Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ НЕКРАСОВСКИХ И S-НЕКРАСОВСКИХ МАТРИЦ

§1. Введение

В статье выводятся двусторонние оценки для определителей так называемых некрасовских и S-некрасовских матриц. Известно, что матрицы из этих классов являются H-матрицами; в данной статье под H-матрицами понимаются только невырожденные H-матрицы.

Напомним необходимые определения и факты. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется H-матрицей, если ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, определяемая по формуле

$$m_{ij} = \begin{cases} \ \ |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

является невырожденной M-матрицей.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется матрицей Некрасова (короче, N-матрицей), если

$$|a_{ii}| > h_i(A), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

где величины $h_i(A)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$h_1(A) = r_1(A), \quad h_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Невырожденность матриц Некрасова была установлена Гудковым [1]. Робер [12] доказал, что матрицы Некрасова образуют подкласс класса H-матриц и содержат класс матриц, обладающих строгим диагональным преобладанием, обозначаемый далее через SDD (strictly diagonally dominant).

Класс матриц Некрасова будет обозначаться через N.

Ключевые слова: определитель, двусторонние оценки, матрицы Некрасова, S-некрасовские матрицы, матрицы со строгим диагональным преобладанием, S-SDD матрицы.

Поскольку, очевидно, $h_i(A) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то из (1.1) вытекает, что все диагональные элементы матрицы Некрасова отличны от нуля.

Пусть $A = D + L + U$ – стандартное расщепление матрицы A на ее диагональную (D), строго нижнюю треугольную (L) и строго верхнюю треугольную (U) части. Тогда, как хорошо известно и почти очевидно, вектор $h(A) = (h_i(A))$, определенный в (1.2), можно записать в следующей матрично-векторной форме:

$$h(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e. \tag{1.3}$$

Здесь $e = [1, \ldots, 1]^T$ – единичный вектор и, если $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, то $|B| = (|b_{ij}|)$. Таким образом, условие (1.1) равносильно неравенству

$$(|D| - |L|)^{-1}|U|e < e, \tag{1.4}$$

установленному Робером [12].

Более общий класс S-некрасовских (короче, SN-) матриц, введенный в работе [5], определяется следующим образом.

Для заданного непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n \rangle = \{1, \ldots, n\}$, где $n \geqslant 2$, матрица $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется SN-матрицей, если выполняются следующие два условия:

(i) для всех $i \in S$

$$|a_{ii}| > h_i^S(A); \tag{1.5}$$

(ii) для всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$

$$\left[|a_{ii}| - h_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - h_j^{\bar{S}}(A)\right] > h_i^{\bar{S}}(A)\, h_j^S(A). \tag{1.6}$$

Здесь и ниже для $S \subseteq \langle n \rangle$ мы используем обозначение

$$\bar{S} = \langle n \rangle \setminus S,$$

а вектор $h^S(A) = (h_i^S(A))$ определяется с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} h_1^S(A) = r_1^S(A) = \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq 1}} |a_{1j}|; \\ h_i^S(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j^S(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{\substack{j \in S \\ j = i+1}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Обозначим
$$e^S = (e_i^S), \quad e_i^S = \begin{cases} 1, & i \in S, \\ 0, & i \in \bar{S}. \end{cases}$$
Тогда, как нетрудно убедиться, соотношения (1.7) можно записать в матрично-векторной форме как
$$h^S(A) = |L||D|^{-1}h^S(A) + |U|e^S,$$
откуда следует, что
$$h^S(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e^S. \tag{1.8}$$
Из соотношений (1.8) и (1.3), последнее из которых есть (1.8) для $S = \langle n\rangle$, мы имеем
$$h^S(A) + h^{\bar{S}}(A) = h(A). \tag{1.9}$$

Еще одним важным подклассом класса H-матриц является класс S-SDD матриц. В соответствии с определением 3.10 из книги [13], для заданного непустого подмножества S индексного множества $\langle n\rangle$, где $n \geqslant 2$, матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется S-SDD матрицей (S-strictly diagonally dominant), если выполнены следующие два условия:

