Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Ю. К. Демьянович, Б. Г. Вагер

О СПЛАЙН-ВСПЛЕСКОВОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

1. Введение

Сплайн-всплесковое представление обычно ассоциируется с представлением исходной числовой информации в виде двух (или более) числовых инфомационных потоков, позволяющих (в случае необходимости) практически полностью восстановить исходную информацию. Один из этих потоков называют основным, а остальные – уточняющими (всплесковыми). Некоторые вариации аппарата представления (в частности, выбор носителей функционалов биортогональной системы) приводят к различным вариантам сплайн-всплесков (см. [1]). Обычно алгоритм сплайн-всплескового разложения может быть представлен в виде ряда элементарных операций, каждая из которых ассоциируется с удалением узла исходной сетки. В связи с этим возникает вопрос, зависит ли результат от порядка элементарных операций из заранее фиксированного множества операций (при сохранении остальных условий представления). В работе [2] установлена независимость сплайн-всплескового представления первого порядка от последовательности удаления соседних узлов исходной сетки, а в [3] получены условия упомянутой независмости для разложений второго порядка в случае бесконечной сетки.

Цель данной работы состоит в исследовании условий независимости сплайн-всплескового представления второго порядка от последовательности элементарных операций в случае конечной сетки. Здесь рассматривается понятие k-локализованных на конечной сетке систем функционалов и выделяется множество операторов, в котором имеется лишь один левый обратный к оператору вложения сплайновых пространств.

Ключевые слова: аппроксимационные соотношения, сплайны, вэйвлеты, декомпозиция, реконструкция, вложенность, продолжение, калибровочные соотношения.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 13-01-00096.

Во втором разделе данной статьи вводятся обозначения и приводятся необходимые утверждения. Третий и четвертый разделы посвящены описанию вложенного пространства сплайнов, пятый – построению матрицы продолжения, а шестой – сплайн-всплесковому разложению. В седьмом и восьмом разделах устанавливается совпадение операций сплайн-всплесковых представлений, полученных при различной очередности элементарных операций.

2. Предварительные сведения. Пространство B_φ-сплайнов

В этом пункте излагаются необходимые в дальнейшем определения и теоремы, устанавленные в работе [1].

Пусть $K_0 \geqslant 1$ – априори заданное число. На вещественной оси рассмотрим (конечный или бесконечный) интервал (α, β) и сетки X вида

$$X: \quad \cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots , \tag{2.1}$$

со свойствами

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to-\infty} x_j, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to+\infty} x_j, \quad K_0^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1}-x_j}{x_j - x_{j-1}} \leqslant K_0. \tag{2.2}$$

Введем трехкомпонентную вектор-функцию (столбец) $\varphi : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^3$ класса $C^2(\alpha, \beta)$, для которой вронскиан компонент вектор-функции $\varphi(t)$ равномерно отделен от нуля:

$$|\det(\varphi(t), \varphi\,'(t), \varphi\,''(t))| \geqslant c > 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta). \tag{2.3}$$

Полагая $\varphi_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_s)$, $\varphi'_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_s)$, $\varphi''_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi''(x_s)$, рассмотрим символический определитель

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbf{a}}(\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}, \varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} -\det \begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi'_{j+1} \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и положим

$$\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathbf{a}}(\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}, \varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}).$$

При достаточно малом $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}}(x_{j+1} - x_j)$ цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ полная, т.е. выполнены соотношения

$$\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

В дальнейшем предполагается, что соотношения (2.4) выполнены.

Пусть трехкомпонентные вектор-столбцы $\mathbf{b}_s$ определены тождествами

$$\mathbf{b}_s^T \mathbf{x} \equiv \det(\varphi_s, \varphi_s', \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{b}_s^T \mathbf{a}_j = -\det \begin{pmatrix} \det(\varphi_s, \varphi_s', \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_s, \varphi_s', \varphi_{j+1}') \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi_{j+2}', \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi_{j+2}', \varphi_{j+1}') \end{pmatrix}.$$

Цепочка векторов $\{\mathbf{b}_s^T\}$ локально ортогональна (см. [2]) цепочке векторов $\{\mathbf{a}_j\}$, т.е.

$$\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_{j-2} = \mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_{j-1} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Ввиду полноты цепочки $\{\mathbf{a}_j\}$ справедливы соотношения

$$\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j \neq 0, \quad \mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_{j-3} \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

Положим

$$S_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s=j,j+1,j+2} (x_s, x_{s+1}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (x_j, x_{j+1}),$$

и определим функции ω_j для сетки X из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_j \omega_j(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in G, \tag{2.6}$$

$$\omega_j(t) = 0 \quad \forall t \in G \setminus S_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что при $t \in (x_i, x_{i+1})$ соотношение (2.6) можно переписать в виде

$$\mathbf{a}_{i-2}\, \omega_{i-2}(t) + \mathbf{a}_{i-1}\, \omega_{i-1}(t) + \mathbf{a}_i\, \omega_i(t) \equiv \varphi(t). \tag{2.8}$$

Система (2.8) однозначно разрешима относительно неизвестных $\omega_{i-2}(t)$, $\omega_{i-1}(t)$, $\omega_i(t)$, рассматриваемых при каждом фиксированном $t \in (x_i, x_{i+1})$ для любого $i \in \mathbb{Z}$; получаемое решение ω_j лежит в пространстве $C^1(\alpha, \beta)$.

Использование вектор-столбцов $\mathbf{b}_s$ с учетом свойств (2.5) позволяет дать компактное представление функций ω_j.

Введем бесконечномерное пространство $\mathbb{S}$ сплайнов второго порядка соотношением

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}(X, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl(\mathcal{L}\{\omega_j \mid j \in \mathbb{Z}\}),$$

где $Cl(\mathcal{L}\{\dots\})$ означает замыкание (в топологии поточечной сходимости) линейной оболочки функций, находящихся в фигурных скобках.

Если $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, t^2)^T$, то $\mathbb{S}(X, \varphi)$ оказывается пространством сплайнов второй степени с минимальным дефектом.

3. Пространство сплайнов на укрупненной сетке

Для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \quad \text{при} \quad j \leqslant k \quad \text{и} \quad \widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} \quad \text{при} \quad j \geqslant k+1 \tag{3.1}$$

и рассмотрим новую сетку

$$X_{\{k+1\}}: \quad \dots < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \cdots .$$

Для краткости в дальнейшем зависимость рассматриваемых объектов от k отмечаем не во всех случаях.

Полагая $\widetilde{\varphi}_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\widetilde{x}_s)$, $\widetilde{\varphi}'_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(\widetilde{x}_s)$, $\widetilde{\varphi}''_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi''(\widetilde{x}_s)$, рассмотрим цепочку векторов

$$\widetilde{\mathbf{a}}_j \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathbf{a}}(\widetilde{\varphi}_{j+1}, \widetilde{\varphi}'_{j+1}, \widetilde{\varphi}_{j+2}, \widetilde{\varphi}'_{j+2}), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

В дальнейшем предполагается, что цепочка векторов $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ полная.

