Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Е. Г. Голузина

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§1. Основные результаты

Пусть T – класс функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, т.е. удовлетворяющих в U условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

В настоящей работе в классе T получены точные оценки коэффициентов c_3 и c_4, зависящие от $f(r)$, $0 < r < 1$. При этом использованы интегральное представление класса T [1, 2] и полученные в [3] результаты для множеств значений систем коэффициентов в классах функций, представимых интегралом Стилтьеса.

Пусть $\rho = r + \frac{1}{r}$.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots \in T$ *и* $0 < r < 1$. *Тогда справедливы точные оценки*:

$$f(r)(\rho^2 - 4) - \rho \leqslant c_2 \leqslant \rho - \frac{1}{f(r)}, \quad f(r) \in \left[\frac{1}{\rho+2}, \frac{1}{\rho-2}\right]; \tag{1}$$

$$\frac{1}{\rho - c_2} \leqslant f(r) \leqslant \frac{\rho + c_2}{\rho^2 - 4}, \quad c_2 \in [-2, 2]. \tag{2}$$

Равенство в (1) *слева имеет место для функции*

$$f_1(z) = \frac{z[f(r)(\rho^2-4) - \rho + 2]}{4(1-z)^2} + \frac{z[\rho + 2 - f(r)(\rho^2 - 4)]}{4(1+z)^2},$$

а в (1) *справа – для функции*

$$f_2(z) = \frac{z}{1 + z^2 - 2z(\rho - \frac{1}{f(r)})}.$$

Равенство в (2) *слева имеет место для функции*

$$f_3(z) = \frac{z}{1 - c_2 z + z^2},$$

Ключевые слова: типично вещественная функция, оценки коэффицентов.

а в (2) *справа – для функции*

$$f_4(z) = \frac{2+c_2}{4}\cdot\frac{z}{(1-z)^2} + \frac{2-c_2}{4}\cdot\frac{z}{(1+z)^2}.$$

Теорема 2. *Пусть* $f(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \cdots \in T$ *и* $0 < r < 1$. *Если* $\rho \geqslant 6$, *то имеют место точные оценки*:

$$\left(\rho - \frac{1}{f(r)}\right)^2 - 1 \leqslant c_3 \leqslant 3, \quad f(r) \in \left[\frac{1}{\rho+2}, \frac{1}{\rho-2}\right]; \tag{3}$$

$$\frac{1}{\rho+\sqrt{c_3+1}} \leqslant f(r) \leqslant \frac{1}{\rho-\sqrt{c_3+1}}, \quad c_3 \in [-1,3]. \tag{4}$$

Если $\rho < 6$, *то имеют место точные оценки*

$$c_3 \leqslant 3,$$

$$c_3 \geqslant \left(\rho - \frac{1}{f(r)}\right)^2 - 1 \quad \textit{при} \quad f(r) \in \left[\frac{1}{\rho+2}, \frac{2}{\rho+2}\right], \tag{5}$$

$$c_3 \geqslant 3 - \frac{(\rho+2)^2}{4} + \frac{(\rho+2)^2(\rho-2)}{4}f(r)$$

$$\textit{при} \quad f(r) \in \left[\frac{2}{\rho+2}, \frac{1}{\rho-2}\right]; \tag{6}$$

$$f(r) \geqslant \frac{1}{\rho+\sqrt{c_3+1}} \quad \textit{при} \quad c_3 \in [-1,3], \tag{7}$$

$$f(r) \leqslant \frac{1}{\rho-\sqrt{c_3+1}} \quad \textit{при} \quad c_3 \in \left[-1, \frac{\rho^2}{4} - \rho\right], \tag{8}$$

$$f(r) \leqslant \frac{4[c_3 - 3 + (\rho+2)^2\frac{1}{4}]}{(\rho+2)^2(\rho-2)} \quad \textit{при} \quad c_3 \in \left[\frac{\rho^2}{4} - \rho, 3\right]. \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$x_1 = \frac{2(\rho+1) - \sqrt{\rho^2+2\rho-2}}{\rho^2+2\rho+2},$$