(i) для всех $i \in S$
$$|a_{ii}| > r_i^S(A); \tag{1.10}$$
(ii) для всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$
$$\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right] > r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A). \tag{1.11}$$
Здесь и ниже мы используем обозначения
$$r_i^S(A) = \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.12}$$
и
$$r_i(A) = r_i^{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{j\in \langle n\rangle\\ j\neq i}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.13}$$
Ясно, что для любого подмножества S множества $\langle n\rangle$ мы имеем
$$r_i(A) = r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A), \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.14}$$

Работа построена следующим образом. В оставшейся части введения мы напоминаем некоторые известные оценки для определителей SDD и некрасовских матриц, которые будут использованы в работе, а также вводим некоторые дополнительные обозначения. §2 посвящен матрицам Некрасова. Сперва мы выводим аналог классических оценок Островского для определителей SDD матриц. Затем мы улучшаем этот результат и показываем, что полученные оценки превосходят оценки, представленные в работе [3]. В §3 устанавливаются некоторые оценки для определителей S-некрасовских матриц. Поскольку класс S-некрасовских матриц содержит класс S-SDD матриц [5], то оценки из §3 применимы, в частности, к определителям S-SDD матриц и дополняют результаты, полученные в статье [2].

В работе используются следующие обозначения.

• Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $i \in \langle n \rangle$, то $A^{(i)} = A[1,\dots,i]$ – это левая верхняя угловая главная подматрица матрицы A порядка i.

• Неравенства $\leqslant$ и $\geqslant$ между вещественными матрицами понимаются как поэлементные.

• I_n – единичная матрица порядка n.

Ниже нам потребуются следующие известные результаты.

Теорема 1.1 ([9, 10]). *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, имеет строгое диагональное преобладание. Тогда*

$$\prod_{i=1}^{n}[|a_{ii}| - r_i(A)] \leqslant |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n}[|a_{ii}| + r_i(A)]. \tag{1.15}$$

Теорема 1.2 ([11]). *Пусть матрица $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, имеет строгое диагональное преобладание. Тогда*

$$\prod_{i=1}^{n}[|a_{ii}| - u_i(A)] \leqslant |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n}[|a_{ii}| + u_i(A)], \tag{1.16}$$

где $u_i(A) = r_i(U)$, $i = 1,\dots,n$.

Теорема 1.3 ([8]). *Пусть матрица $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, имеет строгое диагональное преобладание. Тогда*

$$\prod_{i=1}^{n}[|a_{ii}| - l_i(A)] \leqslant |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n}[|a_{ii}| + l_i(A)], \tag{1.17}$$

где $l_i(A) = r_i(L)$, $i = 1,\dots,n$.

Заметим, что в [8] была предложена только нижняя оценка из (1.17). Также стоит отметить, что теоремы 1.2 и 1.3 в действительности следуют одна из другой, что становится ясно, если одновременно рассмотреть матрицы A и $P^T AP$, где P – так называемая перъединичная матрица.

Теорема 1.4 ([4]). *Пусть матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *имеет строгое диагональное преобладание, так что* $\sigma_i = \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|} < 1$, $i = 1,\dots,n$. *Тогда*

$$|a_{11}|\prod_{i=2}^{n}[|a_{ii}| - l_i + L_i] \leqslant |\det A| \leqslant |a_{11}|\prod_{i=2}^{n}[|a_{ii}| + l_i - L_i], \tag{1.18}$$

где

$$l_i = \sum_{j<i}\sigma_j|a_{ij}|, \quad L_i = \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}\sum_{j>i}|a_{1j}|, \quad i = 2,\dots,n. \tag{1.19}$$

Теорема 1.5 ([3]). *Пусть* $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *является матрицей Некрасова. Тогда*

$$|a_{11}|\prod_{i=2}^{n}[|a_{ii}| - l_i + L_i] \leqslant |\det A| \leqslant |a_{11}|\prod_{i=2}^{n}[|a_{ii}| + l_i - L_i], \tag{1.20}$$

где

$$l_i = \sum_{j<i}|a_{ij}|\frac{h_j(A)}{|a_{jj}|}, \quad L_i = \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}\sum_{j>i}|a_{1j}|, \quad i = 2,\dots,n. \tag{1.21}$$