Пусть

$$\widetilde{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s=j,j+1,j+2} (\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_{s+1}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \widetilde{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (\widetilde{x}_j, \widetilde{x}_{j+1}).$$

Определим функции $\widetilde{\omega}_j$ из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{a}}_j \widetilde{\omega}_j(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in \widetilde{G}, \tag{3.3}$$

$$\widetilde{\omega}_j(t) = 0 \quad \forall t \in \widetilde{G} \setminus \widetilde{S}_j. \tag{3.4}$$

Очевидно, что для $j \in \mathbb{Z}\setminus\{k-2, k-1, k\}$ и $t \in (\alpha, \beta)$ сплайны $\widetilde{\omega}_j$ совпадают с рассмотренными ранее сплайнами:

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_j(t) \quad \forall j \leqslant k-3; \quad \widetilde{\omega}_j(t) \equiv \omega_{j+1}(t) \quad \forall j \geqslant k+1. \tag{3.5}$$

Теорема 1. *При $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы следующие тождества:*

$$\widetilde{\omega}_{k-2}(t) = \omega_{k-2}(t) + \widetilde{a}_k \omega_{k-1}(t), \tag{3.6}$$

$$\widetilde{\omega}_{k-1}(t) = \widetilde{b}_k \omega_{k-1}(t) + \widetilde{c}_k \omega_k(t), \tag{3.7}$$

$$\widetilde{\omega}_k(t) = \widetilde{d}_k \omega_k(t) + \omega_{k+1}(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \tag{3.8}$$

где

$$\widetilde{a}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{b}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-1}}{\mathbf{b}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-2}}, \quad \widetilde{b}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}}{\mathbf{b}_{k-1}^T\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}}, \quad \widetilde{c}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{b}_{k+3}^T\mathbf{a}_{k}}{\mathbf{b}_{k+3}^T\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}}, \quad \widetilde{d}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{b}_{k}^T\mathbf{a}_{k}}{\mathbf{b}_{k}^T\mathbf{a}_{k+1}},$$

причем коэффициенты a_k *и* b_k *определяются векторами* φ_{k-1}, φ_k, φ_{k+1}, φ_{k+2}, φ'_{k-1}, φ'_k, φ'_{k+1}, φ'_{k+2}, *а коэффициенты* c_k *и* d_k *определяются векторами* φ_k, φ_{k+1}, φ_{k+2}, φ_{k+3}, φ'_k, φ'_{k+1}, φ'_{k+2}, φ'_{k+3}.

Следствие 1. *Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция* $\varphi(t)$ *задана на отрезке* $[x_{-1}, x_{N+1}]$ *и на нем удовлетворяет соотношению* (2.3), *то формулы* (3.6)–(3.8) *справедливы при удалении* $k+1$*-го узла, где в качестве* k *может фигурировать любое из чисел множества* $\{0, 1, \dots, N-2\}$.

Теорема 2. *При всех* $t \in (\alpha, \beta)$ *справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_i(t) = \sum_j \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\omega_j(t), \tag{3.9}$$

где для $i, j \in \mathbb{Z}$ *числа* $\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}$ *отыскиваются по формулам:*

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \leqslant k-3, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{3.10}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2} = 1, \quad \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} = \widetilde{a}_k, \tag{3.11}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \notin \{k-2, k-1\}, \quad \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} = \widetilde{b}_k, \tag{3.12}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \widetilde{c}_k, \quad \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \notin \{k-1, k\}, \tag{3.13}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} = \widetilde{d}_k, \quad \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k+1} = 1, \tag{3.14}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \notin \{k, k+1\}, \tag{3.15}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} = \delta_{i,j-1} \quad \textit{при} \quad i \geqslant k+1, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{3.16}$$

где $\widetilde{a}_k$, $\widetilde{b}_k$, $\widetilde{c}_k$, $\widetilde{d}_k$ *определены в теореме* 1.

Доказательство формул (3.9)–(3.16) легко следует из соотношений (3.1) и (3.5)–(3.8). □

Положим

$$\widetilde{\mathbb{S}} = \mathbb{S}(X_{\{k+1\}}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl(\mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}).$$

Из теоремы 2 получаем

$$\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S} \subset C^1(\alpha, \beta).$$

Для функционала f из сопряженного пространства $(C^1)^*$ будем писать $\operatorname{supp} f \subset [c, d]$, если значение $\langle f, u\rangle$ функционала f на функции $u \in$

C^1 определяется значениями этой функции на интервале (c,d). Если $\mathrm{supp}\ f \subset [a_0-\epsilon, a_0+\epsilon]$ $\forall \epsilon > 0$, то пишем $\mathrm{supp}\ f = a_0$.

Теорема 3. *В рассматриваемых предположениях для того, чтобы система функционалов $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ из $(C^1(\alpha,\beta))^*$ была биортогональна системе функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,*

$$\langle g_i, \omega_j\rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i,j \in \mathbb{Z}, \tag{3.17}$$

необходимо, а если

$$\mathrm{supp}\ g_i \subset [x_i, x_{i+1}], \tag{3.18}$$

то и достаточно, чтобы

$$\langle g_i, \varphi\rangle = \mathbf{a}_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{3.19}$$

Доказательство следует из формул (2.6)–(2.8).

Замечание 1. В условиях (2.3) существование системы функционалов со свойствами (3.17)–(3.19) установлено в работе [1] там же представлена реализация этой системы функционалов.

Для укрупненной сетки справедлива аналогичная теорема.

Теорема 4. *Для того, чтобы система функционалов $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ из $(C^1(\alpha,\beta))^*$ была биортогональна системе функций $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,*

$$\langle \widetilde{g}_i, \widetilde{\omega}_j\rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i,j \in \mathbb{Z},$$

необходимо, а если $\mathrm{supp}\ \widetilde{g}_i \subset [\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}]$, *то и достаточно, чтобы* $\langle \widetilde{g}_i, \varphi\rangle = \widetilde{\mathbf{a}}_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

В соотвтствии с замечанием 1 система функционалов $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ существует и может быть реализована в явном виде.

В дальнейшем через $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ обозначаются системы функционалов, удовлетворяющие теоремам 3 и 4.

4. Сплайны на отрезке

Для фиксированного натурального числа $N \geqslant 5$ из бесконечной сетки X выделим конечную сетку X_N,

$$X_N: \quad x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N < x_{N+1}, \tag{4.1}$$

а из бесконечной цепочки $\mathbf{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}$ выделим конечную цепочку векторов $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{A}_N = \{\mathbf{a}_{-2}, \mathbf{a}_{-1}, \ldots, \mathbf{a}_{N-1}\}$.

Положим

$$a \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_0, \quad b \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_N,$$

$$I_s \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \ldots, s\}, \quad J_s \stackrel{\text{def}}{=} \{-2, -1, 0, \ldots, s\}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим сужение ранее рассмотренных функций $\omega_i(t)$ и $\widetilde{\omega}_j(t)$ на отрезок $[a, b]$, сохраняя для них прежние обозначения; здесь $i \in J_{N-1}$, $j \in J_{N-2}$.

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$, $j \in J_{N-1}$, представляет собой конечномерное линейное пространство

$$\mathbb{S}_N = \mathbb{S}(X_N, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl(\mathcal{L}\{\omega_j \mid j \in J_{N-1}\}).$$

Ясно, что $\mathbb{S}_N \subset C^1[a, b]$. Из определения функций $\omega_j(t)$ вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Функция* $u_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=-2}^{N-1} c_j \omega_j(t)$, $t \in [a, b]$, *лежит в пространстве* $\mathbb{S}_N$ *и при фиксированном* $t \in [a, b]$ *полностью определяется значениями функции* $\varphi(t)$, *сеткой* X_N, *набором векторов* $\{\varphi_j, \varphi'_j\}_{j \in \{-1, 0, \ldots, N+1\}}$ *и набором коэффициентов* $\{c_j\}_{j \in J_{N-1}}$.

Предполагая, что $k \in \{0, 1, \ldots, N-2\}$, удалим узел x_{k+1} из сетки (4.1); в результате получим новую сетку

$$X_{N\{k+1\}}: \quad \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \cdots < \widetilde{x}_N,$$

где узлы $\widetilde{x}_i$, $i = -1, 0, \ldots, N$, по-прежнему определяются формулами (3.1).

Пусть $\widetilde{\omega}(t)$ и $\omega(t)$ – конечномерные вектор-функции:

$$\widetilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_{-2}, \widetilde{\omega}_{-1}, \widetilde{\omega}_0, \ldots, \widetilde{\omega}_{N-2}), \quad \omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \ldots, \omega_{N-1}).$$

Ввиду теорем 1, 2 и следствия 1 при $k \in I_{N-2}$ калибровочные соотношения могут быть записаны в виде

$$\widetilde{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{N\{k+1\}} \omega(t), \quad t \in [a, b], \tag{4.2}$$

где $\mathfrak{P}_{N\{k+1\}}$ – прямоугольная числовая матрица размеров $(N+1) \times (N+2)$, называемая матрицей вложения:

$$\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & \widetilde{-2} & \dots & \widetilde{k-3} & \widetilde{k-2} & \widetilde{k-1} & \widetilde{k} & \widetilde{k+1} & \dots & \widetilde{N-2} \\
-2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
k-3 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
k-2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
k-1 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
k & 0 & \dots & 0 & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\
k+1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
k+2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
k+3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
N-2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
N-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}.
$$

Таким образом, пространство

$$\mathbb{S}_{N\{k+1\}} = \mathbb{S}(X_{N\{k+1\}}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} Cl(\mathcal{L}\{\widetilde{\omega}_j \mid j \in J_{N-2}\})$$

лежит в пространстве $\mathbb{S}_N$: $\mathbb{S}_{N\{k+1\}} \subset \mathbb{S}_N$.

