Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ ОБРАТНЫХ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ НЕКРАСОВА

§1. Введение и предварительные сведения

В статье рассматриваются два класса (невырожденных) H-матриц, содержащие матрицы Некрасова, а также верхние оценки для бесконечной нормы обратных к матрицам из этих классов. Первый класс $S\mathrm{N}$ состоит из так называемых S-некрасовских матриц, а второй – из QN- (quasi-Nekrasov) матриц, определяемых в данной работе. Мы показываем, что QN-матрицы являются невырожденными и, более того, они являются H-матрицами. С другой стороны, класс QN-матриц содержит класс N матриц Некрасова. Таким образом, матрицы из обоих рассматриваемых классов $S\mathrm{N}$ и QN могут рассматриваться как обобщенные матрицы Некрасова.

Напомним некоторые необходимые в дальнейшем определения и факты.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется H-матрицей, если ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, определенная по формуле

$$m_{ij} = \begin{cases} \ \ |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

является невырожденной M-матрицей. Заметим, что, в соответствии с приведенным определением, все H-матрицы являются невырожденными.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется матрицей Некрасова, если

$$|a_{ii}| > h_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.1}$$

Ключевые слова: S-некрасовская матрица, QN-матрица, матрица Некрасова, H-матрица, SDD-матрица, S-SDD матрица, обратная матрица, бесконечная норма, верхняя оценка, оценка Вараха.

где величины $h_i(A)$ определяются посредством следующих рекуррентных соотношений:

$$h_1(A) = r_1(A) = \sum_{j\neq 1} |a_{1j}|; \quad h_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} h_j(A) + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Невырожденность матриц Некрасова была установлена Гудковым в работе [1]. Те факты, что класс N содержит класс SDD (strictly diagonally dominant) матриц со строгим диагональным преобладанием и сам содержится в классе H-матриц, были установлены Робером [13].

Заметим, что, как следует из определения, все диагональные элементы матрицы Некрасова отличны от нуля.

В матричных терминах вектор $h(A) = (h_i(A))$ можно записать в виде

$$h(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e = |D|[I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e, \tag{1.3}$$

где $e = [1, \ldots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор, I_n – единичная матрица порядка n, а $A = D + L + U$ – стандартное расщепление матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ соответственно на ее диагональную (D), строго нижнюю треугольную (L) и строго верхнюю треугольную (U) части. Таким образом, условие (1.1) равносильно неравенству (см. [13])

$$(|D| - |L|)^{-1}|U|e = [I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e < e \tag{1.4}$$

и является условием строгого диагонального преобладания в Z-матрице

$$(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U|,$$

получаемой из матрицы сравнения $\mathcal{M}(A)$ ее левым умножением на нижнюю треугольную матрицу $(|D| - |L|)^{-1}$.

В работе [4] была получена следующая верхняя оценка для нормы обратной к матрице Некрасова.

Теорема 1.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – матрица Некрасова порядка $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}, \tag{1.5}$$

где мы используем обозначение $\langle n\rangle = \{1, \ldots, n\}$.

Здесь и далее вектор $z(A) = (z_i(A))$ определяется по формуле

$$z(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}e. \tag{1.6}$$

Как было показано в работе [4], оценка (1.5) вообще говоря улучшает ранее предложенную оценку из статьи [6], а для SDD матрицы $A = (a_{ij})$ оценка (1.5), по крайней мере, не хуже, чем классическая оценка Вараха [14]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}| - r_i(A)\}}, \tag{1.7}$$

т.е. справедливо неравенство

$$\max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} \leqslant \frac{1}{\min_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}| - r_i(A)\}}, \tag{1.8}$$

где

$$r_i(A) = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

причем равенство в (1.8) имеет место в том и только том случае, когда

$$\min_{i\in\langle n\rangle} \{\mathcal{M}(A)e\}_i = \min_{i\in\langle n\rangle} \frac{|a_{ii}| - h_i(A)}{z_i(A)}.$$

Пусть $S \subseteq \langle n\rangle$ – непустое подмножество множества индексов. Понятие SDD матриц можно обобщить следующим образом (см. [9, 15]). Определим частичные суммы

$$r_i^S(A) = \sum_{j\in S\setminus\{i\}} |a_{ij}|, \quad i \in S. \tag{1.9}$$

В этих обозначениях матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется S-SDD (S-strictly diagonally dominant) матрицей, если выполняются следующие два условия:

$$|a_{ii}| > r_i^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \tag{1.10}$$

и

$$\begin{gathered}\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)\right] > r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A) \\ \text{для всех} \quad i \in S \quad \text{и} \quad j \in \bar S.\end{gathered} \tag{1.11}$$

S-SDD матрицы (под другим названием) впервые были введены в работе [10], в которой было доказано, что они являются H-матрицами. По сути тот же самый класс матриц рассматривался в работе [2] как особый подкласс блочных матриц, удовлетворяющих псевдоблочным условиям диагонального преобладания типа Островского–Брауэра.

