = [0, k_1, \ldots k_l],\ \sum_{1 \leqslant i \leqslant l} k_i = n+1 \Big\}.$$

Основным результатом работы является

Теорема. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для некоторой последовательности n_k ($n_k \to \infty$) выполнено неравенство*

$$\alpha_{n_k} > C.$$

Разобъем доказательство на ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть $n = 2^k$, тогда*

$$\alpha_n = 2 \int\limits_{1/2}^1 \cos(2\pi ?(t)) f_k(t)\, dt,$$

где функция $f_m(t)$ определена при $1/2 \leqslant t \leqslant 1$ рекуррентным соотношением

$$f_0(t) = 1, \quad f_{m+1}(t) = \frac{f_m\left(\frac{1}{1+t}\right)}{(1+t)^2} + \frac{f_m\left(\frac{1}{2-t}\right)}{(2-t)^2}\,. \tag{2}$$

Доказательство. Известно, что функция $?(t)$ обладает следующими свойствами:

$$?(1-t) = 1-?(t),$$
$$?(\frac{1}{1+t}) = 1-\frac{1}{2}?(t).$$

Следовательно,

$$\alpha_{2^k} = 2\int\limits_0^1 \cos(2\pi 2^k ?(t))\,dt = 2\int\limits_{1/2}^1 \cos(2\pi 2^k ?(t))\,dt.$$

Сделаем в последнем интеграле замену $t \to 1/(1+t)$. Тогда

$$\alpha_{2^k} = 2\int\limits_0^1 \cos(2\pi 2^{k-1} ?(t))(1+t)^{-2}\,dt$$
$$= 2\int\limits_0^{1/2} \cos(2\pi 2^{k-1} ?(t))(1+t)^{-2}\,dt$$
$$+ 2\int\limits_{1/2}^1 \cos(2\pi 2^{k-1} ?(t))(1+t)^{-2}\,dt.$$

В первом слагаемом заменим $t \to 1-t$, тогда

$$\alpha_{2^k} = 2\int_{1/2}^1 \cos(2\pi 2^{k-1} ?(t))((1+t)^{-2} + (2-t)^{-2})\,dt$$
$$= 2\int\limits_{1/2}^1 \cos(2\pi 2^{k-1} ?(t)) f_1(t)\,dt.$$

Повторяя эти преобразования $(t \to 1/(1+t); t \to 1-t)$ k раз, имеем утверждение леммы. □

Лемма 2. *Функция $f_m(t)$, определенная в* (2)*, обладает следующими свойствами*:

1. $f_m(t)$ *можно представить в виде*

$$f_m(t) = \sum_{p/q \in W_m} \left((q-pt)^{-2} + (q-p(1-t))^{-2}\right); \tag{3}$$

2. *$f_m(t)$ возрастает на* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$;

3. *Если*

$$f_m(1/2) \underset{m\to\infty}{\to} 0, \quad \text{\textit{то}} \quad f_m(t) \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

для всех $t \in [1/2, 1)$;

4.

$$\int\limits_{1/2}^{1} f_m(t)\,dt = 1/2.$$

Доказательство. Докажем свойство 1 по индукции. Имеем

$$f_1(t) = \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(2-t)^2} = \sum_{p/q\in W_1=\{1/2\}} \left(\frac{1}{(q-pt)^2} + \frac{1}{(q-p\,(1-t))^2}\right).$$

Пусть для некоторого m свойство доказано, тогда в силу (3)

$$\begin{aligned} f_{m+1}(t) = \sum_{p/q\in W_m} &\left(\frac{1}{\left(q-p\frac{1}{1+t}\right)^2(1+t)^2} + \frac{1}{\left(q-p\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\right)^2(1+t)^2}\right.\\ &+\left.\frac{1}{\left(q-p\frac{1}{2-t}\right)^2(2-t)^2} + \frac{1}{\left(q-p\left(1-\frac{1}{2-t}\right)\right)(2-t)^2}\right)\\ &= \sum_{p/q\in W_m}\left(\frac{1}{((q-p)+qt)^2} + \frac{1}{(q+(q-p)t)^2}\right.\\ &+\left.\frac{1}{((2q-p)-qt)^2} + \frac{1}{((2q-p)-(q-p)t)^2}\right). \end{aligned}$$

Одной из возможных форм представления множества W_{m+1} является следующая: $W_{m+1} = \left\{r = \frac{q}{2q-p} \quad \text{и} \quad r = \frac{q-p}{2q-p}, \frac{p}{q} \in W_m\right\}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\sum_{p'/q'\in W_{m+1}}\left(\frac{1}{(q'-p't)^2} + \frac{1}{(q'-p'(1-t))^2}\right)\\ &= \sum_{p/q\in W_m}\left(\frac{1}{((2q-p)-qt)^2} + \frac{1}{((2q-p)-(q-p)t)^2} + \frac{1}{((q-p)+qt)^2}\right.\\ &+\left.\frac{1}{(q+(q-p)t)^2}\right) = f_{m+1}(t). \end{aligned}$$

Свойство 2 легко следует из предыдущего, поскольку

$$f'_k(t) = 2\sum_{p/q\in W_k}\left(\frac{p}{(q-pt)^3} - \frac{p}{(q-p(1-t))^3}\right)$$

и $t \geqslant 1-t$.

