Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Х. Д. Икрамов, А. К. Абдикалыков, В. Н. Чугунов

УНИТАРНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВА $(T+H)$-МАТРИЦ ПОРЯДКА 3

§1. Введение

Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – линейное пространство комплексных $n \times n$-матриц. Обозначим символами $\mathcal{T}_n, \mathcal{H}_n$ и $\mathcal{T}H_n$ подпространства этого пространства, образованные соответственно теплицевыми, ганкелевыми и $(T+H)$-матрицами. Эти последние называются в англоязычной литературе Toeplitz-plus-Hankel matrices и действительно определяются как матрицы, представимые в виде суммы теплицева и ганкелева слагаемых.

Нас интересуют следующие вопросы:

(а) Каковы унитарные $n \times n$-матрицы, которые отображают подпространство $\mathcal{T}_n$ в себя, выступая в качестве трансформирующих матриц подобия? Если матрица U обладает этим свойством, то мы пишем $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$. Таким образом, включение $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ означает импликацию

$$\forall A \in \mathcal{T}_n \longrightarrow B = U^*AU \in \mathcal{T}_n. \tag{1}$$

(б) Тот же вопрос (а) по отношению к подпространству $\mathcal{H}_n$ вместо $\mathcal{T}_n$. Соответствующее множество унитарных матриц будем обозначать через $\mathrm{UAut}(\mathcal{H}_n)$.

(в) Тот же вопрос (а) с заменой $\mathcal{T}_n$ на $\mathcal{T}H_n$ и множества $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ на $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}H_n)$.

Ответы на вопросы (а) и (б) были даны соответственно в [1] и [2]. Они содержатся в формулируемых ниже теоремах 1 и 2. Для этих формулировок нам придется ввести некоторые обозначения.

Символом $\mathbf{U}_n$ мы обозначаем унитарную группу порядка n, т.е. группу всех унитарных $n \times n$-матриц. Символы $\mathcal{D}_n^{\varepsilon}$ и $\mathcal{P}_n$ используются соответственно для диагональной матрицы

$$\mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1})$$

Ключевые слова: теплицева матрица, ганкелева матрица, $(T+H)$-матрица, унитарная матрица, правило ромба.

и так называемой перъединичной матрицы

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

В частном случае $\varepsilon = -1$ мы пишем $\mathcal{D}_n$ вместо $\mathcal{D}_n^{-1}$; таким образом,

$$\mathcal{D}_n = \operatorname{diag}(1, -1, 1, -1, \dots).$$

Теорема 1. *Если $n \geqslant 3$, то $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ есть прямое произведение группы $\mathbf{U}_1$ и группы, порожденной перъединичной матрицей $\mathcal{P}_n$ и матрицами $\mathcal{D}_n^{\varepsilon}$, соответствующими всем числам ε с модулем 1.*

Теорема 2. *Если $n \geqslant 3$, то $\mathrm{UAut}(\mathcal{H}_n)$ есть прямое произведение группы $\mathbf{U}_1$ и дискретной группы, порожденной матрицами $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{D}_n$.*

Задача о характеризации матриц $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ оказалась гораздо более трудной, чем аналогичные задачи для $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ и $\mathrm{UAut}(\mathcal{H}_n)$. Наша цель в этой статье – дать полное описание матриц из множества $\mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ для $n = 3$. Это описание дается следующим предложением.

Теорема 3. *Если $n = 3$, то $\mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ есть прямое произведение группы $\mathbf{U}_1$ и группы, порожденной матрицами $\mathcal{D}_3$ и $\mathcal{P}_3$, а также всеми матрицами вида*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \varepsilon & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\xi} \mp \varepsilon), \quad \beta = -\frac{1}{2}(e^{i\xi} \pm \varepsilon), \quad \gamma = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{2}},$$

$\varepsilon \in [0, 1]$ и $\xi \in (-\pi, \pi]$.

§2. Вспомогательные факты

Начнем с очевидного замечания.

Лемма 1. *Если $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ и в то же время $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{H}_n)$, то $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$.*

Следующее предложение немедленно вытекает из этой леммы.