Под названием PBDD(n_1, n_2) тот же класс матриц изучался и в статье [3].

Ясно, что SDD матрицы образуют собственный подкласс класса S-SDD матриц.

Нам потребуется следующая верхняя оценка для нормы обратных к S-SDD матрицам, которая первоначально была установлена в [11], а затем доказана иным способом в [3].

Теорема 1.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – S-SDD матрица, где S – некоторое непустое собственное подмножество множества индексов $\langle n\rangle$. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\ j\in\bar{S}} \max\left\{\rho_{ij}^S(A),\ \rho_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}, \tag{1.12}$$

где

$$\rho_{ij}^S(A) = \frac{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A)}{(|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) - r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A)}, \quad i \in S, \quad j \in \bar{S}. \tag{1.13}$$

Статья построена следующим образом. В §2 рассматриваются S-некрасовские матрицы. Для них устанавливается новая верхняя оценка бесконечной нормы обратных и показывается, что последняя улучшает известные ранее оценки. Также доказывается, что для матриц Некрасова новая оценка превосходит оценку теоремы 1.1.

В §3 вводятся в рассмотрение QN-матрицы. Показывается, что QN-матрицы образуют подкласс класса H-матриц, содержащий матрицы Некрасова. Для нормы обратной к QN-матрице получена верхняя оценка и доказано, что для матриц Некрасова эта оценка улучшает оценку теоремы 1.1.

§2. Верхние оценки для нормы обратных к SN матрицам

Класс SN, состоящий из S-некрасовских матриц, где S – непустое собственное подмножество множества индексов, был введен в работе [8] с использованием величин

$$h_1^S(A) = r_1^S(A), \quad h_i^S(A) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} h_j^S(A) + \sum_{\substack{j=i+1\\ j\in S}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется S-некрасовской (короче, SN-) матрицей, если

$$|a_{ii}| > h_i^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \tag{2.2}$$

и

$$\left[|a_{ii}| - h_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - h_j^{\bar S}(A)\right] > h_i^{\bar S}(A)\, h_j^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \quad \text{и} \quad j \in \bar S. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$e^S = (e_i^S), \quad e_i^S = \begin{cases} 1, & i \in S, \\ 0, & i \in \bar S. \end{cases}$$

Тогда, как нетрудно понять, соотношения (2.1) можно записать в виде матрично-векторного соотношения

$$h^S(A) = |L||D|^{-1} h^S(A) + |U| e^S,$$

из которого получаем, что

$$h^S(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1} |U| e^S. \tag{2.4}$$

Как легко следует из соответствующих определений, матрицы Некрасова образуют собственный подкласс класса S-некрасовских матриц. С другой стороны, класс SN содержит класс S-SDD (см. [8, 7]).

В работе [7] для обратных к S-некрасовским матрицам были установлены следующие верхние оценки.

Теорема 2.1. *Пусть S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$, $n \geqslant 2$, и пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – SN-матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} z_i(A) \cdot \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \max\left\{\chi_{ij}^S(A),\ \chi_{ji}^{\bar S}(A)\right\}, \tag{2.5}$$

и

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}|} \cdot \max_{i\in S,\, j\in\bar S} \max\left\{\widetilde\chi_{ij}^S(A),\ \widetilde\chi_{ji}^{\bar S}(A)\right\}, \tag{2.6}$$

где вектор $z(A)$ определен в (1.6) *и*

$$\chi_{ij}^S(A) = \frac{|a_{ii}| - h_i^S(A) + h_j^S(A)}{\left[|a_{ii}| - h_i^S(A)\right]\left[|a_{jj}| - h_j^{\bar S}(A)\right] - h_i^{\bar S}(A) h_j^S(A)}, \quad i \in S,\ j \in \bar S; \tag{2.7}$$

$$\widetilde{\chi}_{ij}^S(A) = \frac{|a_{ii}||a_{jj}| - |a_{jj}|h_i^S(A) + |a_{ii}|h_j^S(A)}{\left[|a_{ii}| - h_i^S(A)\right]\left[|a_{jj}| - h_j^{\bar{S}}(A)\right] - h_i^{\bar{S}}(A)h_j^S(A)}, \quad i \in S,\ j \in \bar{S}. \tag{2.8}$$

Как указано в [7], в частном случае матриц Некрасова оценки (2.5) и (2.6) улучшают соответствующие оценки, полученные в работе [6].