Как было установлено в работе [3], для вещественной матрицы Некрасова A с положительными диагональными элементами имеет место неравенство $\det A > 0$, так что в случае вещественных N-матриц теорема 1.5 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1.6 ([3]). *Пусть* $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *– вещественная матрица Некрасова, причем* $a_{ii} > 0$, $i = 1,\dots,n$. *Тогда*

$$a_{11}\prod_{i=2}^{n}[a_{ii} - l_i + L_i] \leqslant \det A \leqslant a_{11}\prod_{i=2}^{n}[a_{ii} + l_i - L_i], \tag{1.22}$$

где l_i *и* L_i *определяются по формулам* (1.21).

Следует также отметить, что, как было указано в статье [3], в применении к SDD матрицам более общие оценки теоремы 1.5 улучшают оценки теоремы 1.4, которые, в свою очередь, улучшают оценки теорем 1.1 и 1.3.

§2. Оценки для некрасовских матриц

В этом параграфе мы устанавливаем двусторонние оценки для определителей некрасовских матриц. Основная идея состоит в том, чтобы свести вычисление определителя для матрицы Некрасова к той же задаче для SDD матрицы.

Пусть $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрица Некрасова. Тогда соотношение (1.4) означает, что матрица

$$(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U|$$

имеет строгое диагональное преобладание, а значит и матрица

$$C = C(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = |D|[I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U|] \quad (2.1)$$

обладает этим свойством. Но тогда и матрица

$$B = B(A) = D(D + L)^{-1}A = D[I_n + (D + L)^{-1}U] \quad (2.2)$$

также является SDD матрицей, поскольку, по теореме Островского [10],

$$|(D + L)^{-1}| \leqslant (|D| - |L|)^{-1}. \quad (2.3)$$

Поскольку, очевидно,

$$\det A = \det B, \quad (2.4)$$

то задача получения оценок для $\det A$ свелась к получению оценок для матрицы B, обладающей строгим диагональным преобладанием.

Применяя к B простейшие оценки Островского (1.15), мы приходим к следующему результату.

Теорема 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) = D+L+U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрица Некрасова. Тогда*

$$\prod_{i=1}^{n}(|a_{ii}| - h_i(A)) \leqslant |\det A| \leqslant \prod_{i=1}^{n}(|a_{ii}| + h_i(A)). \quad (2.5)$$

Доказательство. В силу (2.2) и (1.3), мы имеем

$$|b_{ii}| - r_i(B) \geqslant |a_{ii}| - \left|\{D(D + L)^{-1}Ue\}_i\right| \geqslant |a_{ii}| - h_i(A), \quad i = 1, \dots, n,$$

и, аналогично,

$$|b_{ii}| + r_i(B) \leqslant |a_{ii}| + h_i(A), \quad i = 1, \dots, n.$$

Теперь оценки (2.5) вытекают из равенства (2.4) и теоремы 1.1. Теорема доказана. □

Следует заметить, что поскольку, в силу (1.2) и (1.1), для матрицы Некрасова A мы имеем

$$h_i(A) \leqslant r_i(A), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.6}$$

то в применении к SDD матрицам оценки (2.5) теоремы 2.1 улучшают оценки Островского (1.15). Для матриц же Некрасова простейшие оценки (2.5) являются аналогами оценок (1.15) для SDD матриц.

С другой стороны, ввиду (1.2) и (1.21), оценки (2.5) в общем случае хуже известных оценок (1.20) теоремы 1.5. Последние оценки улучшаются в следующей теореме, в которой представлены аналоги оценок (1.17) для N-матриц.

Следующая простая лемма показывает, в частности, что оценки (2.5) действительно улучшаются в теореме 2.2.

Лемма 2.1. *Если $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрица Некрасова, то*

$$h_j(A^{(i)}) \leqslant h_j(A), \quad j = 1, \ldots, i; \quad i = 2, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Доказательство. Лемма легко доказывается по индукции. □

Из леммы 2.1 немедленно следует, что если A – N-матрица, то $A^{(i)}$ также является N-матрицей, $i = 2, \ldots, n$.