Докажем свойство 3. Пусть $f_k(1/2) \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Так как $f_{k+1}(1/2) = \frac{8}{9}f_k(2/3)$, отсюда следует, что $f_k(2/3) \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Но $f_k(t)$ – возрастающая функция и, значит, $f_k(t) \underset{k\to\infty}{\to} 0$ для всех $t \in [1/2, 2/3]$.

При любом целом $m \geqslant 2$ мы имеем

$$f_{k+1}(\frac{m-1}{m}) = \frac{m^2}{(2m-1)^2}f_k\Big(\frac{m}{2m-1}\Big) + \frac{m^2}{(m+1)^2}f_k\Big(\frac{m}{m+1}\Big).$$

Таким образом, $f_k\big(\frac{m}{m+1}\big) \underset{k\to\infty}{\to} 0$ вместе с $f_k\big(\frac{m}{2m-1}\big)$ и $f_k\big(\frac{m-1}{m}\big)$, а из монотонности $f_k(t)$ следует, что $f_k(t) \underset{k\to\infty}{\to} 0$ во всех промежуточных точках из интервала $\big[\frac{m-1}{m}, \frac{m}{m+1}\big]$.

Свойство 4 доказывается так же, как лемма 1. Имеем

$$\int_{1/2}^{1} f_0(t)\,dt = \frac{1}{2} = \int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(2-t)^2}\right)dt = \int_{1/2}^{1} f_1(t)\,dt = \dots .$$

$\square$

Лемма 3. *Пусть* $n = 2^k$, $\alpha_n = 2\beta_k$, *где*

$$\beta_k = \int_{1/2}^{1}\cos(2\pi?(t))f_k(t)\,dt,$$

тогда

$$\beta_k = \int_{2/3}^{1}\cos(2\pi?(t))\Big(f_k(t) - f_k\Big(\frac{t}{3t-1}\Big)(3t-1)^{-2}\Big)\,dt.$$

Доказательство. Имеем из леммы 1

$$\alpha_n = 2\int_{1/2}^{1}\cos(2\pi?(t))f_k(t)\,dt = 2\beta_k.$$

Разобьем промежуток интегрирования на два, $[1/2,2/3]$ и $[2/3,1]$, и в интеграле по первому промежутку положим $t=u/(3u-1)$. При $t=1/2$ $u=1$ и при $t=2/3$ $u=2/3$, $dt=-(3u-1)^{-2}\,du$.

Для $t\in[1/2,2/3]$ разложение в непрерывную дробь имеет вид $t=[0,1,1,k;\lambda]$, где k – целое, $k\geqslant 1$, $0\leqslant\lambda<1$. Покажем, что тогда $u=[0,1,k+1;\lambda]$. Действительно, $t=(k+1+\lambda)/(2k+1+2\lambda)$, а $[0,1,k+1;\lambda]=(k+1+\lambda)/(k+2+\lambda)$. Отсюда следует, что $[0,1,k+1;\lambda]=t/(3t-1)=u$.

Вычислим $?(t)$ и $?(u)$. Имеем

$$?(t)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{k+1}}(1-?(\lambda))$$

и

$$?(u)=1-\frac{1}{2^{k+1}}(1-?(\lambda)).$$

Отсюда следует, что

$$?(u)+?(t)=3/2 \quad\text{и}\quad \cos(2\pi ?(t))=-\cos(2\pi ?(u)).$$

Подставляя последнее выражение в

$$\int\limits_{1/2}^{2/3}\cos(2\pi ?(t))f_k(t)\,dt,$$

имеем утверждение леммы. □

Лемма 4. *Пусть последовательность S_k задана равенствами*

$$S_k=\sum_{p/q\in W_k}1/q^2.$$

Тогда $\alpha_k\geqslant CS_k$, где $C>0$ – абсолютная постоянная.

Доказательство. При $t\geqslant 2/3$ имеем $?(t)\geqslant 3/4$ и $\cos(2\pi ?(t))\geqslant 0$.

Если $t\geqslant t_0>2/3$, то

$$\cos 2\pi ?(t)>C=C(t_0)>0. \tag{4}$$

В силу утверждения 1 леммы 2 имеем

$$f_k(t/(3t-1))(3t-1)^{-2}=\sum_{p/q\in W_k}\Big((q(3t-1)-pt)^{-2}+(q(3t-1)-p(2t-1))^{-2}\Big)$$

и

$$f_k(t)-f_k(t/(3t-1))(3t-1)^{-2}=\sum_{p/q\in W_k}\Big((q-pt)^{-2}-(q(3t-1)-pt)^{-2}\Big)$$
$$+\sum_{p/q\in W_k}\big(q-p(1-t)\big)^{-2}-\big(q(3t-1)-p(2t-1)\big)^{-2}\big). \qquad (5)$$

При $t\geqslant 2/3\quad q\leqslant(3t-1)q$, то есть в первой сумме все слагаемые неотрицательны. При $t\geqslant t_0>2/3$ имеем

$$(q-pt)^{-2}-(q(3t-1)-pt)^{-2}>Cq^{-2},$$

где $C>0$ постоянная, зависящая только от t_0.