Следствие 1. *Группа* $\mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_3)$ *содержит матрицы* $\mathcal{D}_3$ *и* $\mathcal{P}_3$.

Из импликации (1) мы выводим:

$$\forall A \in \mathcal{T}_n \longrightarrow U^t A\bar{U} \in \mathcal{T}_n. \tag{3}$$

Таким образом, вместе с каждой матрицей U множество $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}_n)$ содержит матрицу $\bar{U}$. Это же верно в отношении множеств $\mathrm{UAut}(\mathcal{H}_n)$ и $\mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$. Будучи группой, множество $\mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$ включает в себя и матрицу $U^{-1} = U^*$. Поскольку

$$U^t = \overline{U^*},$$

мы приходим к следующему выводу.

Лемма 2. *Если* $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$, *то и* $U^t \in \mathrm{UAut}(\mathcal{TH}_n)$.

Главным орудием в нашем доказательстве теоремы является соотношение, которое мы называем *правилом ромба.* Пусть A – $n \times n$-матрица и

$$1 < i, \ j < n.$$

Будем говорить, что A подчиняется правилу ромба относительно позиции (i, j), если

$$a_{i-1,j} + a_{i+1,j} = a_{i,j-1} + a_{i,j+1}. \tag{4}$$

В [3] получена следующая характеризация $(T + H)$-матриц.

Теорема 4. *Матрица* $A \in M_n(\mathbf{C})$ *тогда и только тогда является* $(T+H)$*-матрицей, когда* A *подчиняется правилу ромба относительно всякой позиции* (i, j), *для которой* $1 < i, \ j < n$.

Для $n = 3$ эта характеризация сводится к единственному условию

$$a_{12} + a_{32} = a_{21} + a_{23}. \tag{5}$$

§3. Основные соотношения

Символом E_{ij}, где $1 \leqslant i, \ j \leqslant 3$, мы обозначаем соответствующую матричную единицу, т.е. 3×3-матрицу, единственный ненулевой элемент которой стоит в позиции (i, j) и равен единице. Элементарными теплицевыми матрицами будем называть матрицы

$$T_0 = I_3, \ T_1 = E_{12} + E_{23}, \ T_{-1} = E_{21} + E_{32}, \ T_2 = E_{13}, \ T_{-2} = E_{31}.$$

Аналогично, элементарными ганкелевыми матрицами мы называем матрицы

$$H_0 = \mathcal{P}_3,\ H_1 = E_{12} + E_{21},\ H_{-1} = E_{23} + E_{32},\ H_2 = E_{11},\ H_{-2} = E_{33}.$$

В качестве необходимых и достаточных условий принадлежности матрицы U множеству $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}H_3)$ мы принимаем следующие требования: *для всякой элементарной теплицевой или ганкелевой матрицы A трансформированная матрица U^*AU должна быть $(T+H)$-матрицей.*

Пусть

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}.$$

Применяя указанные выше условия и используя правило ромба (5), приходим к следующим соотношениям:

(а) H_2 :

$$u_{12}(\overline{u_{11} + u_{13}}) = \overline{u}_{12}(u_{11} + u_{13}).$$

Заметим, что отсюда вытекает включение

$$\overline{u}_{12}(u_{11} + u_{13}) \in \mathbf{R}.$$

(б) H_{-2} :

$$u_{32}(\overline{u_{31} + u_{33}}) = \overline{u}_{32}(u_{31} + u_{33}).$$

Как следствие, получаем

$$\overline{u}_{32}(u_{31} + u_{33}) \in \mathbf{R}.$$

(в) T_2 или T_{-2}:

$$\overline{u}_{12}(u_{31} + u_{33}) = u_{32}(\overline{u_{11} + u_{13}}).$$

(г) T_1 или T_{-1}:

$$u_{22}(\overline{u_{11} + u_{13}}) + u_{32}(\overline{u_{21} + u_{23}}) = \overline{u}_{22}(u_{31} + u_{33}) + \overline{u}_{12}(u_{21} + u_{23}).$$

