Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова

ГРАФЫ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬЮ

§1. Введение

Бинарные отношения на ассоциативных кольцах, в частности, на матричной алгебре, являются важным предметом исследований современной математики, активно используемым в многочисленных приложениях. На сегодняшний день эффективным способом исследовать данное отношение является изучение так называемого *графа отношения*, вершинами которого являются элементы некоторого множества, при этом две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда рассматриваемые элементы состоят в этом отношении.

Изучение алгебраических структур, базирующееся на исследовании соответствующих им графов отношений, находится в центре внимания математиков в течение последних двадцати лет, см. работы [4, 6, 7, 9] и их библиографию.

1.1. Граф делителей нуля. Введение понятия графа делителей нуля и других алгебраических отношений кольца устанавливает связь между теорией колец и теорией графов. Граф делителей нуля помогает нам изучить алгебраические свойства колец с использованием инструментов теории графов. Мы можем перевести некоторые алгебраические свойства кольца на язык теории графов, а геометрические свойства графов, в свою очередь, помогают исследовать алгебраическую структуру колец. Граф делителей нуля коммутативного кольца хорошо изучен, в частности, в работах [11, 12, 13].

Идея построения графа делителей нуля впервые была использована в 1986 году в работе И. Бека [16] для коммутативного кольца. В этой работе решались проблемы, связанные с раскраской графов делителей нуля коммутативных колец. В качестве вершин графа делителей нуля коммутативного кольца автором рассматривались все элементы кольца, причем две различные вершины X и Y соединялись ребром тогда и только тогда, когда $XY = 0$.

Ключевые слова: ортогональность, графы, матрицы.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 12-01-00140а и МД-962.2014.01
.

В 1999 году в работе [13] Д. Андерсон и Ф. Ливингстон несколько изменили способ построения графа делителей нуля. Вершинами графа делителей нуля коммутативного кольца они стали считать все ненулевые делители нуля. По мнению Д. Андерсона и Ф. Ливингстона, такое определение лучше иллюстрирует структуру множества делителей нуля. В частности, в [13] было доказано, что граф делителей нуля коммутативного кольца с единицей, вершинами которого являются лишь ненулевые делители нуля, является связным. Если же рассматривать в качестве вершин графа все элементы кольца, то это утверждение становится очевидным, поскольку нуль – вершина, которая является смежной для всех остальных вершин графа. Указанная статья [13] посвящена в основном изучению некоторых взаимосвязей между свойствами коммутативного кольца с единицей и свойствами графа делителей нуля этого кольца. В ней доказывается, что диаметр графа делителей нуля коммутативного кольца не больше трёх, и если в графе содержится цикл, то его обхват не превосходит семи (потом в [11] было показано, что обхват на самом деле не превосходит четырёх, в этой же работе исследовалось кликовое число этого графа). Помимо этого авторами были найдены условия, при которых граф делителей нуля является полным или графом-звездой. К тому же показано, что рефлексивное симметричное бинарное отношение $\sim$, которое задано следующим образом: $X \sim Y$, если $XY = 0$ или $X = Y$, транзитивно тогда и только тогда, когда граф делителей нуля коммутативного кольца полный.

С 1999 года графы делителей нуля коммутативного кольца стали интенсивно исследоваться. Кроме того, это понятие было распространено и на некоммутативный случай. Для некоммутативного кольца используются два определения графа делителей нуля. Во-первых, введено понятие ориентированного графа делителей нуля. Вершинами такого графа считаются все (односторонние и двусторонние) делители нуля кольца, причем две различные вершины соединяются ориентированным ребром $X \longrightarrow Y$ тогда и только тогда, когда $XY = 0$ (см., в частности, работы [7, 8]). Во-вторых, используется определение неориентированного графа делителей нуля, т.е. графа, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины X, Y соединяются ребром тогда и только тогда, когда либо $XY = 0$, либо $YX = 0$ (см.

работу [8]). Понятно, что в коммутативном случае последнее определение графа делителей нуля совпадает с определением, введенным Д. Андерсоном и Ф. Ливингстоном в [13].