Аналогично, при $t\leqslant 1$

$$q-p(1-t)\leqslant(3t-1)q-p(2t-1)$$

и, значит, во второй сумме в (5) все слагаемые неотрицательны.

Таким образом, с учетом (4) имеем

$$\begin{aligned}\alpha_k&=\int_{2/3}^{1}\cos(2\pi?(t))\big(f_k(t)-f_k(t/(3t-1))\big)\,dt\\&=\int_{2/3}^{t_0}\cos(2\pi?(t))\big(f_k(t)-f_k(t/(3t-1))\big)\,dt\\&+\int_{t_0}^{1}\cos(2\pi?(t))\big(f_k(t)-f_k(t(3t-1))(3t-1)^{-2})\big)\,dt\\&\geqslant\int_{t_0}^{1}CS_k\,dt>CS_k.\end{aligned}$$

□

Следствие. *Если последовательность S_k не стремится к нулю при $k\to\infty$, то утверждение теоремы доказано.*

Таким образом, нам достаточно рассмотреть гипотетическую ситуацию, когда $S_k\to 0$ при $k\to\infty$.

Замечание. Изучить поведение S_k при больших k не удалось. Можно доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}S_k=\infty$.

Лемма 5. *Имеет место оценка*

$$f_k(1/2) > 2S_k.$$

Доказательство сразу же следует из явного представления $f_k(t)$.

Доказательство теоремы. Как уже упоминалось выше (следствие из леммы 4), мы можем считать, что $f_k(1/2) \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Зафиксируем значение $\frac{2}{3} < t_0 < 1$. Из п. 4 леммы 2 следует, что мы можем считать, что $f_k(t) < \varepsilon$ при всех $t \leqslant t_0$ и $k > K(\varepsilon)$ (здесь $\varepsilon > 0$ произвольно мало).

Тогда

$$\left| \int\limits_{1/2}^{t_0} \cos(2\pi ?(t)) f_k(t)\, dt \right| \underset{k\to\infty}{=} o(1)$$

и

$$\int\limits_{1/2}^{t_0} f_k(t)\, dt \underset{k\to\infty}{=} o(1).$$

А тогда

$$\beta_k = \int\limits_{1/2}^{1} \cos(2\pi ?(t)) f_k(t)\, dt = \int\limits_{t_0}^{1} \cos(2\pi ?(t)) f_k(t) dt$$
$$+ \int\limits_{1/2}^{t_0} \cos(2\pi ?(t)) f_k(t) dt > C \int\limits_{t_0}^{1} f_k(t) dt + o(1),$$

где $C = \cos 2\pi ?(t_0) > 0$.

Для последнего интеграла имеем, очевидно,

$$\int\limits_{t_0}^{1} f_k(t) dt = \int\limits_{1/2}^{1} f_k(t) dt + o(1) = 1/2 + o(1).$$

Теорема доказана. □

Литература

1. H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 2, 1911, 50–51.
2. R. Salem, *On some singular monotonic functions which are strictly increasing.* — Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), No. 3, 427–439.
3. А. А. Душистова, Н. Г. Мощевитин, *О производной функции* $?(x)$. — Фундамент. и прикл. мат. **16** (2010), No. 6, 33–44.
4. O. Jenkinson, *On the density of Hausdorff dimension of bounded type continued fraction sets: the Texan conjecture.* — Stoch. Dyn. **4** (2004), 63–74.
5. A. Denjoy, *Sur une function réelle de Minkowski.* — J. Math. Pures Appl. **17** (1938), No. 2, 105–151.
6. Е. П. Голубева, *Случайные величины, связанных с деревом Фарея.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **404** (2012), 61–74.
7. S. Yakubovich, *The Fourier–Stieltjes transform of Minkowski's* $?(x)$ *function and an affirmative answer to Salem's problem.* — C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **349** (2011), No. 11–12, 633–636.
8. G. Alkauskas, *The Minkowski* $?(x)$ *function and Salem's problem.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **350** (2012), No. 3–4, 137–140.

Golubeva E. P. Salem's problem for the inverse Minkowski $?(t)$ function.

Let d_n be the coefficient Fourier–Stieltjes of the Minkowski $?(t)$ function –

$$d_n = \int_0^1 \cos 2\pi n t d?(t).$$

Salem's problem is as to whether d_n tends to zero as $n \to \infty$.

In the paper the coefficient Fowier

$$\alpha_n = \int_0^1 \cos(2\pi n?(t))\, dt$$

is considered. It is proved that α_n does not tend to zero as $n \to \infty$.

Государственный университет
телекоммуникаций им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 18 сентября 2014 г.

E-mail: elena_golubeva@mail.ru