(д) H_1 :

$$u_{12}(\overline{u_{21} + u_{23}}) + u_{22}(\overline{u_{11} + u_{13}}) = \overline{u}_{12}(u_{21} + u_{23}) + \overline{u}_{22}(u_{11} + u_{13}).$$

(е) H_{-1} :

$$u_{32}(\overline{u_{21} + u_{23}}) + u_{22}(\overline{u_{31} + u_{33}}) = \overline{u}_{32}(u_{21} + u_{23}) + \overline{u}_{22}(u_{31} + u_{33}).$$

(ж) H_0 :

$$u_{12}(\overline{u_{31}+u_{33}})+u_{22}(\overline{u_{21}+u_{23}})+u_{32}(\overline{u_{11}+u_{13}})$$
$$=\overline{u}_{12}(u_{31}+u_{33})+\overline{u}_{22}(u_{21}+u_{23})+\overline{u}_{32}(u_{11}+u_{13}).$$

§4. Основной случай

Пусть A – $n\times n$-матрица. Назовем *границей* A совокупность элементов этой матрицы, стоящих в ее первой и последней строке и первом и последнем столбце.

В этом разделе мы опишем матрицы $U\in\mathrm{UAut}(\mathcal{T}H_3)$, не имеющие нулей на своей границе. Иными словами, единственный элемент такой матрицы, могущий быть нулем, – это элемент u_{22}. Большинство матриц из $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}H_3)$ удовлетворяют этому требованию; по этой причине мы называем данный случай основным.

Положим

$$\phi=\arg u_{12},\qquad \psi=\arg u_{32}.$$

Теперь из соотношений (а), (б) и (в) выводим:

$$\arg(u_{11}+u_{13})=\phi \pmod{\pi},$$
$$\arg(u_{31}+u_{33})=\psi \pmod{\pi}$$

и

$$\frac{\overline{u_{11}+u_{13}}}{\overline{u}_{12}}=\frac{u_{11}+u_{13}}{u_{12}}=\frac{u_{31}+u_{33}}{u_{32}}. \tag{6}$$

Обозначим через κ общее значение всех дробей в (6). Тогда $\kappa\in\mathbf{R}$ и

$$u_{11}+u_{13}=\kappa u_{12}, \tag{7}$$

$$u_{31}+u_{33}=\kappa u_{32}. \tag{8}$$

Теперь мы умножим равенство (8) на u_{12} и вычтем полученное соотношение из равенства (7), умноженного на u_{32}, что дает

$$u_{32}u_{11}-u_{31}u_{12}+u_{32}u_{13}-u_{33}u_{12}=0. \tag{9}$$

Заметим, что выражение $u_{31}u_{12}-u_{32}u_{11}$ есть не что иное, как алгебраическое дополнение элемента u_{23}. Точно так же $u_{32}u_{13}-u_{33}u_{12}$ есть алгебраическое дополнение элемента u_{21}. Таким образом, элементы обратной матрицы U^{-1} в позициях (3,2) и (1,2) совпадают. Поскольку матрица U унитарна, окончательный вывод из равенства (9) состоит в том, что

$$u_{23}=u_{21}. \tag{10}$$

Равенства, аналогичные (7), (8) и (10), должны выполняться для всех матриц из множества $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}H_3)$. В частности, они верны для матрицы U^t, что дает

$$u_{11} + u_{31} = \tau u_{21}, \tag{11}$$

$$u_{13} + u_{33} = \tau u_{23}, \tag{12}$$

$$u_{32} = u_{12}. \tag{13}$$

Здесь $\tau \in \mathbf{R}$.