5. Матрица продолжения

Продолжим систему функционалов $\widetilde{g}_s$ на объемлющее пространство $\mathbb{S}_N$.

Будем говорить, что система $\{f_s\}_{s\in J_{N-2}}$ линейных функционалов f_s над пространством $C^1[a,b]$ k-локализована на сетке X_N, если выполнено условие

(B)

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{supp} f_s \subset [x_s, x_{s+1}] \quad \forall s \leqslant k,\\
&\operatorname{supp} f_s \subset [x_{s+1}, x_{s+2}] \quad \forall s \geqslant k+1, \quad s \in J_{N-2}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{G}_k(X_N, \varphi)$ k-локализованных на сетке X_N систем $\widetilde{G} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{g}_s\}_{s\in J_{N-2}}$ линейных функционалов $\widetilde{g}_s$ над пространством $C^1[a,b]$ со свойством

$$\widetilde{\mathbf{a}}_s = \langle \widetilde{g}_s, \varphi \rangle \quad \forall s \in J_{N-2}. \tag{5.1}$$

Лемма 1. *Множество $\mathfrak{G}_k(X_N, \varphi)$ непусто; оно содержит систему функционалов, задаваемую формулами*

$$\langle \widetilde{g}_s^{\circ}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\det \begin{pmatrix} \widetilde{u}_{s+1} & \widetilde{u}'_{s+1} \\ \det(\widetilde{\varphi}_{s+2}, \widetilde{\varphi}'_{s+2}, \widetilde{\varphi}_{s+1}) & \det(\widetilde{\varphi}_{s+2}, \widetilde{\varphi}'_{s+2}, \widetilde{\varphi}'_{s+1}) \end{pmatrix};$$

здесь $u \in C^1[a,b]$, $\widetilde{u}_{s+1} \stackrel{\text{def}}{=} u(\widetilde{x}_{s+1})$, $\widetilde{u}'_{s+1} \stackrel{\text{def}}{=} u'(\widetilde{x}_{s+1}) \quad \forall s \in J_{N-2}$.

Любая система функционалов $\{\widetilde{g}_s\}_{s\in J_{N-2}}$ из множества $\mathfrak{G}_k(X_N,\varphi)$ является продолжением на $C^1[a,b]$ системы функционалов, биортогональной системе сплайнов $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in J_{N-2}}$:

$$\langle \widetilde{g}_s, \widetilde{\omega}_j\rangle = \delta_{s,j}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Легко видеть, что условие (B) выполнено: поскольку

$$\operatorname{supp}\,\widetilde{g}_s^{\circ} = \widetilde{x}_s = \begin{cases} x_s & \text{при } s\leqslant k,\\ x_{s+1} & \text{при } s\geqslant k+1,\end{cases}$$

то

$$\operatorname{supp}\,\widetilde{g}_s^{\circ}\subset[x_s,x_{s+1}]\quad \forall s\leqslant k;\quad \operatorname{supp}\,\widetilde{g}_s^{\circ}\subset[x_{s+1},x_{s+2}]\quad\forall s\geqslant k+1.$$

Проверим справедливость свойства (5.1) для функционалов $\widetilde{g}_s^{\circ}$. Применяя функционал $\widetilde{g}_s^{\circ}$ к компонентам вектора $\varphi(t)$ и используя определение (3.2) вектора $\widetilde{\mathbf{a}}_s$, убеждаемся в том, что $\langle\widetilde{g}_s^{\circ},\varphi\rangle=\widetilde{\mathbf{a}}_s$. Первая часть леммы доказана.

Перейдем к доказательству второй части леммы. По условию система $\{\widetilde{g}_s\}_{s\in J_{N-2}}$ k-локализована на сетке X_N, так что

$$\operatorname{supp}\,\widetilde{g}_s\subset[x_s,x_{s+1}]\quad\forall s\leqslant k,\quad \operatorname{supp}\,\widetilde{g}_s\subset[x_{s+1},x_{s+2}]\quad\forall s\geqslant k+1;$$

отсюда $\operatorname{supp}\,\widetilde{g}_s\subset[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_{s+1}]$ $\forall s\in J_{N-2}$. В соответствии с (3.3)–(3.4) из последнего соотношения следует, что

$$\langle\widetilde{g}_s,\widetilde{\omega}_j\rangle=0\quad\text{при}\quad j\in J_{N-1}\setminus\{s-2,s-1,s\}. \tag{5.3}$$

Воспользуемся соотношениями (3.3)–(3.4) и применим функционал $\widetilde{g}_s$; благодаря формулам (5.1) имеем

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{s-2}\,\langle\widetilde{g}_s,\widetilde{\omega}_{s-2}\rangle+\widetilde{\mathbf{a}}_{s-1}\,\langle\widetilde{g}_s,\widetilde{\omega}_{s-1}\rangle+\widetilde{\mathbf{a}}_s\,\langle\widetilde{g}_s,\widetilde{\omega}_s\rangle=\widetilde{\mathbf{a}}_s. \tag{5.4}$$

Используя линейную независимость векторов $\widetilde{\mathbf{a}}_{s-2}$,$\widetilde{\mathbf{a}}_{s-1}$, $\widetilde{\mathbf{a}}_s$, из (5.4) получаем

$$\langle\widetilde{g}_s,\widetilde{\omega}_{s-2}\rangle=0,\quad\langle\widetilde{g}_s,\widetilde{\omega}_{s-1}\rangle=0,\quad\langle\widetilde{g}_s,\widetilde{\omega}_{s-2}\rangle=1. \tag{5.5}$$

Из (5.3) и (5.5) следует (5.2). □

Рассмотрим матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\stackrel{\text{def}}{=}(\widetilde{\mathfrak{q}}_{ij})_{i\in J_{N-2},\,j\in J_{N-1}}$, где $\widetilde{\mathfrak{q}}_{ij}\stackrel{\text{def}}{=}\langle\widetilde{g}_i,\omega_j\rangle$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Если $\{\widetilde{g}_s\}_{s\in J_{N-2}}\in\mathfrak{G}_k(X_N,\varphi)$, то для чисел $\widetilde{\mathfrak{q}}_{ij}$, $i\in J_{N-2}$, $j\in J_{N-1}$, верны соотношения*

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{ij}=\delta_{i,j}\quad\textit{при}\quad\forall i\in J_{N-2},\quad j\leqslant k-3,$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{ij} = \delta_{i+1,j} \quad \textit{при} \quad \forall i \in J_{N-2}, \quad j \geqslant k+2,$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{i,k-2} = 0 \quad \textit{при} \quad (i \leqslant k-3) \vee (i \geqslant k+1), \quad i \in J_{N-2}; \quad \widetilde{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2} = 1,$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} = \frac{\mathbf{b}_{k-2}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}}{\mathbf{b}_{k-2}^T \mathbf{a}_{k-2}} - \frac{\mathbf{b}_{k-2}^T \mathbf{a}_{k-1}}{\mathbf{b}_{k-2}^T \mathbf{a}_{k-2}} \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}}{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}},$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k-2} = \frac{\mathbf{b}_{k+1}^T \mathbf{a}_{k+1}}{\mathbf{b}_{k+1}^T \mathbf{a}_{k-2}},$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{i,k-1} = 0 \quad \textit{при} \quad (i \leqslant k-2) \vee (i \geqslant k+1), \quad i \in J_{N-2};$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} = \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}}{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}},$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k-1} = \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k+1}}{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k}}{\mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}} \frac{\mathbf{b}_{k}^T \mathbf{a}_{k+1}}{\mathbf{b}_{k}^T \mathbf{a}_{k}},$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{i,k} = 0 \ \ \textit{при} \ \ (i \leqslant k-1) \vee (i \geqslant k+1), \ i \in J_{N-2}; \quad \widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k} = \frac{\mathbf{b}_{k}^T \mathbf{a}_{k+1}}{\mathbf{b}_{k}^T \mathbf{a}_{k}},$$

$$\widetilde{\mathfrak{q}}_{i,k+1} = 0 \quad \forall i \in J_{N-2}.$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы сначала применяем k-локализованную систему функционалов $\{\widetilde{g}_s\}_{s \in J_{N-2}}$ к сплайнам ω_j, определяемым соотношениями (2.6) – (2.7), а затем используем формулы (5.1). □

