Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Л. Ю. Колотилина

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НЕКРАСОВСКИХ И S-НЕКРАСОВСКИХ МАТРИЦ

§1. Введение

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется H-матрицей, если ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$, определяемая формулами

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

является невырожденной M-матрицей. Заметим, что так определенные H-матрицы являются невырожденными.

Как хорошо известно (см., например, [6, Theorem 7.5.14]), матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, является H-матрицей тогда и только тогда, когда существует диагональная матрица Δ порядка n такая, что матрица $A\Delta$ имеет строгое диагональное преобладание (по строкам), т.е. является SDD-матрицей (strictly diagonally dominant). Ясно, что если такая матрица Δ существует, то ее можно выбрать так, чтобы все диагональные элементы были положительными.

К сожалению, в общем случае такая масштабирующая матрица явно не известна; более того, мы ничего не знаем даже о ее структуре или каких-то специфических свойствах.

Однако для матриц из некоторых подклассов класса H-матриц такие масштабирующие матрицы можно определить аналитически. Это так, например, в случае так называемых S-SDD матриц. Напомним, что в соответствии с [9] (см. также определение 3.10 в книге [15]), для заданного непустого подмножества S индексного множества $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$, где $n \geqslant 2$, матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется матрицей с S-строгим диагональным преобладанием (S-SDD), если выполнены следующие условия:
(i) для всех $i \in S$ имеет место неравенство

$$|a_{ii}| > r_i^S(A);$$

Ключевые слова: матрицы Некрасова, S-некрасовские матрицы, матрицы со строгим диагональным преобладанием, S-SDD матрицы, масштабирующие матрицы.

(ii) для всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$ имеет место неравенство

$$\big[|a_{ii}| - r_i^S(A)\big]\ \Big[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\Big] > r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j^S(A).$$

Здесь и ниже для заданного подмножества $S \subseteq \langle n\rangle$ мы используем следующие обозначения:

$$\bar{S} = \langle n\rangle \setminus S;$$

$$r_i^S(A) = \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$r_i(A) = r_i^{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{j\in \langle n\rangle\\ j\neq i}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ясно, что для любого подмножества S множества $\langle n\rangle$ мы имеем

$$r_i(A) = r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь уместно отметить, что в действительности S-SDD матрицы (но без этого названия) впервые рассматривались в работе [11], где было доказано, что они являются H-матрицами. По-существу тот же класс матриц рассматривался и в работе [2] как особый подкласс матриц, удовлетворяющих условиям псевдоблочного диагонального преобладания типа Островского–Брауэра. Под названием PBDD(n_1, n_2) этот матричный класс также рассматривался в статье [3], где для PBDD матрицы A были установлены двусторонние оценки $|\det(A)|$ и верхняя оценка $\|A^{-1}\|_\infty$. Также в последней работе был введен более широкий класс матриц, названных PH- (partitioned H-) матрицами в работе [12], обобщающий класс PBDD(n_1, n_2) блочных 2×2 матриц на случай блочных $k\times k$ матриц, $k \geqslant 2$. Тот факт, что PH-матрицы являются H-матрицами, был установлен в работе [4].

Для данной работы существенным является тот факт, что, как было показано в работе [9] (см. также [15]), если A – S-SDD матрица, то существует такая диагональная матрица

$$W_\gamma^S = \mathrm{diag}\,(w_1, \ldots, w_n), \quad \text{где} \quad w_i = \begin{cases} \gamma > 0, & i \in S,\\ 1, & i \in \bar{S}, \end{cases}$$

что AW_γ^S – SDD-матрица. Обратное утверждение о том, что из $AW_\gamma^S \in$ SDD следует, что $A \in S$-SDD, было доказано в [7]. Это означает, что подкласс S-SDD матриц класса H-матриц можно охарактеризовать в терминах соответствующих диагональных матриц, диагональные элементы которых принимают лишь два различных значения. (Ясно, что матрица A является SDD тогда и только тогда, когда существует скалярная матрица $W = wI_n$, все диагональные элементы которой совпадают, такая, что AW – SDD матрица.)