Теорема 2.2. *Пусть $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – матрица Некрасова. Тогда*

$$|a_{11}| \prod_{i=2}^{n} \left[|a_{ii}| - h_i(A^{(i)})\right] \leqslant |\det A| \leqslant |a_{11}| \prod_{i=2}^{n} \left[|a_{ii}| + h_i(A^{(i)})\right]. \tag{2.8}$$

Доказательство. Ввиду равенства (2.4), нам достаточно показать, что для SDD матрицы B, определенной в (2.2), справедливы оценки

$$|a_{11}| \prod_{i=2}^{n} \left[|a_{ii}| - h_i(A^{(i)})\right] \leqslant |\det B| \leqslant |a_{11}| \prod_{i=2}^{n} \left[|a_{ii}| + h_i(A^{(i)})\right]. \tag{2.9}$$

Обозначим

$$C_i = |D^{(i)}|(|D^{(i)}| - |L^{(i)}|)^{-1}|U^{(i)}|.$$

Как легко видеть, для матрицы C, определенной в (2.1), мы имеем

$$C_i = C^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Применяя соотношение (1.3) к N-матрице $A^{(i)}$, мы получаем

$$h_j(A^{(i)}) = \{C_i e^{(i)}\}_j, \quad j = 1, \ldots, i. \tag{2.11}$$

Используя (2.2), (2.1) и (2.11), мы выводим

$$|b_{ii}| + l_i(B) = \{|B|e^{(i)}\}_i \leqslant \{(|D| + \left|D(D+L)^{-1}U\right| e^{(i)}\}_i$$

$$\leqslant \left\{ \left[|D| + |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|\right] e^{(i)} \right\}_i \qquad (2.12)$$

$$= |a_{ii}| + \left\{ C_i e^{(i)} \right\}_i = |a_{ii}| + h_i(A^{(i)}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и, аналогично,

$$|b_{ii}| - l_i(B) \geqslant |a_{ii}| - h_i(A^{(i)}), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (2.13)$$

Теперь для завершения доказательства остается лишь применить теорему 1.3 к SDD матрице B. □

Следствие 2.1. *Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, – вещественная матрица Некрасова с положительными диагональными элементами, то*

$$a_{11} \prod_{i=2}^{n} \left[a_{ii} - h_i(A^{(i)}) \right] \leqslant \det A \leqslant a_{11} \prod_{i=2}^{n} \left[a_{ii} + h_i(A^{(i)}) \right]. \qquad (2.14)$$

Доказательство. Действительно, как уже было упомянуто во введении, в работе [3] было доказано, что в рассматриваемом случае имеет место неравенство $\det A > 0$. Можно рассуждать и по-другому. Как известно [7], для вещественной H-матрицы $A = (a_{ij})$ знак $\det A$ совпадает со знаком произведения $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, так что в условиях следствия мы имеем $\det A = |\det A|$. Значит, неравенства (2.14) немедленно следуют из неравенств (2.8). □

Как было указано в статье [3], оценки (1.20) не только применимы к более широкому классу матриц, чем оценки Бреннера (1.18), но они также улучшают последние в применении к SDD матрицам. В завершение этого параграфа мы покажем, что оценки (2.8) улучшают оценки Бэйли–Крабтри (1.20). Для этого, используя индукцию, мы докажем, что

$$h_i(A^{(i)}) \leqslant l_i - L_i, \quad i = 2, \ldots, n. \qquad (2.15)$$

При $i = 2$ мы имеем

$$h_2(A^{(2)}) = |a_{21}| \frac{h_1(A^{(2)})}{|a_{11}|} = |a_{21}| \frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}$$

и

$$
\begin{aligned}
l_2 - L_2 &= |a_{21}|\frac{h_1(A)}{|a_{11}|} - \frac{|a_{21}|}{|a_{11}|}\sum_{j\geqslant 3}|a_{1j}| \\
&= \frac{|a_{21}|}{|a_{11}|}\left(h_1(A) - \sum_{j\geqslant 3}|a_{1j}|\right) = |a_{21}|\frac{|a_{12}|}{|a_{11}|},
\end{aligned}
$$