Матрица $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$ имеет вид

$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}} \overset{\text{def}}{=}$$

$$\begin{array}{c} \\ \widetilde{-2} \\ \dots \\ \widetilde{k-3} \\ \widetilde{k-2} \\ \widetilde{k-1} \\ \widetilde{k} \\ \widetilde{k+1} \\ \widetilde{k+2} \\ \dots \\ \widetilde{N-2} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} -2 & \dots & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & N-1 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} & \widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k-2} & \widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k-1} & \widetilde{\mathfrak{q}}_{k,k} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array} \right) \end{array}.$$

6. Сплайн-всплесковое представление пространства $\mathbb{S}_N$

Введем вектор-столбец, компонентами которого являются функционалы $\widetilde{g}_i$, $i \in J_{N-2}$:

$$\widetilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{g}_{-2}, \widetilde{g}_{-1}, \ldots, \widetilde{g}_{N-2})^T. \tag{6.1}$$

Теорема 7. *Матрица $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$ является левой обратной для матрицы $\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}$, т.е.*

$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}} \mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}} = I, \tag{6.2}$$

где I – квадратная матрица порядка $N+1$ с элементами $\delta_{i,j}$, $i, j \in J_{N-2}$.

Доказательство. Транспонирование соотношения (4.2) приводит к равенству вектор-строк

$$\widetilde{\omega}^T(t) = \omega^T(t) \mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}.$$

Умножим это равенство на вектор-столбец $\widetilde{g}$ слева; ввиду свойства биортогональности (5.2) получаем единичную матрицу в левой части, а в правой части (согласно определению (6.1)) – матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$, умноженную на матрицу $\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}$. □

Рассмотрим оператор $P_{N\{k+1\}}$ проектирования пространства $\mathbb{S}_N$ на подпространство $\mathbb{S}_{N\{k+1\}}$, задаваемый формулой

$$P_{N\{k+1\}} u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in J_{N-2}} \langle \widetilde{g}_j, u \rangle \, \widetilde{\omega}_j \quad \forall u \in \mathbb{S}(X_N, \varphi), \tag{6.3}$$

и введем оператор $Q_{N\{k+1\}} = \mathcal{I} - P_{N\{k+1\}}$, где $\mathcal{I}$ – тождественный в $\mathbb{S}_N$ оператор.

С помощью проектирования (6.3) получаем прямое разложение *исходного пространства* $\mathbb{S}_N$ на *основное пространство* $\mathbb{S}_{N\{k+1\}}$ и *пространство вэйвлетов (всплесков)* $\mathbb{W}_{N\{k+1\}}$:

$$\mathbb{S}_N = \mathbb{S}_{N\{k+1\}} \dot{+} \mathbb{W}_{N\{k+1\}}, \tag{6.4}$$

т.е. *сплайн-всплесковое представление* пространства $\mathbb{S}_N$.

Пусть $u \in \mathbb{S}_N$; используя соотношение (6.4), получаем два представления элемента u:

$$u = \sum_{j \in J_{N-1}} c_j \omega_j, \tag{6.5}$$

$$u = \widetilde{u} + w, \tag{6.6}$$

где

$$\widetilde{u} = \sum_{i\in J_{N-2}} a_i\widetilde{\omega}_i, \quad w = \sum_{j\in J_{N-1}} b_j\omega_j, \tag{6.7}$$

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{g}_i, u\rangle, \quad b_j,\ c_j\ \in \mathbb{R}^1. \tag{6.8}$$

Из (3.9), (6.5)–(6.7) имеем

$$\sum_{j\in J_{N-1}} c_j\omega_j = \sum_{i\in J_{N-2}} a_i \sum_{j\in J_{N-1}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\omega_j + \sum_{j\in J_{N-1}} b_j\omega_j,$$

откуда ввиду линейной независимости системы $\{\omega_j\}$ получаем *формулы реконструкции*

$$c_j = \sum_{i\in J_{N-2}} a_i\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + b_j, \quad j \in J_{N-1}. \tag{6.9}$$

Используя представление (6.8), перепишем формулы (6.9) в виде $c_j = \sum\limits_i \langle\widetilde{g}_i, u\rangle\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + b_j$ и подставим сюда u из соотношения (6.5) (заменив в (6.5) индекс суммирования j на s): $c_j = \sum\limits_i\sum\limits_s c_s\widetilde{\mathfrak{q}}_{is}\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} + b_j$, где $\widetilde{\mathfrak{q}}_{is} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\widetilde{g}_i, \omega_s\rangle$; отсюда

$$b_j = c_j - \sum_{i\in J_{N-2}}\sum_{s\in J_{N-1}} c_s\widetilde{\mathfrak{q}}_{is}\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}, \quad j \in J_{N-1}. \tag{6.10}$$

Подставляя (6.5) в (6.8), получаем

$$a_i = \sum_{s\in J_{N-1}} c_s\widetilde{\mathfrak{q}}_{is}, \quad i \in J_{N-2}. \tag{6.11}$$

Представления (6.10)–(6.11) являются *формулами декомпозиции.*

Ввиду линейной независимости систем $\{\omega_j\}_{j\in J_{N-1}}$ и $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j\in J_{N-2}}$ вектор-столбцы $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{-2}, a_{-1}, \ldots, a_{N-2})^T$, $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} (b_{-2}, b_{-1}, \ldots, b_{N-1})^T$, $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{-2}, c_{-1}, \ldots, c_{N-1})^T$ определяются однозначно функциями u, $\widetilde{u}$, w (см. формулы (6.5)–(6.7)).

Введем линейные векторные пространства $\mathcal{A}_N = \{\mathbf{a}\}$, $\mathcal{B}_N = \{\mathbf{b}\}$, $\mathcal{C}_N = \{\mathbf{c}\}$, индуцируемые пространствами $\mathbb{S}_{N\{k+1\}}$, $\mathbb{W}_{N\{k+1\}}$, $\mathbb{S}_N$ согласно формулам (6.5)–(6.7).

Перепишем формулы декомпозиции (6.10)–(6.11) в матричном виде:

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathbf{c}, \quad \mathbf{a} = \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathbf{c}; \tag{6.12}$$

формулы реконструкции могут быть представлены в форме

$$\mathbf{c} = \mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}\mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Применим к (6.12) матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$ и воспользуемся тем, что эта матрица является левой обратной для матрцы $\mathfrak{P}_{N\{k+1\}}$ (см. формулу (6.2)); в результате получаем

$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathbf{b} = \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathbf{c} - \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}}\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Итак, вектор $\mathbf{b}$ содержится в ядре $\ker\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$ оператора $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$, т.е. $\mathbf{b} \in \ker\, \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$.