В работе [5] эта характеризация в терминах диагональных матриц была обобщена на случай общих PH-матриц, $k \geqslant 2$. Отметим, однако, что в случае S-SDD матриц ($k = 2$) нам также известно, что в качестве γ можно взять любое значение из интервала

$$\left(\max_{i \in S} \frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)}, \quad \min_{j \in \bar{S}} \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)}{r_j^S(A)} \right)$$

(при $r_j^S(A) = 0$ полагаем, что соответствующая дробь равна ∞), тогда как в случае общих PH-матриц установлено только существование диагональных матриц с указанными свойствами. Задача определения соответствующих диагональных матриц для PH-матриц не только не решена, но пока даже не рассматривалась.

Указанную задачу можно обобщить следующим образом: описать подмножество D_n^K множества D_n диагональных матриц порядка n с положительными диагональными элементами такое, что матрица A принадлежит некоторому подклассу K класса H-матриц тогда и только тогда, когда существует матрица $\Delta \in D_n^K$, для которой $A\Delta$ является SDD матрицей.

Последнюю постановку задачи можно обобщить и далее, если рассмотреть матрицы некоторого специального вида (необязательно диагональные), которые преобразуют матрицы из некоторого подкласса $K_1 \subset H$ в матрицы из другого подкласса $K_2 \subset H$ при умножении справа или слева. Подобные результаты позволяют сводить решение некоторых задач для матриц из класса K_1 к аналогичным задачам для матриц из класса K_2.

В этой работе общая задача, сформулированная выше, решается в некоторых конкретных случаях, относящихся к некрасовским и S-некрасовским матрицам. А именно, в §2 дана характеризация некрасовских матриц в терминых диагональных матриц, преобразующих их в SDD матрицы. В §3 рассматривается более общий класс S-некрасовских матриц, содержащий как матрицы Некрасова, так и S-SDD матрицы. Мы напоминаем характеризацию S-некрасовских матриц в терминах диагональных матриц, переводящих их в матрицы

Некрасова [10]. Затем мы описываем S-некрасовские матрицы в терминах диагональных матриц, трансформирующих их в матрицы со строгим диагональным преобладание, а также в терминах нижних унитреугольных матриц, преобразующих соответствующие матрицы сравнения в S-SDD матрицы.

В работе используются следующие обозначения.

• Для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ через $|A|$ обозначается неотрицательная матрица $(|a_{ij}|)$.

• $A = D + L + U$ – это стандартное расщепление матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ на, соответственно, диагональную (D), строго нижнюю треугольную (L) и строго верхнюю треугольную (U) части.

• Неравенства со знаками $\leqslant$ и $\geqslant$ между вещественными матрицами понимаются как поэлементные.

• $e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор.

• I_n – единичная матрица порядка n.

§2. Характеризация матриц Некрасова

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется матрицей Некрасова (или, короче, N-матрицей), если

$$|a_{ii}| > h_i(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

где величины $h_i(A)$ определены с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$h_1(A) = r_1(A); \quad h_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \dots, n. \tag{2.2}$$

Невырожденность матриц Некрасова была установлена Гудковым [1]. Робер [14] доказал, что некрасовские матрицы образуют подкласс класса H-матриц и содержат класс матриц, обладающих строгим диагональным преобладанием.

Далее, класс матриц Некрасова будет обозначаться через N.

Поскольку, очевидно, $h_i(A) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, то из (2.1) следует, что все диагональные элементы матрицы Некрасова отличны от нуля.

Пусть $A = D + L + U$. Тогда, как хорошо известно и почти очевидно, вектор $h(A) = (h_i(A))$, определенный в (2.2), можно записать в матрично-векторном виде как

$$h(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e. \tag{2.3}$$

Таким образом, условия (2.1) равносильны векторному неравенству

$$(|D| - |L|)^{-1}|U|e < e, \tag{2.4}$$

которое есть условие того, что Z-матрица

$$(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = I_n - (|D| - |L|)^{-1}|U|, \tag{2.5}$$

получаемая из матрицы сравнения $\mathcal{M}(A)$ левым умножением на неотрицательную треугольную матрицу $(|D|-|L|)^{-1}$, обладает свойством строгого диагонального преобладания. Напомним, что характеризация некрасовских матриц в терминах соотношения (2.4) принадлежит Роберу [14].