так что

$$
h_2(A^{(2)}) = l_2 - L_2.
$$

Используя индукцию, предположим, что неравенство (2.15) уже установлено для $k = 2, \dots, i-1$, и докажем его для $k = i$. С помощью леммы 2.1 и элементарных преобразований мы выводим:

$$
\begin{aligned}
h_i(A^{(i)}) &= \sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|\frac{h_j(A^{(i)})}{|a_{jj}|} \\
&\leqslant |a_{i1}|\frac{h_1(A^{(i)})}{|a_{11}|} + \sum_{j=2}^{i-1}|a_{ij}|\frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} \\
&= |a_{i1}|\frac{h_1(A) - \sum\limits_{j=i+1}^{n}|a_{1j}|}{|a_{11}|} + \sum_{j=2}^{i-1}|a_{ij}|\frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} \\
&= \sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|\frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} - |a_{i1}|\frac{\sum\limits_{j=i+1}^{n}|a_{1j}|}{|a_{11}|} = l_i - L_i.
\end{aligned}
$$

Значит,

$$
h_i(A^{(i)}) \leqslant l_i - L_i,
$$

и неравенство (2.15) установлено.

§3. Оценки для S-некрасовских матриц

Первая теорема этого параграфа, которая будет в нем существенно использоваться, была доказана в работе [5] и в явном виде сформулирована в статье [6].

Теорема 3.1. *Для заданного непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n\rangle$, где $n \geqslant 2$, матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является*

SN-матрицей тогда и только тогда, когда существует диагональная матрица $W_n^S(\gamma) = \mathrm{diag}\,(w_1, \ldots, w_n)$ с элементами

$$w_i = \begin{cases} \gamma, & i \in S, \\ 1, & i \in \bar{S}, \end{cases} \qquad \gamma > 0, \tag{3.1}$$

такая, что $AW_n^S(\gamma)$ является матрицей Некрасова.

Мы будем использовать тот факт, что если $A \in S\mathrm{N}$, то (см. [5]) матрица $AW_n^S(\gamma)$ является матрицей Некрасова для любого γ из интервала

$$\max_{i \in S} \frac{h_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}| - h_i^S(A)} < \gamma < \min_{j \in \bar{S}} \frac{|a_{jj}| - h_j^{\bar{S}}(A)}{h_j^S(A)}. \tag{3.2}$$

Заметим, что для S-некрасовской матрицы A из условия (1.6) вытекает, что интервал (3.2) является непустым.

Сперва мы обобщим оценки теоремы 2.1 на случай S-некрасовских матриц.

Теорема 3.2. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является SN-матрицей для некоторого непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n \rangle$, где $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\begin{gathered} \max_\gamma \prod_{i\in S} \left[|a_{ii}| - h_i^S(A) - \frac{h_i^{\bar{S}}(A)}{\gamma} \right] \prod_{i \in \bar{S}} \Big[|a_{ii}| - \gamma h_i^S(A) - h_i^{\bar{S}}(A) \Big] \\ \leqslant |\det A| \leqslant \\ \min_\gamma \prod_{i\in S} \left[|a_{ii}| + h_i^S(A) + \frac{h_i^{\bar{S}}(A)}{\gamma} \right] \prod_{i \in \bar{S}} \Big[|a_{ii}| + \gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A) \Big], \end{gathered} \tag{3.3}$$

где максимум и минимум берутся по всем γ из интервала (3.2).

Заметим, что из условий (3.2) следует, что для матрицы $A \in S\mathrm{N}$ нижняя оценка в (3.3) нетривиальна, тогда как верхняя оценка строго меньше, чем $2^n \prod_{i=1}^n |a_{ii}|$.