Из (7), (8) и (13) заключаем, что

$$u_{11} + u_{13} = u_{31} + u_{33}. \tag{14}$$

Аналогично из (11), (12) и (10) находим

$$u_{11} + u_{31} = u_{13} + u_{33}. \tag{15}$$

Вычитая (15) из (14), получаем

$$u_{31} = u_{13}. \tag{16}$$

Как следствие, имеем

$$u_{33} = u_{11}. \tag{17}$$

Удобно ввести обозначения

$$u_{11} = \alpha, \quad u_{13} = \beta, \quad u_{12} = \gamma, \quad u_{21} = \delta, \quad u_{22} = \varepsilon.$$

Тогда матрица U примет вид

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \delta & \varepsilon & \delta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Строки U подчинены условиям ортонормальности:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1, \tag{19}$$

$$2|\delta|^2 + |\varepsilon|^2 = 1, \tag{20}$$

$$(\alpha + \beta)\overline{\delta} + \gamma\overline{\varepsilon} = 0 \tag{21}$$

и

$$\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + |\gamma|^2 = 0. \tag{22}$$

Из равенств (19) и (22) вытекает интересное следствие:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\alpha\overline{\beta}) = 1,$$

т.е.

$$|\alpha - \beta|^2 = 1. \tag{23}$$

Заменим $\alpha + \beta$ в (21) на $\kappa\gamma$ (см. (7)). Учитывая, что $\kappa \in \mathbf{R}$, имеем

$$\arg\, \varepsilon = \arg\, \delta \,(\mathrm{mod}\ \pi). \tag{24}$$

С другой стороны, в силу (11),

$$\alpha + \beta = \tau\delta,$$

где $\tau \in \mathbf{R}$. Как следствие,

$$\arg\, (\alpha + \beta) = \arg\, \gamma = \arg\, \delta \,(\mathrm{mod}\ \pi). \tag{25}$$

Помимо (20), у нас есть еще условие нормированности для второго столбца:

$$2|\gamma|^2 + |\varepsilon|^2 = 1.$$

Объединяя это условие с (25), находим

$$\delta = \pm\gamma. \tag{26}$$

Соотношение (г) принимает вид

$$\varepsilon(\overline{\alpha + \beta}) + \gamma \cdot 2\overline{\delta} = \overline{\varepsilon}(\alpha + \beta) + \overline{\gamma} \cdot 2\delta. \tag{27}$$

Согласно (26),

$$2\gamma\overline{\delta} = \pm 2|\gamma|^2 = 2\overline{\gamma}\delta.$$

Кроме того,

$$\arg\, \varepsilon = \arg\, \gamma = \arg\, (\alpha + \beta) \,(\mathrm{mod}\ \pi).$$

Отсюда выводим, что

$$\overline{\varepsilon}(\alpha + \beta) \in \mathbf{R}.$$

Таким образом, условие (27) не дает никакой новой информации. Это же верно для соотношений (д), (е) и (ж).

Теперь мы можем описать все матрицы $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}H_3)$, имеющие ненулевую границу. Начнем со специального случая $\varepsilon = 0$. Тогда

$$|\gamma| = |\delta| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Умножая U на $e^{-i\phi}$, где $\phi = \arg\, \gamma$, можем считать, что

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\delta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку $\varepsilon = 0$, соотношение (21) превращается в равенство

$$\beta = -\alpha.$$

Из (19) находим

$$|\alpha| = \frac{1}{2}.$$

Итак, в рассматриваемом специальном случае матрица U имеет одну из двух возможных форм:

$$U = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{i\xi} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}e^{i\xi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}e^{i\xi} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}e^{i\xi} \end{pmatrix} \tag{28}$$

или же

$$U = \mathcal{D}_3 \cdot \text{матрица (28)}. \tag{29}$$

Параметры ϕ и ξ могут принимать произвольные значения в интервале $(-\pi, \pi]$.

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. Без ограничения общности можем считать, что $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу (24) и (25), числа γ и δ также вещественны. Так как $\delta \neq 0$, равенства (21) и (26) определяют сумму $\alpha + \beta$:

$$\alpha + \beta = -\frac{\gamma}{\delta}\varepsilon = \mp\varepsilon. \tag{30}$$

Вспомним, что

$$|\alpha - \beta| = 1,$$

т.е.

$$\alpha - \beta = e^{i\xi}, \quad \xi \in (-\pi, \pi]. \tag{31}$$

Из (30) и (31) заключаем, что

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(e^{i\xi} \mp \varepsilon), \quad \beta = -\tfrac{1}{2}(e^{i\xi} \pm \varepsilon). \tag{32}$$