Заметим, что если $A = D+L+U$ – матрица Некрасова, то, наряду с матрицей (2.5), матрица $(D+L)^{-1}A = I_n+(D+L)^{-1}U$ также является SDD-матрицей, поскольку, по теореме Островского [13], $|(D+L)^{-1}| \leqslant (|D| - |L|)^{-1}$, откуда, в силу (2.4), мы имеем $|(D + L)^{-1}U|e \leqslant (|D| - |L|)^{-1}|U|e < e$.

Уместно также отметить, что если A – матрица Некрасова, то для любой невырожденной диагональной матрицы Δ матрица ΔA так же является некрасовской, т.е. класс N замкнут относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы.

Нашим первым результатом является характеризация N-матриц в терминах (слабого) диагонального преобладания в некоторой близкой матрице.

Теорема 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и предположим, что*

$$a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Тогда A является матрицей Некрасова в том и только том случае, когда существует диагональная матрица $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с элементами

$$0 \leqslant \delta_i < 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.7}$$

такая, что матрица

$$B = (D + L)\Delta + U \tag{2.8}$$

имеет диагональное преобладание.

Доказательство. Предположим сперва, что $A \in \mathrm{N}$ и определим матрицу

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n), \quad \delta_i = \frac{h_i(A)}{|a_{ii}|}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Заметим, что, ввиду (2.1) и (2.2), неравенства (2.7) справедливы.

Очевидно, что
$$|D|\Delta e = h(A). \tag{2.10}$$
С другой стороны, соотношения (2.2) можно записать в виде
$$h(A) = (|L|\Delta + |U|)e. \tag{2.11}$$
Равенства (2.10) и (2.11) доказывают, что матрица B имеет (слабое) диагональное преобладание (точнее, $\mathcal{M}(B)e = 0$).

Обратно, предположим, что для некоторой диагональной матрицы Δ, удовлетворяющей условиям (2.7), матрица (2.8) имеет диагональное преобладание. Покажем, что в этих предположениях выполняется условие (2.4), т.е. A – матрица Некрасова.

Тот факт, что матрица B имеет диагональное преобладание, можно записать в виде
$$(|L|\Delta + |U|)e \leqslant |D|\Delta e,$$
или
$$(|D| - |L|)\Delta e \geqslant |U|e.$$
Поскольку $(|D| - |L|)^{-1}$ – неотрицательная матрица, из последнего неравенства следует, что
$$\Delta e \geqslant (|D| - |L|)^{-1}|U|e. \tag{2.12}$$
Но, в силу (2.7), $\Delta e < e$, а значит (2.4) немедленно следует из (2.12). Теорема доказана. $\square$

Следующая теорема характеризует N-матрицы в терминах масштабирующих диагональных матриц, которые преобразуют их в SDD матрицы.

Теорема 2.2. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, удовлетворяет условию (2.6) и пусть диагональная матрица Δ определена в соответствии с (2.9). Тогда A является N-матрицей в том и только том случае, когда существует невырожденная матрица $\Delta' = \operatorname{diag}(\delta_1', \ldots, \delta_n')$, где*
$$\delta_i \leqslant \delta_i' < 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.13}$$
такая, что матрица $A\Delta'$ имеет строгое диагональное преобладание.

Замечание 2.1. Поскольку любая матрица Некрасова, как и любая матрица, которую можно преобразовать в SDD матрицу посредством правого умножения на диагональную матрицу, является H-матрицей, то все ее диагональные элементы необходимо отличны от нуля. Поэтому условие (2.6) в формулировке теоремы 2.2, которое формально необходимо для того, чтобы обеспечить корректность определения матрицы Δ, на самом деле не является ограничительным.

Доказательство. Если $A\Delta'$ имеет строгое диагональное преобладание и выполнены условия (2.13), то $\delta_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, а значит $h_i(A) < |a_{ii}|$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, A является N-матрицей, и достаточность установлена.