Одним из направлений исследований в этой области стало описание колец, граф делителей нуля которых удовлетворяет определённому условию. Так в [8] исследовались кольца с единицей, ориентированные графы делителей нуля которых эйлеровы. Авторы работы [8] доказали, что для любого конечного поля K и любой конечной группы G ориентированный граф делителей нуля группового кольца KG эйлеров. Далее, в [8] доказано, что разложимое конечное кольцо $R = R_1 \times \cdots \times R_n$, $n \geqslant 2$, имеет эйлеров ориентированный граф делителей нуля в том и только в том случае, когда для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо кольцо R_i является полем, либо ориентированный граф делителей нуля кольца R_i эйлеров. В работе [5] исследовались коммутативные конечные кольца с единицей, графы делителей нуля которых планарны. В статье [5] приведено, в частности, полное описание конечных коммутативных разложимых колец с единицей, у которых графы делителей нуля планарны. Кроме того, в этой же работе получены некоторые результаты для коммутативных колец с единицей, графы делителей нуля которых являются полными r-дольными графами ($r > 2$). В [5] было также показано, что если R и S – конечные коммутативные кольца с единицей и ориентированные графы делителей нуля колец матриц изоморфны $\Gamma(M_n(R)) \cong \Gamma(M_m(S))$, $n, m \geqslant 2$, то $n = m$, $|R| = |S|$ и $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$. В работе [7] доказано, что, кроме некоторых определённых случаев, если R – кольцо, S – конечное полупростое кольцо, которое не является полем, и их ориентированные графы делителей нуля изоморфны $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$, то $R \cong S$. Похожий интересный факт был доказан в работе [11], в котором утверждалось, что если даны два конечных коммутативных редуцированных кольца, которые не являются полями, то их графы делителей нуля изоморфны, если и только если данные два кольца изоморфны.

1.2. Граф коммутирований. Одним из главных инструментов, которые помогают изучить свойства некоммутативных алгебраических структур, является коммутатор. Например, в алгебрах обычно используется аддитивный коммутатор, т.е. скобка Ли $[A, B] = AB - BA$, и с его помощью были получены некоторые красивые результаты, в частности, известная теорема Кляйнеке–Широкова [27, 32]. В группах используется мультипликативный коммутатор $[A, B] = A^{-1}B^{-1}AB$, и он является одним из главных инструментов в изучении разрешимости групп и, следовательно, в теории Галуа разрешимости уравнений в радикалах [24]. Дополнительная информация о некоммутирующих элементах может быть получена с помощью изучения свойств графа коммутативности, то есть графа, в котором множество вершин состоит из нецентральных элементов и две вершины соединены ребром, если соответствующие им элементы различны и коммутируют. Например, в [4] описаны конечные полупростые кольца, графы коммутирований которых изоморфны. Один из естественных вопросов: какие общие свойства сохраняют алгебраические структуры, имеющие изоморфные графы коммутирований? Известно, что если G – конечная неабелева нильпотентная группа, группы G и H имеют изоморфные графы коммутирований и одинаковые порядки, то H также нильпотентна [2]. В то же время граф коммутирований не определяет порядок конечной группы, т. е. существуют конечные группы разных порядков с изоморфными графами коммутирований (соответствующий пример приведен в [29]). Кроме того, Мохаммадиан в [30] недавно доказал, что кольцо изоморфно кольцу 2×2 матриц $M_2(\mathbb{F})$ над конечным полем $\mathbb{F}$, если и только если их графы коммутирований изоморфны. Акбери, Гандехери, Хадиан и Мохаммадиан предположили в [4], что это верно и для $M_n(\mathbb{F})$, где $n \geqslant 2$.

Связи между различными алгебраическими структурами и их графами коммутирований исследовались разными авторами в работах [1, 4, 9, 10, 17, 20, 23, 26, 30]. Большинство работ посвящено исследованию графов коммутирований $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ кольца квадратных матриц $M_n(\mathbb{F})$ размера n, так как отношение коммутативности для матриц занимает важное место как в абстрактных разделах математики, так и в прикладных задачах, см., например, [33, 35, 36]. Исследование связности и диаметра графа $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ стало ключевой задачей в данной области. В 2006 году Акбери, Мохаммадиан, Раджави и Раджа доказали [9, следствие 7], что если $\mathbb{F}$ является алгебраически замкнутым полем и $n \geqslant 3$, то диаметр $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ всегда равен четырем. Заметим, что при $n = 2$ граф коммутирований $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ над любым полем $\mathbb{F}$ несвязен [10, замечание 8]. Для полей, которые не являются алгебраически замкнутыми, ситуация совершенно другая, например, если $\mathbb{F}$ является полем рациональных чисел, то $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ всегда несвязен (см. [29, замечание 8]). Необходимое и достаточное условие, при котором $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ связен, было дано в [3, теорема 6]. А именно, было доказано, что $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$, $n \geqslant 3$, связен, если и только если каждое расширение поля $\mathbb{F}$ степени n содержит по крайней мере одно собственное промежуточное подполе. В случае, когда граф коммутирований $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ связен, его диаметр, как известно, не более шести, и есть предположение, что он не больше пяти, см. [9, теорема 17] и [9, гипотеза 18]. В [9] также было доказано, что если $p \geqslant 3$ – простое число и граф $\Gamma(M_p(\mathbb{F}))$ связен, то диаметр этого графа равен 4 для любого поля $\mathbb{F}$. Кроме этого, авторы статьи [9] вычислили диаметры некоторых индуцированных подграфов коммутирований: вырожденных, нильпотентных, идемпотентных и инволютивных матриц. В работе [18] было показано, что граф $\Gamma(M_9(\mathbb{Z}_2))$ связен и его диаметр не меньше 5, где $\mathbb{Z}_m$ – кольцо вычетов по модулю m. Приведенная ниже теорема 1.1 из работы [19] показывает, насколько граф коммутирований кольца квадратных матриц тесно связан с другими областями алгебры. Для её формулировки нужны некоторые определения и обозначения. Пусть $C(A)$ – централизатор матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$. Нескалярная матрица A называется *минимальной*, если для любого $X \in M_n(\mathbb{F})$ из включения $C(A) \supseteq C(X)$ следует, что $C(A) = C(X)$. Матрица A называется *циклической*, если её минимальный многочлен совпадает с её характеристическим многочленом.