Доказательство. Обозначим

$$B = AW_n^S(\gamma). \tag{3.4}$$

Тогда, очевидно,

$$\det A = \det B / \det W_n^S(\gamma) = \det B \left/ \prod_{i=1}^n w_i \right. = \det B \left/ \gamma^{|S|} \right. . \tag{3.5}$$

В работе [5] было показано, что для матрицы (3.4) выполняются соотношения

$$h_i(B) = \gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Поэтому, применяя теорему 2.1 к N-матрице B и используя соотношения (3.6), мы приходим к оценкам

$$\prod_{i=1}^{n} \left[|b_{ii}| - \gamma h_i^S(A) - h_i^{\bar{S}}(A) \right] \leqslant |\det B| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left[|b_{ii}| + \gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A) \right],$$

из которых, ввиду (3.5), следует, что для матрицы $A \in S\mathrm{N}$ справедливы оценки (3.3). □

Оценки теоремы 3.2 улучшаются в следующей теореме 3.3, обобщающей теорему 2.2 на случай SN-матриц. Мы используем следующие обозначения.

Для $i \in \langle n \rangle$ мы полагаем

$$S_i = S \cap \{1, \ldots, i\}, \quad \bar{S}_i = \{1, \ldots, i\} \setminus S_i;$$

$$e^{(i)} = (e_j^{(i)})_{j=1}^n, \quad \text{где} \quad e_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & j \leqslant i, \\ 0, & j > i. \end{cases} \tag{3.7}$$

Очевидно,

$$e^{(i)} = e^{S_i} + e^{\bar{S}_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 3.1. *Если $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, является S-некрасовской матрицей, то и $A^{(i)}$ также является S-некрасовской матрицей, $i = 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Действительно, поскольку A – SN-матрица, то матрица (3.4) является N-матрицей по теореме 3.1. Следовательно, по лемме 2.1, подматрица $B^{(i)}$ также является N-матрицей, а, по теореме 3.1, соотношение

$$B^{(i)} = A^{(i)} W_i^{S_i}(\gamma),$$

вытекающее из (3.4), означает, что $A^{(i)}$ является SN-матрицей. □

Теорема 3.3. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ является SN-матрицей для некоторого непустого собственного подмножества S множества индексов*

$\langle n\rangle$, где $n \geqslant 2$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&|a_{11}| \max_{\gamma} \Biggl\{ \prod_{\substack{i\in S\\ i\geqslant 2}} \left[|a_{ii}| - h_i^{S_i}(A^{(i)}) - \frac{h_i^{\bar S_i}(A^{(i)})}{\gamma} \right] \\
&\qquad\times \prod_{\substack{i\in \bar S\\ i\geqslant 2}} \left[|a_{ii}| - \gamma h_i^{S_i}(A^{(i)}) - h_i^{\bar S_i}(A^{(i)}) \right] \Biggr\} \leqslant |\det A| \qquad (3.9)\\
&\leqslant |a_{11}| \min_{\gamma} \Biggl\{ \prod_{\substack{i\in S\\ i\geqslant 2}} \left[|a_{ii}| + h_i^{S_i}(A^{(i)}) + \frac{h_i^{\bar S_i}(A^{(i)})}{\gamma} \right] \\
&\qquad\times \prod_{\substack{i\in \bar S\\ i\geqslant 2}} \left[|a_{ii}| + \gamma h_i^{S_i}(A^{(i)}) + h_i^{\bar S_i}(A^{(i)}) \right] \Biggr\},
\end{aligned}
$$

где максимум и минимум берутся по всем γ из интервала (3.2).

Доказательство. Для матрицы B, определенной в (3.4), мы имеем

$$B^{(i)} = A^{(i)} W_i^{S_i}(\gamma),$$

а тогда, по аналогу соотношения (3.6) для подматрицы $B^{(i)}$, мы получаем

$$h_i(B^{(i)}) = \gamma h_i^{S_i}(A^{(i)}) + h_i^{\bar S_i}(A^{(i)}), \quad i = 2, \dots, n. \qquad (3.10)$$