Обратно, пусть $A \in \mathrm{N}$. Как следует из соотношений (2.10) и (2.11) в доказательстве теоремы 2.1, мы имеем

$$(|D| - |L|)\Delta e = |U|e. \tag{2.14}$$

Предположим сперва, что

$$\{|U|e\}_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{2.15}$$

В этом случае, в силу (2.2), имеем $\delta_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, и можно положить

$$\delta_i' = \delta_i, \quad i = 1, \ldots, n-1; \quad \delta_n' = \delta_n + \varepsilon, \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon < 1 - \delta_n. \tag{2.16}$$

Тогда для $i = 1, \ldots, n-1$ с помощью (2.16), (2.14) и (2.13) мы выводим

$$\{(|D| - |L|)\Delta' e\}_i = |a_{ii}|\delta_i' - \sum_{j<i} |a_{ij}|\delta_j'$$

$$= \{(|D| - |L|)\Delta e\}_i = \{|U|e\}_i > \{|U|\Delta' e\}_i.$$

Этим показано, что первые $n-1$ строк матрицы $A\Delta'$ имеют строгое диагональное преобладание.

Строгое диагональное преобладание в последней строке матрицы $A\Delta'$ устанавливается при помощи (2.16) и (2.14) следующим образом:

$$\begin{aligned}\{A\Delta'\}_{nn} - r_n(A\Delta') &= |a_{nn}|\delta_n' - \{|L|\Delta' e\}_n \\ &= |a_{nn}|\delta_n' - \{|L|\Delta e\}_n > |a_{nn}|\delta_n - \{|L|\Delta e\}_n \\ &= \{(|D| - |L|)\Delta e\}_n = \{|U|e\}_n = 0.\end{aligned}$$

Итак, в условиях (2.15), свойство строгого диагонального преобладания матрицы $A\Delta'$, где Δ' удовлетворяет неравенствам (2.13), установлено.

Теперь рассмотрим тот случай, в котором

$$\{|U|e\}_i = 0 \quad \text{для некоторых} \quad i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Пусть $\tilde{U} = U + \vartriangle U$, где $\{| \vartriangle U|e\}_i \neq 0$ для тех i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, для которых $\{|U|e\}_i = 0$. Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\| \vartriangle U\|_\infty < \frac{1 - \max_{i\in\langle n\rangle} \delta_i}{\|(|D| - |L|)^{-1}\|_\infty}. \tag{2.17}$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} &|D|(|D| - |L|)^{-1}| \vartriangle U|e \leqslant \| \vartriangle U\|_\infty |D|(|D| - |L|)^{-1}e \\ &< \frac{\min_i\{1-\delta_i\}}{\|(|D| - |L|)^{-1}\|_\infty}\|(|D| - |L|)^{-1}\|_\infty |D|e \\ &= \min_i\{1-\delta_i\}|D|e \leqslant (I_n - \Delta)|D|e = |D|e - h(A). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h(\tilde{A}) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|\tilde{U}|e &\leqslant |D|(|D| - |L|)^{-1}(|U| + | \vartriangle U|)e \\ &< h(A) + (|D|e - h(A)) = |D|e, \end{aligned}$$

так что $\tilde{A}$ – матрица Некрасова.

Поскольку $\{|\tilde{U}|e\}_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, то мы заключаем, что, ввиду первой части доказательства, существует матрица Δ', удовлетворяющая условиям (2.13), такая, что $\tilde{A}\Delta'$ является SDD матрицей. Но тогда тем более и $A\Delta'$ является SDD матрицей. Теорема доказана. □

Замечание 2.2. Как следует из представленного доказательства, если $A \in \mathrm{N}$ и $\{|U|\}_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, то в качестве масштабирующей можно взять любую матрицу вида

$$\Delta' = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, \delta_n + \varepsilon), \quad \text{где} \quad \varepsilon \in (0, 1 - \delta_n). \tag{2.18}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы имеем не только теорему существования, но и соответствующие диагональные матрицы Δ' в явном виде (2.18).