Покажем, что условие (22) выполнено, если α и β выбраны по формулам (32):

$$\alpha\overline{\beta} = -\frac{1}{4}(e^{i\xi} \mp \varepsilon)(e^{-i\xi} \pm \varepsilon) - \frac{1}{4}(1 - \varepsilon^2 \mp \varepsilon e^{-i\xi} \pm \varepsilon e^{i\xi}).$$

Так как

$$\varepsilon(e^{i\xi} - e^{-i\xi}) = 2i\varepsilon \sin\xi \in i\mathbf{R},$$

то

$$2\mathrm{Re}\ (\alpha\overline{\beta}) = -\frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2) - \frac{1}{2}\left[1 - (1 - 2\gamma^2)\right] = -\gamma^2,$$

а это и есть равенство (22).

Таким образом, в случае $\varepsilon \neq 0$ существуют четыре двухпараметрические семейства решений, которые можно описать следующим образом: выберем значение параметра ε в интервале (0, 1) и положим

$$\gamma = \delta = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{2}}.$$

Затем выберем произвольное ξ в интервале $(-\pi, \pi]$ и определим α и β формулами (32). В результате получим семейство матриц вида

$$U = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \varepsilon & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Остальные три семейства соответствуют произведениям

$$\mathcal{D}_3 U, \qquad U\mathcal{D}_3 \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_3 U \mathcal{D}_3,$$

где U – матрица вида (33).

§5. Нули на границе матрицы U

Рассмотрим вначале случай $u_{12} = 0$ (случаи $u_{32} = 0$, $u_{21} = 0$ и $u_{23} = 0$ анализируются таким же образом). Соотношения (а), (в)–(д) и (ж) принимают вид:

$$u_{32}(\overline{u_{11} + u_{13}}) = 0, \tag{34}$$

$$u_{22}(\overline{u_{11} + u_{13}}) + u_{32}(\overline{u_{21} + u_{23}}) = \overline{u}_{22}(u_{31} + u_{33}), \tag{35}$$

$$u_{22}(\overline{u_{11} + u_{13}}) = \overline{u}_{22}(u_{11} + u_{13}), \tag{36}$$

$$u_{22}(\overline{u_{21} + u_{23}}) + u_{32}(\overline{u_{11} + u_{13}}) = \overline{u}_{22}(u_{21} + u_{23}) + \overline{u}_{32}(u_{11} + u_{13}). \tag{37}$$

Соотношения (б) и (е) остаются пока неизменными.

В силу (34), имеем $u_{32} = 0$ либо $u_{11} + u_{13} = 0$. Покажем, что вариант, в котором $u_{32} \neq 0$ и $u_{11} + u_{13} = 0$, невозможен. В самом деле, предположим, что

$$u_{11} = -u_{13}.$$

Из ортогональности первой строки двум другим строкам выводим равенства

$$u_{21} = u_{23}, \quad u_{31} = u_{33}. \tag{38}$$

В результате соотношения (35) и (37) упрощаются к виду

$$u_{32}\overline{u}_{21} = \overline{u}_{22}u_{31}, \tag{39}$$

$$u_{22}\overline{u}_{21} = \overline{u}_{22}u_{21}. \tag{40}$$

Соотношение (e) является следствием этих равенств.

Если предположить, что $u_{21} = 0$, то $u_{23} = 0$ и

$$|u_{22}| = 1,$$

откуда, вопреки исходной посылке, следует, что $u_{32} = 0$.

Если $u_{31} = 0$, то $u_{21} = 0$ в силу (39). Однако в предыдущем абзаце эта возможность уже была исследована и отвергнута.

Если $u_{22} = 0$, то из ортогональности второй и третьей строк выводим

$$u_{21}\overline{u}_{31} = 0,$$

что снова приводит к уже отвергнутым случаям.

Итак, все элементы второй и третьей строк матрицы U должны быть ненулевыми. Положив $\phi = \arg u_{21}$, видим из (40), что

$$\arg u_{22} = \phi \,(\mathrm{mod}\ \pi).$$

Умножив (39) на $e^{i2\phi}$, получим

$$u_{21}u_{32} = u_{22}u_{31},$$

что означает: алгебраическое дополнение элемента u_{13} равно нулю. Отсюда следует равенство $u_{13} = 0$. Но в этом случае вся первая строка в U состоит из нулей.