Для некрасовской матрицы $B = (b_{ij})$, используя теорему 2.2 и (3.10), мы выводим

$$
\begin{aligned}
&|\det B| \leqslant |b_{11}| \prod_{i\geqslant 2} \left[|b_{ii} + h_i(B^{(i)}) \right] = \left(\prod_{i=1}^{n} w_i \right) |a_{11}| \prod_{i\geqslant 2} \left[|a_{ii}| + \frac{h_i(B^{(i)})}{w_i} \right] \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} w_i \right) |a_{11}| \prod_{i\geqslant 2} \left[|a_{ii}| + \frac{\gamma h_i^{S_i}(A^{(i)}) + h_i^{\bar S_i}(A^{(i)})}{w_i} \right] \qquad (3.11)\\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} w_i \right) |a_{11}| \prod_{\substack{i\in S\\ i\geqslant 2}} \left[|a_{ii}| + h_i^{S_i}(A^{(i)}) + \frac{h_i^{\bar S_i}(A^{(i)})}{\gamma} \right] \\
&\qquad\times \prod_{\substack{i\in \bar S\\ i\geqslant 2}} \left[|a_{ii}| + \gamma h_i^{S_i}(A^{(i)}) + h_i^{\bar S_i}(A^{(i)}) \right].
\end{aligned}
$$

Аналогично,

$$
\begin{aligned}
|\det B| \geqslant |b_{11}| \prod_{i\geqslant 2}\Big[|b_{ii} - h_i(B^{(i)})\Big] &= \left(\prod_{i=1}^{n} w_i\right) |a_{11}| \prod_{i\geqslant 2}\left[|a_{ii}| - \frac{h_i(B^{(i)})}{w_i}\right] \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} w_i\right) |a_{11}| \prod_{\substack{i\in S\\ i\geqslant 2}}\left[|a_{ii}| - h_i^{S_i}(A^{(i)}) - \frac{h_i^{\bar{S}_i}(A^{(i)})}{\gamma}\right] \\
&\qquad\times \prod_{\substack{i\in \bar{S}\\ i\geqslant 2}}\Big[|a_{ii}| - \gamma h_i^{S_i}(A^{(i)}) - h_i^{\bar{S}_i}(A^{(i)})\Big].
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Доказательство теоремы завершается использованием соотношений (3.5), (3.11) и (3.12) и переходом к максимуму и минимуму по γ. □

Заметим теперь, что в доказательстве теоремы 3.3 выражения (3.10) можно заменить на выражения

$$
h_i(B^{(i)}) = \gamma_i h_i^{S_i}(A^{(i)}) + h_i^{\bar{S}_i}(A^{(i)}), \quad i = 2, \ldots, n, \tag{3.13}
$$

где параметры γ_i соответствуют подматрицам $A^{(i)}$, $i = 2, \ldots, n$, и берутся из соответствующих интервалов

$$
\max_{k\in S_i} \frac{h_k^{\bar{S}_i}(A^{(i)})}{|a_{kk}| - h_k^{S_i}(A^{(i)})} < \gamma_i < \min_{j\in \bar{S}_i} \frac{|a_{jj}| - h_j^{\bar{S}_i}(A^{(i)})}{h_j^{S_i}(A^{(i)})}, \quad i = 2, \ldots, n, \tag{3.14}
$$

каждый из которых, как легко понять, содержит интервал (3.2) для γ.

Таким образом, мы приходим к следующему обобщению теоремы 3.3.

Теорема 3.4. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является SN-матрицей для некоторого непустого собственного подмножества S множества индексов*

$\langle n\rangle$, где $n \geqslant 2$. Тогда

$$|a_{11}| \max_{\gamma_2,\dots,\gamma_n} \left\{ \prod_{\substack{i\in S\\ i\geqslant 2}} \left[|a_{ii}| - h_i^{S_i}(A^{(i)}) - \frac{h_i^{\bar S_i}(A^{(i)})}{\gamma_i}\right] \right.$$
$$\left. \times \prod_{\substack{i\in \bar S\\ i\geqslant 2}} \left[|a_{ii}| - \gamma_i h_i^{S_i}(A^{(i)}) - h_i^{\bar S_i}(A^{(i)})\right] \right\} \leqslant |\det A|$$
$$\leqslant |a_{11}| \min_{\gamma_2,\dots,\gamma_n} \left\{ \prod_{\substack{i\in S\\ i\geqslant 2}} \left[|a_{ii}| + h_i^{S_i}(A^{(i)}) + \frac{h_i^{\bar S_i}(A^{(i)})}{\gamma_i}\right] \right.$$
$$\left. \times \prod_{\substack{i\in \bar S\\ i\geqslant 2}} \left[|a_{ii}| + \gamma_i h_i^{S_i}(A^{(i)}) + h_i^{\bar S_i}(A^{(i)})\right] \right\}, \tag{3.15}$$

где максимум и минимум берутся по всем γ_i из интервалов (3.14).