С другой стороны, если некоторый вектор $\mathbf{b}^*$ лежит в ядре $\ker\, \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$, то при $\mathbf{c} = \mathbf{b}^*$ из (6.12) получаем $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, и из (6.7) следует, что $u \in \mathbb{W}_{N\{k+1\}}$. Обозначая линейный изоморфизм, определяемый формулами (6.5), (6.7) и (6.12), знаком $\sim$, имеем

$$\mathcal{A}_N \sim \mathbb{S}_{N\{k+1\}}, \quad \mathcal{B}_N \sim \mathbb{W}_{N\{k+1\}} \sim \ker\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}, \quad \mathcal{C}_N \sim \mathbb{S}_N.$$

7. Вариант сплайн-всплескового разложения

При удалении двух узлов ξ и η из сетки X_N получаем сетку $X_{N\{\xi,\eta\}}$. Нетрудно видеть, что пространство $\grave{\mathbb{S}}_N \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{S}(X_{N\{\xi,\eta\}},\varphi)$ и его координатные сплайны не зависят от порядка удаления узлов, и потому матрица $\mathfrak{P}$ представления координатных сплайнов полученного пространства через координатные сплайны исходного пространства $\mathbb{S}_N$ (т.е. матрица вложения) также не зависит от упомянутого порядка. Другое дело – матрица продолжения. Поскольку продолжение линейных функционалов на объемлющее пространство неединственно, то, вообще говоря, матрица продолжения (и тем самым – вэйвлетное разложение) варьируется в зависимости от способа продолжения функционалов (см. [3]); однако эта вариативность оказывается неудобной на практике. Наша задача состоит в том, чтобы определить условия, при которых упомянутая вариативность отсутствует.

Рассмотрим удаление узлов $\xi \stackrel{\text{def}}{=} x_{k+1}$ и $\eta \stackrel{\text{def}}{=} x_k$. Имеется два порядка удаления этих узлов: в первом случае сначала удаляется узел x_{k+1}, а затем – узел x_k, а во втором случае сначала удаляется узел x_k, а затем – узел x_{k+1}. Возникает вопрос: в каких условиях такое изменение порядка удаления узлов приведет к одному и тому же всплесковому представлению? Здесь получен ответ на этот вопрос.

Заметим, что фигурирующие дальше матрицы вложения и продолжения строятся аналогично тому, как это было сделано в четвертом и пятом разделах соответственно.

Из полученной ранее сетки $X_{N\{k+1\}}$ (см. (3.1)) удалим узел $\widetilde{x}_k$ (очевидно, что $\widetilde{x}_k = x_k$). После удаления этого узла получаем сетку

$$X_{N\{k,k+1\}}: \quad \widehat{x}_{-1} < \cdots < \widehat{x}_{N-1},$$

где

$$\widehat{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{x}_j = x_j \quad \text{при} \quad j \leqslant k-1, \quad \widehat{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{x}_{j+1} = x_{j+2} \quad \text{при} \quad j \geqslant k.$$

Положим

$$\widehat{S}_{-2} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1), \quad \widehat{S}_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{x}_0, \widehat{x}_1) \cup (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2),$$

$$\widehat{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s=j,j+1,j+2} (\widehat{x}_s, \widehat{x}_{s+1}) \quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, N-5\},$$

$$\widehat{S}_{N-4} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{x}_{N-4}, \widehat{x}_{N-3}) \cup (\widehat{x}_{N-3}, \widehat{x}_{N-2}), \quad \widehat{S}_{N-3} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{x}_{N-3}, \widehat{x}_{N-2}),$$

$$\widehat{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in I_{N-3}} (\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+1}).$$

Кроме введенных ранее цепочек векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{N-1}}$, $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j \in J_{N-2}}$ рассмотрим еще цепочку $\{\widehat{\mathbf{a}}_j\}_{j \in J_{N-3}}$, определяемую с помощью символического определителя

$$\widehat{\mathbf{a}}_j \stackrel{\text{def}}{=} = -\det \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_{j+1} & \widehat{\varphi}\,'_{j+1} \\ \det(\widehat{\varphi}_{j+2}, \widehat{\varphi}\,'_{j+2}, \widehat{\varphi}_{j+1}) & \det(\widehat{\varphi}_{j+2}, \widehat{\varphi}\,'_{j+2}, \widehat{\varphi}\,'_{j+1}) \end{pmatrix},$$

где $\widehat{\varphi}_{j+2} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\widehat{x}_{j+2})$, $\widehat{\varphi}\,'_{j+2} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi\,'(\widehat{x}_{j+2})$, а h_X считается столь малым, что рассматриваемые цепочки векторов полные, т.е.

$$\det(\mathbf{a}_{i-2}, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i) \neq 0 \quad \forall i \in I_{N-1},$$

$$\det(\widetilde{\mathbf{a}}_{j-2}, \widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}, \widetilde{\mathbf{a}}_j) \neq 0 \quad \forall j \in I_{N-2},$$

$$\det(\widehat{\mathbf{a}}_{s-2}, \widehat{\mathbf{a}}_{s-1}, \widehat{\mathbf{a}}_s) \neq 0 \quad \forall s \in I_{N-3}.$$

С использованием цепочки $\{\widehat{\mathbf{a}}_j\}_{j \in J_{N-3}}$ построим систему функций $\{\widehat{\omega}_j\}_{j \in J_{N-3}}$, отыскивая их из соотношений

$$\sum_{j \in J_{N-3}} \widehat{\mathbf{a}}_j \quad \widehat{\omega}_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in \widehat{G}, \quad \widehat{\omega}_i(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \widehat{G} \setminus \widehat{S}_i, \quad i \in J_{N-3}.$$

Поскольку построение системы $\{\widehat{\omega}_j\}_{j \in J_{N-3}}$ аналогично построению системы $\{\widetilde{\omega}_j\}_{j \in J_{N-2}}$, то, так же как и выше, для вектор-функции

$$\widehat{\omega}\,(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\omega}_j(t))_{j \in J_{N-3}}$$

получаем соотношение

$$\widehat{\omega}\,(t) = \mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}} \widetilde{\omega}\,(t), \tag{7.1}$$

где
$$\mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\widehat{\mathfrak{p}}_{i,j})_{i\in J_{N-3},j\in J_{N-2}}.$$

Теорема 8. *Элементы матрицы* $\mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}}$ *вычисляются согласно формулам*
$$\widehat{\mathfrak{p}}_{i,j} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i \leqslant k-4, \quad \forall j \in J_{N-2},$$
$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,k-3} = 1, \quad \widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,k-2} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k+1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k+1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-3}},$$
$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in J_{N-2}\setminus\{k-3,k-2\},$$
$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widehat{\mathbf{a}}_{k-2}}, \quad \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k+2}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k+2}\widehat{\mathbf{a}}_{k-2}},$$
$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in J_{N-2}\setminus\{k-2,k-1\},$$
$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k}}, \quad \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = 1,$$
$$\widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,j} = 0 \quad \textit{при} \quad j \in J_{N-2}\setminus\{k-1,k\},$$
$$\widehat{\mathfrak{p}}_{i,j} = \delta_{i,j-1} \quad \textit{при} \quad i \geqslant k, \quad \forall i \in J_{N-3},\ j \in J_{N-2};$$
здесь вектор-столбцы $\widetilde{\mathbf{b}}_i$ *определяются из тождеств*
$$\widetilde{\mathbf{b}}^T_i\mathbf{x} \equiv \det(\widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\varphi}'_i, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad i \in \{k-2,k-1,k+1,k+2\}.$$

Эта теорема аналогична теореме 2, так что доказательство опускаем.