Оценки теоремы 2.1 улучшаются в следующей теореме, доказательство которой основано на той же идее, что и доказательство теоремы 1.1.

Теорема 2.2. *Пусть S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$, $n \geqslant 2$, и пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – SN-матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \max\left\{\xi_{ij}^S(A),\ \xi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}, \tag{2.9}$$

где

$$\xi_{ij}^S(A) = \frac{z_j(A)\left[|a_{ii}| - h_i^S(A)\right] + z_i(A)h_j^S(A)}{\left[|a_{ii}| - h_i^S(A)\right]\left[|a_{jj}| - h_j^{\bar{S}}(A)\right] - h_i^{\bar{S}}(A)h_j^S(A)}, \quad i \in S,\ j \in \bar{S}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Поскольку $A \in S$N, то матрица

$$C = (c_{ij}) = |D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = |D| - |D|(|D| - |L|)^{-1}|U| \tag{2.11}$$

является S-SDD матрицей по теореме 3.2 из работы [5]. Определим диагональную матрицу $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ из условия

$$\Delta e = |D|(|D| - |L|)^{-1}e = z(A).$$

Тогда диагональные элементы матрицы Δ положительны, и мы имеем

$$\Delta^{-1}|D|(|D| - |L|)^{-1}e = e,$$

так что

$$\|\Delta^{-1}|D|(|D| - |L|)^{-1}\|_\infty = 1. \tag{2.12}$$

С помощью (2.11) и (2.12) мы выводим

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty &= \|(\Delta^{-1}C)^{-1}\left[\Delta^{-1}|D|(|D| - |L|)^{-1}\right]\|_\infty \\ &\leqslant \|(\Delta^{-1}C)^{-1}\|_\infty \cdot \|\Delta^{-1}|D|(|D| - |L|)^{-1}\|_\infty \\ &= \|(\Delta^{-1}C)^{-1}\|_\infty.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Из соотношения (2.4):

$$h^S(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e^S$$

и (2.11) вытекает, что

$$h_i^S(A) = |a_{ii}| - \{Ce^S\}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поскольку матрица C имеет положительные диагональные и неположительные внедиагональные элементы, последнее соотношение можно записать в виде равнств

$$|c_{ii}| - r_i^S(C) = |a_{ii}| - h_i^S(A), \quad i \in S, \tag{2.14}$$

и

$$r_j^S(C) = h_j^S(A), \quad j \in \bar{S}. \tag{2.15}$$

Применяя теорему 1.2 к S-SDD матрице $\Delta^{-1}C$ и принимая во внимание соотношения (2.13) и (2.14)–(2.15), мы получаем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty &\leqslant \max_{i\in S,\, j\in \bar{S}} \max\left\{\rho_{ij}^S(\Delta^{-1}C),\ \rho_{ji}^{\bar{S}}(\Delta^{-1}C)\right\}\\ &= \max_{i\in S,\, j\in \bar{S}} \max\left\{\xi_{ij}^S(A),\ \xi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}.\end{aligned}$$

Теперь для завершения доказательства остается лишь напомнить, что, по теореме Островского [12], для H-матрицы A имеет место неравенство

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty.$$

□

Ниже мы показываем, что новая оценка (2.9) теоремы 2.2 улучшает обе оценки теоремы 2.1, а также что для матриц Некрасова оценка (2.9) улучшает оценку (1.5).