§3. Характеризация S-некрасовских матриц

S-некрасовские (или, короче, SN-) матрицы были введены в работе [8], в которой было доказано, что они образуют подкласс класса H-матриц. Понятие SN-матриц, как нетрудно понять, одновременно обобщает понятия некрасовских и S-SDD матриц.

Напомним, что для заданного подмножества S индексного множества $\langle n\rangle$, где $n \geqslant 2$, матрица $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется SN-матрицей, если выполнены следующие условия:

(i) для всех $i \in S$ имеет место неравенство

$$|a_{ii}| > h_i^S(A); \tag{3.1}$$

(ii) для всех $i \in S$ и $j \notin S$ справедливо неравенство

$$\left[|a_{ii}| - h_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - h_j^{\bar{S}}(A)\right] > h_i^{\bar{S}}(A)\, h_j^S(A). \tag{3.2}$$

Здесь и ниже, вектор $h^S(A) = (h_i^S(A))$ определяется рекуррентными соотношениями

$$\begin{gathered} h_1^S(A) = r_1^S(A) = \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq 1}} |a_{1j}|; \\ h_i^S(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j^S(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{\substack{j \in S \\ j=i+1}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \ldots, n, \end{gathered} \tag{3.3}$$

которые при $S = \langle n \rangle$ сводятся к соотношениям (2.2).

Обозначим

$$e^S = (e_i^S), \quad e_i^S = \begin{cases} 1, & i \in S, \\ 0, & i \in \bar{S}. \end{cases}$$

Тогда, как нетрудно понять, соотношения (3.3) могут быть записаны в следующем матрично-векторном виде:

$$h^S(A) = |L||D|^{-1} h^S(A) + |U| e^S.$$

Отсюда следует, что

$$h^S(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1} |U| e^S. \tag{3.4}$$

Из равенств (3.4) и (2.3), последнее из которых – это в точности (3.4) при $S = \langle n \rangle$, мы немедленно получаем, что

$$h^S(A) + h^{\bar{S}}(A) = h(A). \tag{3.5}$$

Следующая характеризация SN-матриц в терминах диагональных матриц, связывающих между собой классы SN и N, была получена в работе [8] и сформулирована в явном виде в [10].

Теорема 3.1. *Для заданного непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n \rangle$, где $n \geqslant 2$, матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ является*

SN-матрицей в том и только том случае, когда существует матрица $W_\gamma^S = \mathrm{diag}\,(w_1, \ldots, w_n)$, где

$$w_i = \begin{cases} \gamma, & i \in S, \\ 1, & i \in \bar{S}, \end{cases} \qquad \gamma > 0, \tag{3.6}$$

такая, что AW_γ^S – матрица Некрасова.

Следующий результат показывает, что SN-матрицы связаны с S-SDD матрицами в точности тем же способом, как матрицы Некрасова связаны с SDD матрицами, и позволяет сводить решение задач для SN-матриц к соответствующим задачам для S-SDD матриц.

Теорема 3.2. *Для заданного непустого собственного подмножества S индексного множества $\langle n \rangle$, где $n \geqslant 2$, матрица $A = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является* SN-матрицей в том и только том случае, когда $C = C(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)$ является S-SDD матрицей.

Доказательство. В силу соотношения (3.4) и равенства $C = (c_{ij}) = |D| - |D(|D| - |L|)^{-1}|U|$, мы имеем

$$h_i^S(A) = |a_{ii}| - \{Ce^S\}_i, \quad i \in S,$$

так что

$$|a_{ii}| - h_i^S(A) = \{Ce^S\}_i = |c_{ii}| - r_i^S(C), \quad i \in S, \tag{3.7}$$

и

$$h_j^S(A) = -\{Ce^S\}_j = r_j^S(C), \quad j \in \bar{S}. \tag{3.8}$$

Ввиду (3.7) и (3.8), условия (3.1) и (3.2), означающие что $A \in S$N, эквивалентны условиям

$$|c_{ii}| > r_i^S(C), \quad i \in S,$$

$$\left[|c_{ii}| - r_i^S(C)\right] \left[|c_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(C)\right] > r_i^{\bar{S}}(C)\, r_j^S(C), \quad i \in S,\ j \in \bar{S},$$

означающим, что $C \in S$-SDD. □

Поскольку матрица C, фигурирующая в формулировке теоремы 3.2, одна и та же для всех матриц $\tilde{A}$, эквимодулярных A ($|\tilde{A}| = |A|$), то из теоремы 3.2 вытекает следующий результат (который также следует и из теоремы 3.1).