Таким образом, нужно рассматривать лишь вариант, в котором

$$u_{12} = 0, \quad u_{32} = 0.$$

В этом случае

$$|u_{22}| = 1$$

и, следовательно,

$$u_{21} = u_{23} = 0.$$

Умножив U на $e^{-i \arg u_{22}}$, можем считать, что

$$u_{22} = 1.$$

Теперь из (36) видим, что

$$u_{11} + u_{13} \in \mathbf{R},$$

а из (35) вытекает равенство

$$u_{31} + u_{33} = u_{11} + u_{13}. \tag{41}$$

Обе суммы в этом равенстве отличны от нуля, так как в противном случае матрица U была бы вырождена.

Выясним, как устроена подматрица

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{31} & u_{33} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Положив $\xi = \arg u_{11}$ и умножив эту подматрицу на $e^{-\xi}$, можем считать, что $u_{11} \in \mathbf{R}$. Ортогональность строк матрицы (42) дает соотношение

$$u_{31}u_{11} + u_{33}\overline{u}_{13} = 0.$$

Поскольку обе строки имеют одинаковую длину, вектор

$$\begin{pmatrix} u_{31} & u_{33} \end{pmatrix}$$

может отличаться от

$$\begin{pmatrix} -\overline{u}_{13} & u_{11} \end{pmatrix}$$

лишь скалярным множителем вида $e^{i\sigma}$. В силу (41), имеем

$$u_{11} + u_{13} = e^{i\sigma}(-\overline{u}_{13} + u_{11}). \tag{43}$$

Приравнивая квадраты модулей обеих частей, получаем

$$2u_{11}\mathrm{Re}\, u_{13} = -2u_{11}\mathrm{Re}\, u_{13}. \tag{44}$$

Если $u_{11} = 0$, то $u_{33} = 0$, $u_{13} \in \mathbf{R}$ и $u_{31} = u_{13}$ (см. (41)). Кроме того, из (35) следует, что

$$u_{22}\overline{u}_{13} \in \mathbf{R}.$$

Получается, что с точностью до скалярного множителя вида $e^{-i\xi}$ матрица U должна совпадать с $\mathcal{P}_3$ либо $\mathcal{P}_3\mathcal{D}_3$.

Предположим теперь, что в (44) $u_{11} \neq 0$. Тогда $u_{13} \in i\mathbf{R}$, и равенство (43) принимает вид

$$u_{11} + u_{13} = e^{i\sigma}(u_{11} + u_{13}).$$

Поскольку $u_{11} + u_{13} \neq 0$, имеем $\sigma = 0$. Таким образом, подматрица (42) может быть записана как

$$e^{i\xi}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{45}$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\beta \in i\mathbf{R}$. Заметим, что анализ случая $\varepsilon \neq 0$, проведенный в предыдущем разделе, сохраняет силу при $\varepsilon = 1$ и приводит к формулам

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(e^{i\xi} \mp 1), \quad \beta = -\tfrac{1}{2}(e^{i\xi} \pm 1).$$

Этим обсуждение варианта $u_{12} = 0$ закончено.

Переходим к анализу случая $u_{11} = 0$ (случаи $u_{13} = 0$, $u_{31} = 0$ и $u_{33} = 0$ анализируются таким же образом). Предыдущее обсуждение позволяет нам считать, что $u_{12} \neq 0$. Покажем, что не существует матриц $U \in \mathrm{UAut}(\mathcal{T}H_3)$, удовлетворяющих обоим условиям

$$u_{11} = 0, \qquad u_{12} \neq 0.$$

Предположим, что $u_{13} = 0$. Тогда $|u_{12}| = 1$, а потому $u_{22} = u_{32} = 0$. Теперь соотношения (в) и (г) превращаются в равенства

$$u_{31} + u_{33} = 0,$$
$$u_{21} + u_{23} = 0.$$

Согласно этим равенствам, вторая и третья строки унитарной матрицы U должны быть пропорциональны, что невозможно.