Теорема 2.3. *Пусть S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$, $n \geqslant 2$, и пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – SN-матрица. Тогда*

$$\max_{i\in S,\, j\in \bar{S}} \max\left\{\xi_{ij}^S(A),\ \xi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\} \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} z_i(A)\cdot \max_{i\in S,\, j\in \bar{S}} \max\left\{\chi_{ij}^S(A),\ \chi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\} \tag{2.16}$$

и

$$\max_{\substack{i\in S,\\ j\in \bar{S}}} \max\left\{\xi_{ij}^S(A),\ \xi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\} \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}|}\cdot \max_{\substack{i\in S,\\ j\in \bar{S}}} \max\left\{\widetilde{\chi}_{ij}^S(A),\ \widetilde{\chi}_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}, \tag{2.17}$$

где величины $\xi_{ij}^S(A)$, $\chi_{ij}^S(A)$ и $\widetilde{\chi}_{ij}^S(A)$ определены соответственно в (2.10), (2.7) *и* (2.8).

Доказательство. Для доказательства неравенства (2.16) достаточно убедиться в том, что

$$\xi_{ij}^S(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} z_i(A)\cdot \chi_{ij}^S(A), \quad i\in S, \quad j\in\bar{S}. \tag{2.18}$$

Действительно, поскольку знаменатели $\xi_{ij}^S(A)$ и $\chi_{ij}^S(A)$ совпадают, то (2.18) следует из тривиального соотношения

$$z_j(A)\left[|a_{ii}|-h_i^S(A)\right]+z_i(A)h_j^S(A)\leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} z_i(A)\cdot\left[|a_{ii}|-h_i^S(A)+h_j^S(A)\right].$$

Для того, чтобы установить (2.17), заметим, что при

$$\alpha=\max_{i\in\langle n\rangle}\frac{z_i(A)}{|a_{ii}|}$$

мы имеем

$$z_i(A)\leqslant\alpha|a_{ii}| \quad \text{и} \quad z_j(A)\leqslant\alpha|a_{jj}|.$$

С помощью последних неравенств мы получаем

$$\begin{aligned} &z_j(A)\left[|a_{ii}|-h_i^S(A)\right]+z_i(A)h_j^S(A)\\ &\qquad\qquad\leqslant\alpha\left[|a_{ii}||a_{jj}|-|a_{jj}|h_i^S(A)+|a_{ii}|h_j^S(A)\right]. \end{aligned}$$

Тем самым показано, что числитель $\xi_{ij}^S(A)$ не больше, чем числитель $\max_{i\in\langle n\rangle}\left\{\frac{z_i(A)}{|a_{ii}|}\right\}\widetilde{\chi}_{ij}^S(A)$. Теперь остается лишь заметить, что знаменатели обеих дробей одинаковы. □

Теорема 2.4. *Пусть $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ – матрица Некрасова. Тогда*

$$\max_{i\in S,\, j\in\bar{S}}\max\left\{\xi_{ij}^S(A),\ \xi_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}\leqslant\max_{i\in\langle n\rangle}\frac{z_i(A)}{|a_{ii}|-h_i(A)}, \tag{2.19}$$

где величины $\xi_{ij}^S(A)$ определены в (2.10).

Доказательство. Заметим, что, как следует из соответствующих доказательств, оценки (1.5) и (2.9) являются соответственно оценкой Вараха (1.7) и оценкой (1.12) для одной и той же SDD матрицы $C=|D|(|D|-|L|)^{-1}\mathcal{M}(A)$. Следовательно, неравенство (2.19) следует из того известного факта (см. [4]), что для SDD матрицы оценка (1.12), вообще говоря, более точна, чем оценка (1.11). □

§3. QN-матрицы

Матрица $A = D+L+U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, с ненулевыми диагональными элементами называется QN-матрицей, если матрица

$$G = M^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - M^{-1}|L||D|^{-1}|U| \tag{3.1}$$

имеет строгое диагональное преобладание. Здесь и ниже мы используем обозначение

$$M = (|D| - |L|)|D|^{-1}(|D| - |U|) = \mathcal{M}(A) + |L||D|^{-1}|U|. \tag{3.2}$$

Ясно, что матрица M является монотонной, т.е. она обратима и обратная матрица M^{-1} неотрицательна.

Поскольку, в силу (3.1), G является Z-матрицей (т.е. ее внедиагональные элементы неположительны), из свойства строгого диагонального преобладания матрицы G следует, что она является M-матрицей, причем это свойство можно записать в виде неравенства

$$Ge = M^{-1}\mathcal{M}(A)e = (I_n - M^{-1}|L||D|^{-1}|U|)e > 0. \tag{3.3}$$

Итак, $A \in \mathrm{QN}$ тогда и только тогда, когда

$$e > M^{-1}|L||D|^{-1}|U|e. \tag{3.4}$$

Сперва мы покажем, что QN-матрицы являются H-матрицами.