Замечание 3.1. Заметим, что для вещественной S-некрасовской матрицы A с положительными диагональными элементами мы имеем $\det A > 0$. Действительно, по теореме 3.1, для некоторого $\gamma > 0$ матрица $B = AW_n^S(\gamma)$ является матрицей Некрасова и имеет положительные диагональные элементы. Но, как уже отмечалось в доказательстве следствия 2.1, в этом случае $\det B > 0$, так что и $\det A > 0$.

Таким образом, в случае вещественной S-некрасовской матрицы с положительными диагональными элементами в оценках теорем 3.2–3.4 $|\det A|$ можно заменить на $\det A$.

Рассмотрим частный случай S-SDD матриц, образующих подкласс класса S-некрасовских матриц (см. [5]). Ясно, что для S-SDD матрицы A справедливы оценки теорем 3.2–3.4. С другой стороны, известно (см. доказательство теоремы 3.11 в книге [13]), что для любого γ из итервала

$$\max_{i\in S} \frac{r_i^{\bar S}(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)} < \gamma < \min_{j\in \bar S} \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)}{r_j^S(A)} \tag{3.16}$$

матрица $B = AW_n^S(\gamma)$ обладает строгим диагональным преобладанием. Будучи SDD матрицей, матрица $B = (b_{ij})$ также является и матрицей Некрасова, так что (см. (2.6)) мы имеем

$$h_i(B) \leqslant r_i(B), \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.17}$$

Принимая во внимание соотношения (3.6) и их аналоги

$$r_i(B) = \gamma r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.18}$$

мы можем записать неравенства (3.17) в виде

$$\gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A) \leqslant \gamma r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A), \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.19}$$

Соотношения (3.19) доказывают, что для S-SDD матрицы A в теоремах 3.2–3.4 величины $h_i^S(A)$ и $h_j^{\bar{S}}(A)$ можно заменить на соответствующие $r_i^S(A)$ и $r_j^{\bar{S}}(A)$. Тем самым, мы получаем несколько более простые аналоги теорем 3.2–3.4 для S-SDD матриц в терминах $r_i^S(A)$ и $r_j^{\bar{S}}(A)$. Однако, в силу (3.19), эти аналоги, вообще говоря, хуже, чем исходные оценки теорем 3.2–3.4.

Литература

1. В. В. Гудков, *Об одном признаке неособенности матриц.* — Латвийский математический ежегодник, Рига, 1966, с. 385–390.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
3. D. W. Bailey, D. E. Crabtree, *Bounds on determinants.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 303–309.
4. J. L. Brenner, *A bound for a determinant with dominant main diagonal.* — Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 631–634.
5. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
6. L. Cvetković, M. Nedović, *Special H-matrices and their Schur and diagonal-Schur complements.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 225–230.
7. H.-B. Li, T.-Z. Huang, H. Li, *Some new results on determinantal inequalities and applications.* — J. Ineq. Appl. (2010), article ID 847357, doi: 10.1155/2010/847357.
8. R. Oeder, *E 949.* — Amer. Math. Monthly **58** (1951), 36–37.
9. A. Ostrowski, *Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminants.* — Bull. Sci. Math. (2) **61** (1937), 19–32.
10. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
11. G. B. Price, *Bounds for determinants with dominant principal diagonal.* — Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 497–502.
12. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
13. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. Bounds for the determinants of Nekrasov and S-Nekrasov matrices.

Two-sided bounds on $|\det A|$ for Nekrasov and S-Nekrasov matrices A are obtained. It is shown that for Nekrasov matrices the new bounds improve the known bounds of Bailey and Crabtree. As to the S-Nekrasov matrices, introduced only recently, so far no bounds on their determinants have been suggested, as far as the author is aware.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург,
Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 15 сентября 2014 г.