Таким образом, матрица $\mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}}$ имеет вид

$$\mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}} \stackrel{\mathrm{def}}{=}$$
$$\begin{array}{c} \\ \widehat{-2} \\ \dots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \dots \\ \widehat{N-3} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} \widetilde{-2} & \dots & \widetilde{k-4} & \widetilde{k-3} & \widetilde{k-2} & \widetilde{k-1} & \widetilde{k} & \widetilde{k+1} & \dots & \widetilde{N-2} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & \widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2} & \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Аналогично тому, как это сделано в предыдущем разделе, построим матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}}$, а именно, рассмотрим систему функционалов $\{\widehat{g}_s\}_{s\in J_{N-3}} \in \mathfrak{G}_{k-1}(X_{N\{k+1\}},\varphi)$, биортогональную к системе функций $\{\widehat{\omega}_s\}_{s\in J_{N-3}}$, и положим

$$\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}} \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\mathfrak{q}}_{ij})_{i\in J_{N-3},\, j\in J_{N-2}},$$

где

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widehat{g}_i, \widetilde{\omega}_j\rangle \quad \forall i\in J_{N-3} \quad \forall j \in J_{N-2}.$$

Теорема 9. *В этом случае для чисел $\widehat{\mathfrak{q}}_{ij}$ верны соотношения*

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{ij} = \delta_{i,j} \quad \textit{при} \quad i\in J_{N-3},\ j \leqslant k-4,$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{ij} = \delta_{i+1,j} \quad \textit{при} \quad i\in J_{N-3},\ j \geqslant k+1,$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{i,k-3} = 0 \quad \textit{при} \quad i \in J_{N-3}, \quad (i\leqslant k-4)\vee(i\geqslant k+1), \quad \mathfrak{q}_{k-3,k-3}=1,$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-3} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-3}\widehat{\mathbf{a}}_{k-2}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-3}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-3}} - \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-3}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-3}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-3}}\,\frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widehat{\mathbf{a}}_{k-2}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}},$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-3} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k}\widetilde{\mathbf{a}}_{k}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-3}},$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{i,k-2} = 0 \quad \textit{при} \quad i\in J_{N-3}, \quad (i\leqslant k-3)\vee(i\geqslant k),$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widehat{\mathbf{a}}_{k-2}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}},$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}_{k}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}} - \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}_{k}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-2}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}}\,\frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k}}{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}},$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{i,k-1} = 0 \quad \textit{при} \quad i\in J_{N-3}, \quad (i\leqslant k-2)\vee(i\geqslant k+1),$$

$$\mathfrak{q}_{k-1,k-1} = \frac{\widetilde{\mathbf{b}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k}}{\mathbf{b}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}},$$

$$\widehat{\mathfrak{q}}_{i,k} = 0 \quad \forall i\in J_{N-3}, \quad \mathfrak{q}_{k,k-1} = 0.$$

Доказательсво данной теоремы аналогично доказательству теоремы 6; читатель легко его восстановит самостоятельно.

В результате получаем

$$\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\begin{array}{c} \\ \widehat{-2} \\ \dots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \dots \\ \widehat{N-3} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} \widetilde{-2} & \dots & \widetilde{k-4} & \widetilde{k-3} & \widetilde{k-2} & \widetilde{k-1} & \widetilde{k} & \widetilde{k+1} & \dots & \widetilde{N-2} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-3} & \widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-3} & \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} & \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Аналогично формуле (6.2) имеем

$$\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}} \mathfrak{P}^T_{N\{k,k+1\}} = I. \tag{7.2}$$

Рассмотрим произведение

$$\mathfrak{P}_N \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}} \mathfrak{P}_{N\{k+1\}}. \tag{7.3}$$

Согласно формулам (4.2), (7.1) и (7.3) находим

$$\widehat{\omega} = \mathfrak{P}_N \omega. \tag{7.4}$$

Теорема 10. *Для элементов* $\mathfrak{p}_{ij}$ *матрицы* $\mathfrak{P}_N$ *справедливы соотношения*

$$\mathfrak{p}_{k-3,k-2} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,k-2}, \quad \mathfrak{p}_{k-3,k-1} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-3,k-2} \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2},$$

$$\mathfrak{p}_{k-2,k-2} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2}, \quad \mathfrak{p}_{k-2,k} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k},$$

$$\mathfrak{p}_{k-2,k-1} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2} \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} + \widehat{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1},$$

$$\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1}, \quad \mathfrak{p}_{k-1,k} = \widehat{\mathfrak{p}}_{k-1,k} \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k},$$

$$\mathfrak{p}_{i,i} = 1 \quad \textit{при} \quad \forall i \leqslant k-3, \quad i \in J_{N-3},$$

$$\mathfrak{p}_{i-2,i} = 1 \quad \textit{при} \quad \forall i \geqslant k+1, \quad i \in J_{N-3};$$

неперечисленные здесь элементы матрицы $\mathfrak{P}_N$ *равны нулю.*

Доказательство этой теоремы сводится к перемножению матриц (см. формулу (7.3)).

Результат транспонирования матрицы $\mathfrak{P}_N$ имеет вид

$$\mathfrak{P}^T_N \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} \widehat{-2} & \dots & \widehat{k-4} & \widehat{k-3} & \widehat{k-2} & \widehat{k-1} & \widehat{k} & \widehat{k+1} & \dots & \widehat{N-3} \end{array} \\
\begin{array}{c} -2 \\ \dots \\ k-4 \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ k+3 \\ \dots \\ N-1 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \mathfrak{p}_{k-3,k-2} & \mathfrak{p}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \mathfrak{p}_{k-3,k-1} & \mathfrak{p}_{k-2,k-1} & \mathfrak{p}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \mathfrak{p}_{k-2,k} & \mathfrak{p}_{k-1,k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Рассмотрим произведение $\mathfrak{Q}'$ матриц $\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}}$ и $\mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}$:

$$
\mathfrak{Q}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}} \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}}. \tag{7.5}
$$

Обозначая элементы матрицы $\mathfrak{Q}'$ через $\mathfrak{q}_{ij}$, имеем

$$
\mathfrak{q}_{k-2,k-3} = \widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-3}, \quad \mathfrak{q}_{k-2,k-2} = \widehat{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2},
$$

$$
\mathfrak{q}_{k-1,k-3} = \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-3}, \quad \mathfrak{q}_{k-1,k-2} = \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} + \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} \widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2},
$$

$$
\mathfrak{q}_{k-1,k-1} = \widehat{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} \widetilde{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1},
$$

$$
\mathfrak{q}_{i,i} = 1 \quad \forall i \leqslant k-3, \quad i \in J_{N-3}; \quad \mathfrak{q}_{i,i+2} = 1 \quad \forall i \geqslant k, \quad i \in J_{N-3};
$$

неперечисленные здесь элементы матрицы $\mathfrak{Q}'$ равны нулю.

Таким образом,

$$
\mathfrak{Q}' \stackrel{\mathrm{def}}{=}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} -2 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & N-1 \end{array} \\
\begin{array}{c} \widehat{-2} \\ \dots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \widehat{k+1} \\ \dots \\ \widehat{N-3} \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \mathfrak{q}_{k-2,k-3} & \mathfrak{q}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \mathfrak{q}_{k-1,k-3} & \mathfrak{q}_{k-1,k-2} & \mathfrak{q}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Используя свойства (6.2) и (7.2), получаем

$$
\mathfrak{Q}_{N\{k,k+1\}} \mathfrak{Q}_{N\{k+1\}} \mathfrak{P}^T_{N\{k+1\}} \mathfrak{P}^T_{N\{k,k+1\}} = I,
$$

так что из (7.3) и (7.5) имеем

$$\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{P}_N^T = I. \tag{7.6}$$

8. Изменение порядка элементарных операций

Теперь из сетки X_N удалим узлы в обратном порядке: сначала удалим узел x_k, а затем – узел x_{k+1}. После удаления узла x_k получаем сетку

$$X_{N\{k\}}:\quad \grave{\tilde{x}}_{-1} < \dots < \grave{\tilde{x}}_{k-1} < \grave{\tilde{x}}_{k} < \grave{\tilde{x}}_{k+1} < \dots < \grave{\tilde{x}}_{N-1} < \grave{\tilde{x}}_{N},$$

где

$$\grave{\tilde{x}}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \ \text{ при } \ j \leqslant k-1, \quad \grave{\tilde{x}}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} \ \text{ при } \ j \geqslant k,\ j \in \{-1, 0, \dots, N\}.$$

Аналогично предыдущему введем сокращенные обозначения

$$\grave{\tilde{\varphi}}_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\grave{\tilde{x}}_s), \quad \grave{\tilde{\varphi}}{}'_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(\grave{\tilde{x}}_s), \quad \grave{\tilde{\varphi}}{}''_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi''(\grave{\tilde{x}}_s), \quad s \in \{-1, 0, \dots, N\},$$