Таким образом, если $u_{11} = 0$, то можно считать, что $u_{12}u_{13} \neq 0$. Это предположение применимо и к матрице U^t, поэтому в последующих рассуждениях мы исходим из того, что $u_{21}u_{31} \neq 0$.

Умножая U на подходящее число с модулем 1, можем обеспечить равенство

$$\arg u_{31} = -\arg u_{13}. \tag{46}$$

Соотношение (а) принимает вид

$$u_{12}\overline{u}_{13} = \overline{u}_{12}u_{13},$$

т.е.

$$u_{12}\overline{u}_{13} \in \mathbf{R}. \tag{47}$$

Положим

$$\phi = \arg u_{13}.$$

Умножая U при необходимости справа на $\mathcal{D}_3$, можем считать, что

$$\arg u_{12} = \arg u_{13}. \tag{48}$$

Соотношение, аналогичное (47), должно выполняться для матрицы U^t; тем самым

$$u_{21}\overline{u}_{31} \in \mathbf{R}.$$

Умножая U при необходимости слева на $\mathcal{D}_3$, можем считать, что

$$\arg u_{21} = \arg u_{31} = -\phi. \tag{49}$$

Из ортогональности первой строки к двум другим строкам следует, что векторы (u_{22}, u_{23}) и (u_{32}, u_{33}) должны иметь вид

$$\begin{pmatrix} u_{22}, & u_{23} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\overline{u}_{13}, & \overline{u}_{12} \end{pmatrix} = \alpha e^{-i\phi} \begin{pmatrix} -|u_{13}|, & |u_{12}| \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} u_{32}, & u_{33} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -\overline{u}_{13}, & \overline{u}_{12} \end{pmatrix} = \beta e^{-i\phi} \begin{pmatrix} -|u_{13}|, & |u_{12}| \end{pmatrix},$$

где константы α и β еще предстоит определить.

Выпишем условия нормированности для первых двух строк:

$$|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 = 1,$$

$$|u_{21}|^2 + |\alpha|^2 \left(|u_{13}|^2 + |u_{12}|^2\right) = |u_{21}|^2 + |\alpha|^2 = 1.$$

Для третьей строки можем записать

$$|u_{31}|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Поскольку

$$|u_{21}|^2 + |u_{31}|^2 = 1,$$

то

$$|\alpha| = |u_{31}|, \quad |\beta| = |u_{21}|. \tag{50}$$

Ортогональность второй и третьей строк дает соотношение

$$u_{21}\overline{u}_{31} + \alpha\overline{\beta}(|u_{13}|^2 + |u_{12}|^2) = |u_{21}||u_{31}| + \alpha\overline{\beta} = 0,$$

из которого следует, что

$$\alpha\overline{\beta} = -|u_{21}||u_{31}| < 0. \tag{51}$$

Соотношение (б) принимает вид

$$-\beta e^{-i\phi}|u_{13}| \left(|u_{31}| + \overline{\beta}|u_{12}|\right) e^{i\phi} \in \mathbf{R},$$

или

$$-\beta|u_{13}||u_{31}| - |\beta|^2|u_{12}||u_{31}| \in \mathbf{R}.$$

Следовательно,

$$\beta|u_{13}||u_{31}| \in \mathbf{R},$$

т.е.

$$\beta \in \mathbf{R}.$$

Таким образом (см. (51)),

$$\alpha \in \mathbf{R}, \quad \alpha\beta < 0.$$

В силу (50), имеем

$$\alpha = \pm|u_{31}|, \quad \beta = \mp|u_{21}|. \tag{52}$$

Положив

$$c_1 = |u_{12}|, \quad s_1 = |u_{13}|, \quad c_2 = |u_{21}|, \quad s_2 = |u_{31}|,$$

