Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Х. Д. Икрамов

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ГАНКЕЛЕВЫХ МАТРИЦ ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА

1. В недавней публикации [1] приведены явные формулы для компонент сингулярного разложения теплицевой $n \times n$-матрицы

$$T_{0,n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а также указаны следствия этих формул, касающиеся сингулярных разложений хессенберговых теплицевых матриц вида

$$T_n(f) = T_{0,n} + f(T_{0,n}^{-1})^*, \tag{2}$$

где f – произвольное положительное число.

К сожалению, авторы статьи [1] не отметили следствий своих результатов, относящихся к ганкелевым матрицам. Цель данной заметки – исправить это упущение.

2. Следуя [1], выпишем формулы для сингулярных чисел σ_m и левых сингулярных векторов u_m матрицы (1), иначе говоря, формулы для диагональных элементов матрицы Σ и столбцов унитарной матрицы $U = (u_1 u_2 \dots u_n)$ в сингулярном разложении

$$T_{0,n} = U\Sigma V^*. \tag{3}$$

Вот эти формулы:

$$\sigma_m = 2\sin\frac{\theta_m}{2}, \qquad \theta_m = \frac{2m-1}{2n+1}\pi. \tag{4}$$

$$u_m = (\sin n\theta_m, \sin[(n-1)\theta_m], \dots, \sin\theta_m)^T. \tag{5}$$

Ключевые слова: теплицева матрица, сингулярное разложение, ганкелева матрица, спектральное разложение.

Здесь $1 \leqslant m \leqslant n$. Заметим, что все числа σ_m расположены в интервале $(0,\,2)$ и растут вместе с ростом индекса m. Так как

$$(T_{0,n}^{-1})^* = U\Sigma^{-1}V^*,$$

то для всего семейства матриц $T_n(f)$ имеем

$$T_n(f) = U(\Sigma + f\Sigma^{-1})V^*. \tag{6}$$

3. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ матрицу-перестановку

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \dots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Это так называемая перъединичная матрица. Произведение

$$H_{0,n} = \mathcal{P}_n T_{0,n} \tag{7}$$

есть ганкелева матрица

$$\begin{pmatrix} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & -1 & \\ & & & \dots & & & \\ & 1 & -1 & & & & \\ 1 & -1 & & & & & \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Из (3) сразу получаем сингулярное разложение матрицы $H_{0,n}$:

$$H_{0,n} = (\mathcal{P}_n U)\Sigma V^*. \tag{9}$$

Сингулярные числа σ_m вещественной симметричной матрицы $H_{0,n}$ суть модули ее собственных значений λ_m. Найдем сами эти числа λ_m.

Напомним, что унитарная матрица $\mathcal{P}_n U$ в разложении (9) составлена из собственных векторов матрицы

$$H_{0,n}^2 = H_{0,n}^* H_{0,n} = T_{0,n}^* T_{0,n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку числа σ_m^2 попарно различны, то матрицы $H_{0,n}$ и $H_{0,n}^2$ имеют одну и ту же систему собственных векторов. Отсюда следует, что

$$H_{0,n}(\mathcal{P}_n U) = (\mathcal{P}_n U)\Lambda, \tag{10}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Приравнивая в соотношении (10) m-е столбцы, находим

$$H_{0,n}(\mathcal{P}_n u_m) = \lambda_m(\mathcal{P}_n u_m).$$

Для первых компонент этих векторов получаем равенство

$$u_{1,m} = \lambda_m u_{n,m}.$$

Элемент $u_{n,m} = \sin\theta_m$ всегда положителен (см. (4)), поэтому знак собственного значения λ_m совпадает со знаком элемента

$$u_{1,m} = \sin(n\theta_m).$$

Аргумент этого синуса

$$n\theta_m = n\frac{2m-1}{2n+1}\pi = \frac{2m-1}{1+\frac{1}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

имеет очевидную верхнюю оценку $(2m-1)\frac{\pi}{2}$. С другой стороны, нетрудно проверить, что нижней оценкой для $n\theta_m$ может служить число $(m-1)\pi$. Итак,

$$(m-1)\pi < n\theta_m < (2m-1)\frac{\pi}{2}.$$

Как следствие, имеем

$$\mathrm{sgn} u_{1,m} = (-1)^{m+1}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, собственные значения матрицы $H_{0,n}$ даются формулами

$$\lambda_m = (-1)^{m+1}\sigma_m = (-1)^{m+1} 2\sin\frac{\theta_m}{2},$$

$$\theta_m = \frac{2m-1}{2n+1}\pi, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n.$$

Что касается собственных векторов, то они получаются из векторов u_m записью компонент в обратном порядке (см. (5)).

4. Умножим равенство (2) слева на матрицу $\mathcal{P}_n$:

$$\mathcal{P}_n T_n(f) = H_{0,n} + f\mathcal{P}_n(T_{0,n}^{-1})^*. \tag{11}$$

Учитывая, что $\mathcal{P}_n^* = \mathcal{P}_n^{-1} = \mathcal{P}_n$, имеем

$$\mathcal{P}_n(T_{0,n}^{-1})^* = [(\mathcal{P}_n T_{0,n})^{-1}]^* = (H_{0,n}^{-1})^* = H_{0,n}^{-1}.$$

Тем самым матрица (11), которую естественно обозначить через $H_n(f)$, есть функция от матрицы $H_{0,n}$:

$$H_n(f) = H_{0,n} + fH_{0,n}^{-1}.$$

Поэтому собственными значениями матрицы $H_n(f)$ являются числа

$$\lambda_m + \frac{f}{\lambda_m}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n,$$

а в качестве ее собственных векторов могут быть взяты собственные векторы $\mathcal{P}_n u_m$ матрицы $H_{0,n}$.

5. Перемножая матрицы $T_{0,n}$ и $\mathcal{P}_n$ в обратном порядке, получаем

$$\widehat{H}_{0,n} = T_{0,n}\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & -1 & 1 \\ & & & -1 & 1 & \\ & & \cdots & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\widehat{H}_{0,n} = \mathcal{P}_n(\mathcal{P}_n T_{0,n})\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n H_{0,n}\mathcal{P}_n,$$

то собственными векторами матрицы $\widehat{H}_{0,n}$ для чисел λ_m являются векторы u_m $(1 \leqslant m \leqslant n)$.

Литература

1. H. Rabe, A. C. M. Ran, *A peculiar permutation phenomenon arising from the singular vector entries of a special class of Toeplitz matrices.* — Linear Algebra Appl. **459** (2014), 368–383.

Ikramov Kh. D. Spectral decomposition of Hankel matrices of a special class.

Implications, related to the spectral decompositions of certain special Hankel matrices, are derived from recent results of H. Rabe and A. C. M. Ran.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 6 ноября 2014 г.