и определим вектор-столбец $\grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j$, $j \in J_{N-2}$, с помощью символического определителя

$$\grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j \stackrel{\text{def}}{=} -\det \begin{pmatrix} \grave{\tilde{\varphi}}_{j+1} & \grave{\tilde{\varphi}}{}'_{j+1} \\ \det(\grave{\tilde{\varphi}}_{j+2}, \grave{\tilde{\varphi}}{}'_{j+2}, \grave{\tilde{\varphi}}_{j+1}) & \det(\grave{\tilde{\varphi}}_{j+2}, \grave{\tilde{\varphi}}{}'_{j+2}, \grave{\tilde{\varphi}}{}'_{j+1}) \end{pmatrix}.$$

Дальше h_X считается столь малым, чтобы все рассматриваемые цепочки векторов $\mathbf{a}_j$, $\widetilde{\mathbf{a}}_j$, $\widehat{\mathbf{a}}_j$ и $\grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j$ были полными; в частности, предполагается, что выполнены соотношения

$$\det(\grave{\tilde{\mathbf{a}}}_{j-2}, \grave{\tilde{\mathbf{a}}}_{j-1}, \grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j) \neq 0 \quad \forall j \in I_{N-2}.$$

Полагая

$$\begin{aligned}
\grave{\tilde{S}}_{-2} &\stackrel{\text{def}}{=} (\grave{\tilde{x}}_0, \grave{\tilde{x}}_1), \quad \grave{\tilde{S}}_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (\grave{\tilde{x}}_0, \grave{\tilde{x}}_1) \cup (\grave{\tilde{x}}_1, \grave{\tilde{x}}_2), \\
\grave{\tilde{S}}_j &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s=j,j+1,j+2} (\grave{\tilde{x}}_s, \grave{\tilde{x}}_{s+1}) \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N-4\}, \\
\grave{\tilde{S}}_{N-3} &\stackrel{\text{def}}{=} (\grave{\tilde{x}}_{N-3}, \grave{\tilde{x}}_{N-2}) \cup (\grave{\tilde{x}}_{N-2}, \grave{\tilde{x}}_{N-1}), \quad \grave{\tilde{S}}_{N-2} \stackrel{\text{def}}{=} (\grave{\tilde{x}}_{N-2}, \grave{\tilde{x}}_{N-1}), \\
\grave{\tilde{G}} &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in I_{N-2}} (\grave{\tilde{x}}_j, \grave{\tilde{x}}_{j+1}),
\end{aligned}$$

определим функции $\grave{\tilde{\omega}}_j$ для сетки $X_{N\{k+1\}}$ из аппроксимационных соотношений

$$\sum_{j\in J_{N-2}} \grave{\tilde{\mathbf{a}}}_j \grave{\tilde{\omega}}_j(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in \grave{\tilde{G}},$$

$$\grave{\tilde{\omega}}_i(t) = 0 \quad \forall t \in \grave{\tilde{G}} \setminus \grave{\tilde{S}}_i, \quad i \in J_{N-2}.$$

Для вектор-функций $\omega(t)$, $\widehat{\omega}(t)$ и $\grave{\tilde{\omega}}(t) \overset{\text{def}}{=} (\grave{\tilde{\omega}}_j(t))_{j\in J_{N-2}}$ получаем соотношения

$$\grave{\tilde{\omega}}(t) = \mathfrak{P}_{N\{k\}}\omega(t), \quad \widehat{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{N\{k+1,k\}}\grave{\tilde{\omega}}(t);$$

отсюда

$$\widehat{\omega}(t) = \mathfrak{P}_{N\{k+1,k\}}\mathfrak{P}_{N\{k\}}\omega(t). \tag{8.1}$$

Представления элементов матриц $\mathfrak{P}_{N\{k+1,k\}}$ и $\mathfrak{P}_{N\{k\}}$ могут быть выписаны аналогично тому, как это сделано в теоремах 2 и 8 для матриц $\mathfrak{P}_{N\{k,k+1\}}$ и $\mathfrak{P}_{N\{k+1\}}$; однако конкретные их представления опустим, ибо в дальнейшем они не потребуются.

Ввиду однозначности представления векторов в координатных системах $\{\omega_i\}_{i\in J_{N-1}}$ и $\{\widehat{\omega}_j\}_{j\in J_{N-3}}$ из (7.4) и (8.1) получаем

$$\mathfrak{P}_N = \mathfrak{P}_{N\{k+1,k\}}\mathfrak{P}_{N\{k\}}. \tag{8.2}$$

Построим матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k\}}$, а именно, рассмотрим систему функционалов $\{\grave{\tilde{g}}_s\}_{s\in J_{N-2}} \in \mathfrak{G}_{\{k-1\}}(X_N, \varphi)$ и положим

$$\mathfrak{Q}_{\{k\}} \overset{\text{def}}{=} (\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij}),$$

где

$$\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij} \overset{\text{def}}{=} \langle \grave{\tilde{g}}_i, \omega_j\rangle, \quad i \in J_{N-2}, \quad j \in J_{N-1}.$$

Аналогично теореме 6 можно получить представления элементов $\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij}$. В частности, справедливо следующее утверждение.

Теорема 11. *Если $\{\grave{\tilde{g}}_s\}_{s\in J_{N-2}} \in \mathfrak{G}_{k-1}(X_N, \varphi)$, то для чисел $\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij}$ (где $i \in J_{N-2}, j \in J_{N-1}$), верны соотношения*

$$\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{при} \quad i \leqslant k-3 \quad \forall j \in J_{N-2},$$

$$\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{ij} = \delta_{i,j-1} \quad \text{при} \quad i \geqslant k \quad \forall j \in J_{N-2},$$

$$\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,j} = 0 \quad \forall j \in \setminus\{k-3, k-2\},$$

$$\grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,j} = 0 \quad \forall j \in \setminus\{k-3, k-2, k-1\}.$$

Итак,

$$\mathfrak{Q}_{N\{k\}} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\begin{array}{c} \\ \grave{\widetilde{-2}} \\ \dots \\ \grave{\widetilde{k-4}} \\ \grave{\widetilde{k-3}} \\ \grave{\widetilde{k-2}} \\ \grave{\widetilde{k-1}} \\ \grave{\widetilde{k}} \\ \dots \\ \grave{\widetilde{N-2}} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} -2 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & \dots & N-1 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-3} & \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-3} & \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-2} & \grave{\tilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} \end{array}.$$

Аналогичным образом построим матрицу $\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}$, а именно, рассмотрим систему функционалов $\{\grave{\widehat{g}}_s\}_{s\in J_{N-3}} \in \mathfrak{G}_{\{k-1\}}(X_{N\{k\}},\varphi)$ и положим

$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}} \stackrel{\text{def}}{=} (\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{ij}),$$

где

$$\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \grave{\widehat{g}}_i, \grave{\widetilde{\omega}}_j \rangle, \quad i \in J_{N-3}, \quad j \in J_{N-2}.$$

Аналогично теореме 9 устанавливается следующее утверждение.

Теорема 12. *Если* $\{\grave{\widehat{g}}_s\}_{s\in J_{N-3}} \in \mathfrak{G}_{k-1}(X_{N\{k\}},\varphi)$, *то для чисел* $\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{ij}$ *верны соотношения*

$$\begin{aligned}
\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{ij} &= \delta_{ij} \quad \textit{при} \quad i \leqslant k-3, \quad j \in J_{N-2}; \\
\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{ij} &= \delta_{i,j-1} \quad \textit{при} \quad i \geqslant k, \quad j \in J_{N-2}; \\
\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-2,j} &= 0 \quad \forall j \in J_{N-2} \setminus \{k-3, k-2\}; \\
\grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,j} &= 0 \quad \forall j \in J_{N-2} \setminus \{k-3, k-2, k-1\}.
\end{aligned}$$

Матрица $\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}$ может быть представлена в форме

$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} \grave{\widetilde{-2}} & \dots & \grave{\widetilde{k-4}} & \grave{\widetilde{k-3}} & \grave{\widetilde{k-2}} & \grave{\widetilde{k-1}} & \grave{\widetilde{k}} & \grave{\widetilde{k+1}} & \dots & \grave{\widetilde{N-1}} \end{matrix} \\
\begin{matrix} \widehat{-2} \\ \dots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \dots \\ \widehat{N-3} \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-3} & \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-3} & \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-2} & \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Замечание 2. Элементы матриц $\mathfrak{Q}_{N\{k\}}$ и $\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}$, не указанные в теоремах 11 и 12, могут быть представлены формулами, аналогичными формулам, фигурирующим в теоремах 6 и 9, однако эти представления в дальнейшем нам не понадобятся.