$$x_2 = \frac{2(\rho-1) - \sqrt{\rho^2-2\rho-2}}{\rho^2+2-2\rho},$$

$$x_3 = \frac{2(\rho+1) + \sqrt{\rho^2+2\rho-2}}{\rho^2+2\rho+2},$$

$$\varphi(x) = \left(\rho - \frac{1}{x}\right)^3 - 2\left(\rho - \frac{1}{x}\right), \quad x = f(r),$$

$$\varphi_j(x) = (-1)^{j-1}4 + \frac{[y_j + (-1)^j 4][x(\rho + (-1)^j 2) - 1]}{x_j[\rho + (-1)^j 2] - 1},$$

$$y_j = \varphi(x_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Теорема 3. *Пусть* $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n \in T$ *и* $0 < r < 1$, $x = f(r)$. *Если* $\rho \geqslant \frac{11}{3}$, *то имеют место точные оценки*:

$$c_4 \leqslant \varphi(x) \quad \textit{при} \quad x \in \left[\frac{1}{\rho + 2}, \quad x_1\right], \tag{10}$$

$$c_4 \leqslant \varphi_1(x) \quad \textit{при} \quad x \in \left[x_1, \ \frac{1}{\rho - 2}\right], \tag{11}$$

$$c_4 \geqslant \varphi_2(x) \quad \textit{при} \quad x \in \left[\frac{1}{\rho + 2}, \ x_2\right], \tag{12}$$

$$c_4 \geqslant \varphi(x) \quad \textit{при} \quad x \in \left[x_2, \quad \frac{1}{\rho + 2}\right]. \tag{13}$$

Если $2\sqrt{2} < \rho < \frac{11}{3}$, *то имеют место точные оценки* (10)–(12) *и точные оценки*

$$c_4 \geqslant \varphi(x) \quad \textit{при} \quad x \in [x_2, x_3] \tag{14}$$

и

$$c_4 \geqslant \varphi_3(x) \quad \textit{при} \quad x \in \left[x_3, \frac{1}{\rho - 2}\right]. \tag{15}$$

Если $\rho \leqslant 2\sqrt{2}$, *то имеют место точные оценки* (10)–(11) *и точная оценка*

$$c_4 \geqslant 2(\rho^2 - 4)x - 2\rho \quad \textit{при} \quad x \in \left[\frac{1}{\rho + 2}, \frac{1}{\rho - 2}\right]. \tag{16}$$

§2. Доказательства

Оценки (2) установлены в [4]. Оценки (1) и (2) следуют из теоремы 3 в [3].

Для класса T имеет место интегральное представление

$$f(z) \in T \Longleftrightarrow f(z) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{z}{1 - 2tz + z^2}\, d\mu(t), \quad \mu(t) \in M_1, \tag{17}$$

где M_1 – класс функций, неубывающих на $[-1,1]$ и удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} d\mu(t) = 1$.

Из (17) получаем

$$f(r) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\mu(t)}{\rho - 2t}, \quad c_2 = \int\limits_{-1}^{1} 2t\,d\mu(t), \quad c_3 = \int\limits_{-1}^{1} (4t^2-1)\,d\mu(t),$$

$$c_4 = \int\limits_{-1}^{1} (8t^3 - 4t)\,d\mu(t), \quad \mu \in M_1.$$

Из полученных в [3] общих результатов следует, что D_3 – множество значений системы $\{f(r), c_3\}$ на классе T – совпадает с выпуклой оболочкой кривой

$$l = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = \psi(x), \quad x \in \left[\frac{1}{\rho+2}, \frac{1}{\rho-2}\right]\right\},$$

где $\psi(x) = (\rho - \frac{1}{x})^2 - 1$, $x = f(r)$, $y = c_3$.

Заметим, что

$$\psi''_{x^2} = \frac{6 - 4\rho x}{x^4}, \quad \psi''_{x^2}\left(\frac{3}{2\rho}\right) = 0.$$

Если $\rho \geqslant 6$, то $\frac{3}{2\rho} \geqslant \frac{1}{\rho-2}$. Поэтому в случае $\rho \geqslant 6$ имеем $\partial D_3 = l_1 \cup l_2$. Здесь и далее,

$$l_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = \psi(x), \quad x \in \left[\frac{1}{\rho+2}, \frac{1}{\rho-2}\right]\right\},$$
$$l_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = 3, \quad x \in \left[\frac{1}{\rho+2}, \frac{1}{\rho-2}\right[\right\}.$$