Теорема 3.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – QN-матрица. Тогда A является H-матрицей.*

Доказательство. Ввиду (3.1), мы имеем

$$\mathcal{M}(A) = MG,$$

так что $\mathcal{M}(A)$ есть произведение монотонной матрицы и M-матрицы. Значит, $\mathcal{M}(A)$ – монотонная матрица. Тем самым $\mathcal{M}(A)$ является M-матрицей, а A – H-матрицей. □

Теперь мы покажем, что класс QN содержит класс N.

Теорема 3.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрица Некрасова. Тогда A является QN-матрицей.*

Доказательство. Действительно, поскольку $A \in \mathrm{N}$, то Z-матрица

$$C = (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U|$$

имеет строгое диагональное преобладание, т.е. вектор Ce положителен. Но тогда тем более и вектор

$$Ge = (|D| - |U|)^{-1}|D|Ce$$

положителен. Это значит, что Z-матрица $G = M^{-1}\mathcal{M}(A)$ имеет свойство строгого диагонального преобладания, а значит A является QN-матрицей. $\square$

Установим теперь оценку для бесконечной нормы обратной к QN-матрице.

Теорема 3.3. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – QN-матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\{M^{-1}e\}_i}{\{M^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Матрица A является QN-матрицей, так что матрица G, определенная в (3.1), обладает строгим диагональным преобладанием и имеет место равенство

$$\mathcal{M}(A) = MG. \tag{3.6}$$

Определим диагональную матрицу $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ посредством соотношения

$$M^{-1}e = \Delta e. \tag{3.7}$$

Заметим, что, поскольку матрица M монотонна, то диагональные элементы матрицы Δ положительны. В силу (3.7), мы имеем

$$(M\Delta)^{-1}e = e.$$

Для монотонной матрицы $M\Delta$ полученное соотношение означает, что

$$\|(M\Delta)^{-1}\|_\infty = 1. \tag{3.8}$$

Теперь с помощью (3.6) и (3.8) мы выводим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty &= \|(\Delta^{-1}G)^{-1}(M\Delta)^{-1}\|_\infty \\ &\leqslant \|(\Delta^{-1}G)^{-1}\|_\infty \, \|(M\Delta)^{-1}\|_\infty = \|(\Delta^{-1}G)^{-1}\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Поскольку, по теореме 3.1, A является H-матрицей, то, по теореме Островского [12], справедливо неравенство

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty. \tag{3.10}$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться соотношениями (3.9) и (3.10) и применить классическую оценку Вараха (1.7) к SDD M-матрице $\Delta^{-1}G$,

$$\|(\Delta^{-1}G)^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min\limits_{i\in\langle n\rangle}\{\Delta^{-1}Ge\}_i} = \max_{i\in\langle n\rangle}\frac{\delta_i}{\{Ge\}_i} = \max_{i\in\langle n\rangle}\frac{\{M^{-1}e\}_i}{\{M^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i}.$$

□

Как легко видеть, ввиду (1.6) и (1.3), оценка (3.5) может также быть записана в виде

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\frac{\{(|D|-|U|)^{-1}z(A)\}_i}{\{(|D|-|U|)^{-1}(|D|e-h(A))\}_i},$$

явно демонстрирующем различие между оценками (3.5) и (1.5).

Последняя теорема данной работы утверждает, что для матрицы Некрасова оценка (3.5) теоремы 3.3 является, вообще говоря, более точной, чем оценка (1.5) теоремы 1.1.

Теорема 3.4. *Пусть $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$, – матрица Некрасова. Тогда*

$$\max_{i\in\langle n\rangle}\frac{\{M^{-1}e\}_i}{\{M^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i} \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle}\frac{z_i(A)}{|a_{ii}|-h_i(A)}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Обозначим

$$\widetilde{M} = (|D|-|L|)|D|^{-1}. \tag{3.12}$$

Тогда (см. (1.6))

$$\widetilde{M}^{-1}e = |D|(|D|-|L|)^{-1}e = z(A) \tag{3.13}$$

и

$$\widetilde{M}^{-1}\mathcal{M}(A)e = |D|\left[I_n - (|D|-|L|)^{-1}|U|\right]e.$$