Аналогично свойствам (6.2) и (7.2) имеем

$$\mathfrak{Q}_{N\{k\}}\mathfrak{P}^T_{N\{k\}} = I, \qquad \mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}\mathfrak{P}^T_{N\{k+1,k\}} = I,$$

так что

$$\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}\mathfrak{Q}_{N\{k\}}\mathfrak{P}^T_{N\{k\}}\mathfrak{P}^T_{N\{k+1,k\}} = I.$$

Для произведения $\mathfrak{Q}'' \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}\mathfrak{Q}_{N\{k\}}$ из (8.2) теперь получаем

$$\mathfrak{Q}''\mathfrak{P}^T_N = I. \tag{8.3}$$

Теорема 13. *Для элементов $\grave{\mathfrak{q}}_{ij}$ матрицы $\mathfrak{Q}''$ справедливы соотношения*

$$
\begin{aligned}
\grave{\mathfrak{q}}_{ij} &= \delta_{ij} \quad \textit{при} \quad i \leqslant k-3 \quad \forall j \in J_{N-1}, \\
\grave{\mathfrak{q}}_{ij} &= \delta_{i,j-1} \quad \textit{при} \quad i \geqslant k \quad \forall j \in J_{N-1}, \\
\grave{\mathfrak{q}}_{k-2,j} &= 0 \quad \forall j \in J_{N-1} \setminus \{k-3, k-2\}, \\
\grave{\mathfrak{q}}_{k-1,j} &= 0 \quad \forall j \in J_{N-1} \setminus \{k-3, k-2, k-1\}, \\
\grave{\mathfrak{q}}_{k-2,k-3} &= \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-3} + \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2}\grave{\widetilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-3}, \\
\grave{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2} &= \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2}\grave{\widetilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2}, \\
\grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-3} &= \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-1} + \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-2}\grave{\widetilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-3} + \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1}\grave{\widetilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-3}, \\
\grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} &= \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-2}\grave{\widetilde{\mathfrak{q}}}_{k-2,k-2} + \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1}\grave{\widetilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-2}, \\
\grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} &= \grave{\widehat{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1}\grave{\widetilde{\mathfrak{q}}}_{k-1,k-1}.
\end{aligned}
$$

Доказательство сводится к перемножению матриц $\mathfrak{Q}_{N\{k+1,k\}}$ и $\mathfrak{Q}_{N\{k\}}$.

Таким образом, матрицу $\mathfrak{Q}''$ можно представить в виде

$$\mathfrak{Q}''\stackrel{\mathrm{def}}{=}$$

$$\begin{array}{c}
\\
\widehat{-2}\\
\dots\\
\widehat{k-4}\\
\widehat{k-3}\\
\widehat{k-2}\\
\widehat{k-1}\\
\widehat{k}\\
\widehat{k+1}\\
\dots\\
\widehat{N-3}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
-2 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & N-1
\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccccccccccc}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & \grave{\mathfrak{q}}_{k-2,k-3} & \grave{\mathfrak{q}}_{k-2,k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & \grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-3} & \grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-2} & \grave{\mathfrak{q}}_{k-1,k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
\end{array}.$$

Рассматривая матрицы $\mathfrak{Q}'$ и $\mathfrak{Q}''$, замечаем, что они имеют одинаковую структуру.

Лемма 2. *В представлении*

$$\omega_i(t) \equiv \sum_{j=i}^{i+3} \mathfrak{p}_{ij}\widehat{\omega}_j(t) \tag{8.4}$$

коэффициент $\mathfrak{p}_{ii}$ *отличен от нуля.*

Доказательство. Предполагая противное и учитывая расположение носителей функций ω_i и $\widehat{\omega}_j$, приходим к выводу, что носитель правой части тождества (8.4) не содержит интервал $(\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+1})$, в то время как носитель левой части его содержит. Полученное противоречие доказывает утверждение. $\square$

Теорема 14. *Уравнение*

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_N^T = I, \tag{8.5}$$

рассматриваемое относительно неизвестной матрицы $\mathfrak{Q}$ *со структурой*

$$\mathfrak{Q}\stackrel{\mathrm{def}}{=}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} -2 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & N-1 \end{array} \\
\begin{array}{c} \widehat{-2} \\ \dots \\ \widehat{k-4} \\ \widehat{k-3} \\ \widehat{k-2} \\ \widehat{k-1} \\ \widehat{k} \\ \widehat{k+1} \\ \dots \\ \widehat{N-3} \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccccc}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right),
\end{array}
$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Из соотношения (8.5) находим уравнения для отыскания неизвестных $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathfrak{p}_{k-3,k-2} = 0, \quad \mathbf{B}\mathfrak{p}_{k-2,k-2} = 1,$$

$$\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathfrak{p}_{k-3,k-2} + \mathbf{E}\mathfrak{p}_{k-3,k-1} = 0,$$

$$\mathbf{D}\mathfrak{p}_{k-2,k-2} + \mathbf{E}\mathfrak{p}_{k-2,k-1} = 0, \quad \mathbf{E}\mathfrak{p}_{k-1,k-1} = 1.$$

Принимая во внимание лемму 3, получаем

$$\mathbf{B} = 1/\mathfrak{p}_{k-2,k-2}, \quad \mathbf{A} = -\mathfrak{p}_{k-3,k-2}/\mathfrak{p}_{k-2,k-2}, \quad \mathbf{E} = 1/\mathfrak{p}_{k-1,k-1},$$

$$\mathbf{D} = -\mathfrak{p}_{k-2,k-1}/(\mathfrak{p}_{k-1,k-1}\mathfrak{p}_{k-2,k-2}),$$

$$\mathbf{C} = \mathfrak{p}_{k-3,k-2}\mathfrak{p}_{k-2,k-1}/(\mathfrak{p}_{k-1,k-1}\mathfrak{p}_{k-2,k-2}) - \mathfrak{p}_{k-3,k-1}/\mathfrak{p}_{k-1,k-1}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 2. *Рассматриваемое сплайн-всплесковое представление не зависит от порядка удаления узлов x_k и x_{k+1} сетки X_N.*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим соотношения (7.6) и (8.3). Ввиду теоремы 12 имеем $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}'' = \mathfrak{Q}$. Заметим, что согласно (7.3) и (8.2)

$$\mathfrak{P}_{\{k,k+1\}}\mathfrak{P}_{\{k+1\}} = \mathfrak{P}_{\{k,k+1\}}\mathfrak{P}_{\{k+1\}} = \mathfrak{P}_N.$$

Следствие доказано. □

Литература

1. Ю. К. Демьянович, О. М. Косогоров, *Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов.* — Пробл. матем. анализа **43** (2009), 3–19.
2. Ю. К. Демьянович, *Негладкие сплайн-вэйвлетные разложения и их свойства.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **395** (2012), 31–60.
3. Ю. К. Демьянович, *Теория сплайн-всплесков.* СПб., 2013, 526 с.

Dem'yanovich Yu. K., Vager B. G. Spline-wavelet decomposition on an interval.

For the second-order spline-wavelet representations on an interval, the conditions under which decomposition operators are independent of the order of elementary operations are established. The notion of k-localized systems of functionals is introduced, and the operator set in which the embedding operator possesses a unique left inverse is studied.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Yuri.Demjanovich@gmail.com

Поступило 5 ноября 2014 г.

С.-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург
E-mail: bgvager@mail.ru