В случае $\rho < 6$ для нахождения точки x_0 – точки касания прямой

$$y = 2\left(\rho - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{\rho-2}\right)\frac{1}{x^2} + 3$$

с кривой l – имеем уравнение

$$\psi(x) = \psi'(x)\left(x - \frac{1}{\rho-2}\right) + 3,$$

т.е.

$$\left(\rho-\frac{1}{x}\right)^2-1=2\left(\rho-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{\rho-2}\right)\frac{1}{x^2}+3.$$

Запишем последнее уравнение в виде

$$\left(x-\frac{1}{\rho-2}\right)^2\left(x-\frac{2}{\rho+2}\right)=0.$$

Получаем $x_0=\frac{2}{\rho+2}$. Итак, при $\rho<6$ имеем $\partial D_3=l_2\cup l_3\cup l_4$. Здесь и далее,

$$l_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=\psi(x),\quad x\in\left[\frac{1}{\rho+2},\frac{2}{\rho+2}\right]\right\},$$
$$l_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=3+\frac{(\rho+2)^2}{4}[x(\rho-2)-1],\ x\in\left[\frac{2}{\rho+2},\frac{1}{\rho-2}\right]\right\}.$$

Множество D_4 значений системы $\{f(r),c_4\}$ в классе T совпадает с выпуклой оболочкой кривой

$$L=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad y=\varphi(x),\quad x\in\left[\frac{1}{\rho+2},\frac{1}{\rho-2}\right]\right\},$$

где $\varphi(x)=\left(\rho-\frac{1}{x}\right)^3-2\left(\rho-\frac{1}{x}\right)$, $x=f(r)$, $y=c_4$.

Имеем

$$\varphi''_{x^2}=\frac{1}{x^5}[2(2-3\rho^2)x^2-18\rho x+12]$$

и

$$\varphi''_{x^2}(x_\pm)=0\quad\text{при}\quad x_\pm=\frac{9\rho\pm\sqrt{9\rho^2+48}}{2(3\rho^2-2)}.$$

Так как $x_+\geqslant\frac{1}{\rho-2}$, если $\rho\geqslant\frac{11}{3}$, то при $\rho\geqslant\frac{11}{3}$ имеем

$$\partial D_4=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4.$$

Здесь и далее,

$$L_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \varphi(x), \quad x \in \left[\frac{1}{\rho+2}, x_1 \right] \right\},$$
$$L_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \varphi(x), \quad x \in \left[x_2, \frac{1}{\rho-2} \right] \right\},$$
$$L_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 4 + (4 - y_1) \frac{x(\rho-2)-1}{1-x_1(\rho-2)}, \ x \in \left[x_1, \frac{1}{\rho-2} \right] \right\},$$
$$L_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -4 - (4 + y_2) \frac{x(\rho+2)-1}{1-x_2(\rho+2)}, \ x \in \left[\frac{1}{\rho+2}, x_2 \right] \right\}.$$

Для нахождения точек x_1 и x_2 – точек касания прямых

$$y = \varphi'(x) \left(x - \frac{1}{\rho \mp 2} \right) \pm 4$$

с кривой L – имеем уравнение

$$\left(\rho - \frac{1}{x} \right)^3 - 2 \left(\rho - \frac{1}{x} \right) = \left[3 \left(\rho - \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \right] \frac{1}{x^2} \left(x - \frac{1}{(\rho \pm 2} \right) \pm 4.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\left(x - \frac{1}{\rho \mp 2} \right)^2 [x^2(\rho^2 \pm 2\rho + 2) - 4x(\rho \pm 1) + 3] = 0$$

и найдем x_1 и x_2.

Если $2\sqrt{2} < \rho < \frac{11}{3}$, то

$$\partial D_4 = L_1 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6.$$

Здесь

$$L_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = \varphi(x), \quad x \in [x_2, x_3]\},$$
$$L_6 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4 + \frac{(4-y_3)[x(\rho-2)-1)}{1-x_3(\rho-2)}, \quad x \in \left[x_3, \frac{1}{\rho-2} \right] \right\}$$