Следствие 3.1. *Для заданного непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n \rangle$, где $n \geqslant 2$, матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является SN-матрицей тогда и только тогда, когда любая матрица $\tilde{A}$, эквимодулярная A, является SN-матрицей.*

Заметим, что если $A = D + L + U \in S\mathrm{N}$, то, наряду с $C = |D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)$, матрица $B = D(D+L)^{-1}A = D(I_n + (D+L)^{-1}U)$ также является S-SDD матрицей. Действительно, по теореме Островского [13],

$$|(D+L)^{-1}| \leqslant (|D| - |L|)^{-1},$$

откуда следует, что

$$\mathcal{M}(B) \geqslant |D| - |D||(D+L)^{-1}||U| \geqslant |D| - |D|(|D| - |L|)^{-1}|U| = C.$$

Следовательно, для произвольного множества $S \subseteq \langle n \rangle$, мы имеем

$$\{\mathcal{M}(B)e^S\}_i = |b_{ii}| - r_i^S(B) \geqslant \{Ce^S\}_i = |c_{ii}| - r_i^S(C), \quad i \in S,$$

и

$$\{\mathcal{M}(B)e^S\}_j = -r_j^S(B) \geqslant \{Ce^S\}_j = -r_j^S(C), \quad j \in \bar{S},$$

или, что равносильно,

$$r_j^S(B) \leqslant r_j^S(C), \quad j \in \bar{S}.$$

Полученные неравенства доказывают, что $B \in S$-SDD, если $C \in S$-SDD, а последнее условие справедливо для матриц $A \in S\mathrm{N}$.

Приведенные рассуждения вместе со следствием 3.1 и тем фактом, что A эквимодулярна своей матрице сравнения $\mathcal{M}(A)$, приводят нас к следующему результату.

Следствие 3.2. *Для заданного непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n \rangle$, где $n \geqslant 2$, матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является SN-матрицей тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\tilde{A} = \tilde{D} + \tilde{L} + \tilde{U}$, эквимодулярной A, матрица $\tilde{D}(\tilde{D} + \tilde{L})^{-1}\tilde{A} = \tilde{D}(I_n + (\tilde{D} + \tilde{L})^{-1}\tilde{U})$ является S-SDD-матрицей.*

Новая характеризация SN-матриц в терминах диагональных матриц, переводящих их в матрицы со строгим диагональным преобладанием, представлена в следующей теореме, обобщающей теорему 2.2.

Теорема 3.3. *Для заданного непустого собственного подмножества S множества индексов $\langle n \rangle$, где $n \geqslant 2$, матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является SN-матрицей тогда и только тогда, когда существует матрица $V^S = \operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_n)$, удовлетворяющая условиям*

$$\frac{\gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}|} \leqslant v_i < \begin{cases} \gamma, & i \in S, \\ 1, & i \in \bar{S}, \end{cases} \qquad \gamma > 0, \tag{3.9}$$

такая, что AV^S – SDD матрица.

Доказательство. Пусть сперва $A \in S$N. Тогда, в соответствии с теоремой 3.1, найдется диагональная матрица $W_\gamma^S = \operatorname{diag}(w_1, \ldots, w_n)$, удовлетворяющая условиям (3.6), такая, что $B = AW_\gamma^S$ – матрица Некрасова. Как было установлено в работе [8, см. (4)], имеют место равенства

$$h_i(B) = \gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.10}$$

По теореме 2.2, для N-матрицы B существует матрица

$$\Delta' = \operatorname{diag}(\delta'_1, \ldots, \delta'_n)$$

такая, что $B\Delta' = AW_\gamma^S \Delta'$ – SDD матрица, причем элементы δ'_i удовлетворяют условиям

$$\delta_i(B) \leqslant \delta'_i < 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.11}$$