можем записать U в виде

$$U = \begin{pmatrix} 0 & c_1 e^{i\phi} & s_1 e^{i\phi} \\ c_2 e^{-i\phi} & \mp s_1 s_2 e^{-i\phi} & \pm c_1 s_2 e^{-i\phi} \\ s_2 e^{-i\phi} & \pm s_1 c_2 e^{-i\phi} & \mp c_1 c_2 e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Подставив эти выражения в соотношение (в), получим

$$\overline{u}_{12}(u_{31} + u_{33}) = c_1 e^{-i\phi}(s_2 \mp c_1 c_2)e^{-i\phi} = u_{32}\overline{u}_{13} = \pm s_1 c_2 e^{-i\phi} s_1 e^{-i\phi},$$

или

$$c_1 s_2 \mp c_1^2 c_2 = \pm s_1^2 c_2,$$

или

$$c_1 s_2 = \pm(c_1^2 + s_1^2)c_2 = \pm c_2. \tag{54}$$

Так как $c_1, s_1, c_2, s_2 > 0$, то в формуле (53) следует выбирать верхние знаки.

Исследуем теперь соотношение (г). Поскольку

$$\begin{aligned} u_{22}(\overline{u_{11} + u_{13}}) = u_{22}\overline{u}_{13} &= -s_1^2 s_2 e^{-i2\phi}, \\ u_{32}(\overline{u_{21} + u_{23}}) &= s_1 c_2 (c_2 + c_1 s_2), \\ \overline{u}_{22}(u_{31} + u_{33}) &= -s_1 s_2 (s_2 - c_1 c_2) \end{aligned}$$

и

$$\overline{u}_{12}(u_{21} + u_{23}) = c_1(c_2 + c_1 s_2)e^{-i2\phi},$$

соотношение (г) принимает вид

$$-s_1^2 s_2 e^{-i2\phi} + s_1 c_2^2 + c_1 s_1 c_2 s_2 = s_1 s_2^2 + c_1 s_1 c_2 s_2 + (c_1 c_2 + c_1^2 s_2)e^{-i2\phi},$$

или

$$s_1(c_2^2 + s_2^2) = s_1 = \left[c_1 c_2 + (c_1^2 + s_1^2)s_2\right] e^{-i2\phi} = (c_1 c_2 + s_2)e^{-i2\phi}.$$

Отсюда следует, что

$$\phi = 0, \quad s_2 = s_1 - c_1 c_2.$$

В силу (54), имеем

$$\begin{aligned} 1 = c_2^2 + s_2^2 &= c_1^2 s_2^2 + s_1^2 - 2c_1 s_1 c_2 + c_1^2 c_2^2 \\ &= c_1^2 + s_1^2 - 2c_1 s_1 c_2 = 1 - 2c_1 s_1 c_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$c_1 s_1 c_2 = 0,$$

что противоречит нашему исходному предположению $u_{12}u_{13}u_{21}u_{31} \neq 0$. Этим описание группы $\mathrm{UAut}(\mathcal{T}H_3)$ завершено.

Литература

1. Х. Д. Икрамов, *Унитарные автоморфизмы пространства теплицевых матриц.* — Докл. РАН **456**:4 (2014), 389–391.
2. Х. Д. Икрамов, *Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц.* — Мат. заметки **96** (2014), No. 5, 687–696.
3. Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, А. К. Абдикалыков, *О локальных условиях, характеризующих множество (T+H)-матриц.* — Докл. РАН **457**:1 (2014), 17–18.

Ikramov Kh. D., Abdikalykov A. K., Chugunov V. N. Unitary automorphisms of the space of 3×3 Toeplitz-plus-Hankel matrices.

Let $\mathcal{T}H_3$ be the set of Toeplitz-plus-Hankel 3×3 matrices. We describe all the matrices U in the unitary group $\mathbf{U}_3$ such that

$$\forall A \in \mathcal{T}H_3 \longrightarrow B = U^*AU \in \mathcal{T}H_3.$$

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 8 сентября 2014 г.

Казахстанский филиал
МГУ им. М.В. Ломоносова
ул. Мунайтпасова 7,
010010 Астана,
Республика Казахстан
E-mail: adiko2008@gmail.com

Институт вычислительной математики РАН
ул. Губкина 8,
119333 Москва, Россия
E-mail: vadim@bach.inm.ras.ru