В случае $2\sqrt{2} < \rho < \frac{11}{3}$ для нахождения точки x_3 – точки касания прямой

$$y = \varphi'(x) \left(x - \frac{1}{\rho-2} \right) + 4$$

с кривой L – имеем уравнение

$$\left(x-\frac{1}{\rho-2}\right)^2[x^2(\rho^2+2\rho+2)-4x(\rho+1)+3]=0, \quad x_3\in\left(\frac{1}{\rho-\frac{\sqrt{2}}{3}},\frac{1}{\rho-2}\right).$$

Если $\rho\leqslant 2\sqrt{2}$, то $\partial D_4=L_1\cup L_3\cup L_7$. Здесь

$$L_7=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad y=2(\rho^2-4)x-2\rho, \quad x\in\left[\frac{1}{\rho+2},\frac{1}{\rho-2}\right]\right\}.$$

Из сказанного выше нетрудно получить оценки (3)–(16).

Точкам на l_1 и l_3 соответствуют функции

$$f(z)=\frac{1}{\zeta-(\rho-\frac{1}{x})},$$

точкам на l_2 – функции

$$f(z)=\frac{\lambda_1}{\zeta-2}+\frac{\lambda_2}{\zeta+2}, \quad \lambda_1,\lambda_2\geqslant 0, \quad \lambda_1+\lambda_2=1,$$

а точкам на l_4 – функции

$$f(z)=\frac{1}{\zeta-2}\cdot\frac{(\rho-2)[-1+x(\rho+2)]}{4}+\frac{1}{\zeta-(\frac{\rho}{2}-1)}\cdot\frac{[1-x(\rho-2)](\rho+2)}{4},$$

$$\zeta=z+\frac{1}{z}.$$

Точкам на L_1, L_2 и L_5 соответствуют функции

$$f(z)=\frac{z}{1+z^2-z(\rho-\frac{1}{x})},$$

а точкам на L_3 и L_6 – функции

$$f(z)=\frac{1}{\zeta-2}\cdot\frac{(\rho-2)(1-\frac{x}{x_j})}{\rho-\frac{1}{x_j}-2}+\frac{1}{\zeta-\rho+\frac{1}{x_j}}\cdot\frac{x(\rho-2)-1}{x_j(\rho-\frac{1}{x_j}-2)},$$

$$j=1 \quad (\text{для } L_3) \quad \text{и} \quad j=3 \quad (\text{для } L_6), \quad \zeta=z+\frac{1}{z}.$$

Точкам на L_4 соответствуют функции

$$f(z)=\frac{1}{\zeta+2}\cdot\frac{(\rho+2)(1-\frac{x}{x_2})}{\rho-\frac{1}{x_2}+2}+\frac{1}{\zeta-\rho+\frac{1}{x_2}}\cdot\frac{[x(\rho+2)-1]}{x_2(\rho-\frac{1}{x_2}+2)},$$

а точкам на L_7 – функции

$$f(z)=\frac{(\rho-2)[x(\rho+2)-1]}{4(\zeta-2)}+\frac{[1-x(\rho-2)](\rho+2)}{4(\zeta+2)}, \quad \zeta=z+\frac{1}{z}.$$

Равенство в (7) и (8) соответственно имеет место для функций

$$\frac{z}{1+z^2+z\sqrt{c_3+1}} \quad \text{и} \quad \frac{z}{1+z^2-z\sqrt{c_3+1}},$$

а в (9) – для функции

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}\cdot\frac{\rho^2-4(\rho+c_3)}{(\rho+2)(\rho-6)}+\frac{z}{1+z^2-z\left(\frac{\rho}{2}-1\right)}\cdot\frac{4(c_3-3)}{(\rho+2)(\rho-6)}.$$

□

Литература

1. M. S. Robertson, *On the coefficients of a typically-real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 565–572.
2. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях.* — Мат. сб. **27 (69)** (1950), 201–218.
3. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффицентов функций, представимых суммой интегралов Стильтьеса.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.
4. J. A. Jenkins, *Some problems for typically real functions.* — Canad. J. Math. **13** (1961), 427–431.

Goluzina E. G. Some sharp estimates for typically real functions.

Let T be the class of functions $f(z) = z + \sum\limits_{n=r}^{\infty} c_n z^n$ regular and typically real in the disk $|z| < 1$. Sharp estimates for the coefficients c_3 and c_4 in terms of the values $f(r)$, $0 < r < 1$, are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург, Россия
E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 17 ноября 2014 г.