где, в силу (3.10),

$$\delta_i(B) = \frac{h_i(B)}{|b_{ii}|} = \begin{cases} \frac{\gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}|\gamma}, & i \in S, \\ \\ \frac{\gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}|}, & i \in \bar{S}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Положим $V^S = W_\gamma^S \Delta'$. Тогда, по (3.6), (3.11) и (3.12), мы имеем

$$\gamma = w_i > w_i\delta'_i = v_i \geqslant w_i\delta_i(B) = \gamma\delta_i(B) = \frac{\gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}|}, \quad i \in S,$$

и

$$1 = w_i > w_i\delta'_i = v_i \geqslant w_i\delta_i(B) = 1 \cdot \delta_i(B) = \frac{\gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}|}, \quad i \in \bar{S}.$$

Тем самым необходимость установлена.

Обратно, пусть AV^S является SDD матрицей, где матрица

$$V^S = \operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_n)$$

удовлетворяет условиям (3.9), и пусть $W_\gamma^S = \operatorname{diag}(w_1, \ldots, w_n)$ определена, как в (3.6). Покажем, что $AW_\gamma^S \in$ N. Для этого определим диагональную матрицу Δ' с помощью соотношения

$$V^S = W_\gamma^S \Delta'$$

Ввиду (3.10), для матрицы AW_γ^S мы имеем

$$h_i(AW_\gamma^S) = \gamma h_i^S(A) + h_i^{\bar{S}}(A), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Теперь с помощью (3.13) и (3.9) мы выводим

$$h_i(AW_\gamma^S) \leqslant |a_{ii}|v_i < \begin{cases} \gamma|a_{ii}|, & i \in S, \\ |a_{ii}|, & i \in \bar{S}. \end{cases}$$

Полученные соотношения означают, что

$$h_i(AW_\gamma^S) < |(AW_\gamma^S)_{ii}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

так что AW_γ^S является матрицей Некрасова.

Теперь для завершения доказательства остается лишь заметить, что поскольку AW_γ^S – матрица Некрасова, то A является S-некрасовской матрицей в силу теоремы 3.1. Теорема 3.3 доказана. □

Литература

1. В. В. Гудков, *Об одном признаке неособенности матриц.* — Латвийский математический ежегодник. Рига, 1966, с. 385–390.
2. Л. Ю. Колотилина, *Псевдоблочные условия диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 94–131.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
4. Л. Ю. Колотилина, *Об улучшении оценок Чистякова для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 103–118.
5. Л. Ю. Колотилина, *Характеризация PM- и PH-матриц в терминах диагонального преобладания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 110–120.
6. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, 1979.
7. L. Cvetković, V. Kostić, M. Kovačević, T. Szulc, *Further results on H-matrices and their Schur complements.* — Appl. Math. Comput. **198** (2008), 506–510.
8. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
9. L. Cvetković, V. Kostić, R. S. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion set.* —- ETNA **18** (2004), 73–80.
10. L. Cvetković, M. Nedović, *Special H-matrices and their Schur and diagonal-Schur complements.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 225–230.
11. Y. M. Gao, X. H. Wang, *Criteria for generalized diagonally dominant and M-matrices.* — Linear Algebra Appl. **169** (1992), 257–268.
12. L. Yu. Kolotilina, *Bounds for the infinity norm of the inverse for certain M- and H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 692–702.
13. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
14. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
15. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. Some characterizations of Nekrasov and S-Nekrasov matrices.

It is known that the Nekrasov and S-Nekrasov matrices form subclasses of (nonsingular) H-matrices. The paper presents some necessary and sufficient conditions for a square matrix with complex entries to be a Nekrasov and an S-Nekrasov matrix. In particular, characterizations of the Nekrasov and S-Nekrasov matrices in terms of the diagonal column scaling matrices transforming them into strictly diagonally dominant matrices are obtained.

С.Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург,
Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 7 октября 2014 г.