В силу (1.3), из последнего неравенства вытекает, что

$$\{\widetilde{M}^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i = |a_{ii}|-h_i(A), \quad i=1,\dots,n. \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) мы получаем

$$\max_{i\in\langle n\rangle}\frac{\{\widetilde{M}^{-1}e\}_i}{\{\widetilde{M}^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i} = \max_{i\in\langle n\rangle}\frac{z_i(A)}{|a_{ii}|-h_i(A)}. \tag{3.15}$$

Положим

$$\alpha = \max_{i\in\langle n\rangle}\frac{\{\widetilde{M}^{-1}e\}_i}{\{\widetilde{M}^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i}. \tag{3.16}$$

Тогда, очевидно,

$$\{\widetilde{M}^{-1}e\}_i \leqslant \alpha\{\widetilde{M}^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

или, в векторном виде,

$$\widetilde{M}^{-1}e \leqslant \alpha\widetilde{M}^{-1}\mathcal{M}(A)e.$$

Умножая полученное соотношение слева на неотрицательную матрицу $(|D| - |U|)^{-1}$ и используя (3.2), мы приходим к неравенству

$$M^{-1}e \leqslant \alpha M^{-1}\mathcal{M}(A)e,$$

означающему, что

$$\{M^{-1}e\}_i \leqslant \alpha\{M^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Теперь, ввиду (3.15), (3.16) и (3.17), мы имеем

$$\max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} = \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\{\widetilde{M}^{-1}e\}_i}{\{\widetilde{M}^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i} = \alpha \geqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\{M^{-1}e\}_i}{\{M^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i}.$$

Теорема доказана. □

В заключение имеет смысл отметить, что если $A = D + L + U$ является QN-матрицей и матрица B определена по формуле

$$B = (D + L)D^{-1}(D + U) = A + LD^{-1}U,$$

то (переобусловленная) матрица

$$B^{-1}A = I_n - B^{-1}LD^{-1}U$$

является SDD матрицей, так же как и матрица $G = M^{-1}\mathcal{M}(A)$.

Действительно, по теореме Островского,

$$|(D + L)^{-1}| \leqslant (|D| - |L|)^{-1} \quad \text{и} \quad |(D + U)^{-1}| \leqslant (|D| - |U|)^{-1},$$

так что $|B^{-1}| \leqslant M^{-1}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(B^{-1}A)e &\geqslant \left[I_n - |B^{-1}||L||D|^{-1}|U|\right]e \\ &\geqslant \left[I_n - M^{-1}|L||D|^{-1}|U|\right]e = Ge > 0,\end{aligned}$$

где мы воспользовались неравенством (3.3).

Значит, не только матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ преобразуется в SDD матрицу посредством левого умножения на M^{-1}, но то же верно и для самой QN-матрицы A относительно левого умножения на B^{-1}.

В частности, расщепление $A = B - LD^{-1}U$ является сходящимся монотонным расщеплением QN-матрицы A, так что $\rho(B^{-1}LD^{-1}U) < 1$, где ρ обозначает спектральный радиус.

Литература

1. В. В. Гудков, *Об одном признаке неособенности матриц.* — Латвийский математический ежегодник, Рига, 1966, с. 385–390.
2. Л. Ю. Колотилина, *Псевдоблочные условия диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 94–131.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки бесконечной нормы обратных к матрицам Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 111–120.
5. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые характеризации некрасовских и S-некрасовских матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 152–165.
6. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T. Li. — *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices.* Appl. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
7. L. Cvetković, V. Kostić, K. Doroslovački, *Max-norm bounds for the inverse of S-Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **218** (2012), 9498–9503.
8. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
9. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
10. Y. M. Gao, X. H. Wang, *Criteria for generalized diagonal dominant and M-matrices.* — Linear Algebra Appl. **169** (2009) 257–268.
11. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and $S-SDD$ matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.
12. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
13. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
14. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
15. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. Bounds for the inverses of generalized Nekrasov matrices.

The paper considers upper bounds for the infinity norm of the inverse for matrices in two subclasses of the class of (nonsingular) H-matrices, both of which contain the class of Nekrasov matrices. The first one has been introduced recently and consists of the so-called S-Nekrasov matrices. For S-Nekrasov matrices, the known bounds are improved. The second subclass consists of the so-called QN- (quasi-Nekrasov) matrices, which are defined in the present paper. For QN-matrices, an upper bound on the infinity norm of the inverses is established. It is shown that in application to Nekrasov matrices the new bounds are generally better than the known ones.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург,
Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 15 октября 2014 г.