Теорема 1.1 ([19, предложение 2.3]). *Пусть $\mathbb{F}$ – алгебраически замкнутое поле, $n \geqslant 3$. Тогда для $A \in M_n(\mathbb{F})$ следующие утверждения эквивалентны.*

1) *A – циклическая.*

2) *A – минимальная.*

3) *$C(A) = \mathbb{F}[A]$.*

4) *Алгебра $\mathbb{F}[A]$ является максимальной коммутативной подалгеброй $M_n(\mathbb{F})$ относительно отношения включения.*

5) *Каждое собственное число матрицы A имеет геометрическую кратность* 1.

6) *Жорданова нормальная форма матрицы A равна $J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ для $i \neq j$.*

7) *Существует циклический вектор матрицы A, то есть существует вектор v, такой что $v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v$ образуют базис $\mathbb{F}^n$.*

8) *Алгебра $\mathbb{F}[A]$ имеет максимальную длину среди всех коммутативных подалгебр $M_n(\mathbb{F})$.*

9) *Существует матрица* $X \in M_n(\mathbb{F})$*, такая что в графе коммутирований* $\Gamma(M_n(\mathbb{F}))$ *расстояние между вершинами* A *и* X *равно* 4.

1.3. Граф ортогональности. Целью данной статьи является введение понятия графа ортогональности кольца и всестороннее его исследование в случае матричной алгебры и некоторых ее подмножеств. Если в качестве R в определении 2.15 взять $M_n(\mathbb{F})$, то получится $O(M_n(\mathbb{F}))$ – *граф ортогональности кольца* $n\times n$ *матриц над полем* $\mathbb{F}$. Отношение ортогональности встречается в работах [25, 31, 34], в которых изучаются некоторые частичные порядки на матричной алгебре и отображения матриц, монотонных относительно этих порядков. Матричные порядки активно используются в различных областях алгебры, имеют приложения в математической статистике и многих других областях математики [15]. Условие ортогональности также встречается в линейной алгебре и функциональном анализе при изучении проекторов (операторов проектирования). Оказывается, что если P_1 и P_2 – проекторы, то P_1+P_2 – проектор в том и только в том случае, когда P_1 и P_2 ортогональны, то есть $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.

Наша статья построена следующим образом: §2 содержит основные определения и обозначения, используемые в работе. В §3 получено описание возможных значений диаметра графов ортогональности коммутативных артиновых колец и, в качестве следствия, значения диаметра однопорожденных коммутативных матричных подалгебр. В §4 исследован граф ортогональности полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ над произвольным полем, в частности, показано, что если $n \geqslant 3$, то граф является связным, его диаметр равен 4, а обхват равен 3. В §5 доказана связность и вычислены диаметры графов ортогональности некоторых классических семейств матриц, а именно: множества триангулизуемых матриц (раздел 5.1), множества диагонализуемых матриц (раздел 5.2), множеств нильпотентных и нильтреугольных матриц (раздел 5.3).

§2. Некоторые определения и обозначения

Напомним некоторые определения из теории графов. Понятия теории графов, использованные в статье, можно найти, например, в [21, глава 2].

Определение 2.1. *Граф* Γ – это совокупность непустого множества вершин $\mathrm{V}\left(\Gamma\right)$ и набора пар вершин $\mathrm{E}\left(\Gamma\right)$(связей между вершинами или рёбер).

Определение 2.2. Если v_1, v_2 – вершины, а $e = (v_1, v_2)$ – соединяющее их ребро, то вершина v_1 и ребро e называются *инцидентными*, вершина v_2 и ребро e тоже *инцидентны*.

Определение 2.3. В графе Γ *путём (маршрутом)* называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны. Если $v_0 = v_k$, то маршрут *замкнут*.

Определение 2.4. *Длина маршрута* – количество рёбер в маршруте, причем каждое ребро учитывается столько раз, сколько оно встречается в маршруте, обозначается буквой d.

Пример 2.5. Если маршрут $M = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, то длина M равняется k, независимо от того, повторяются рёбра в маршруте или нет.

Определение 2.6. *Цепь* – маршрут, все рёбра которого различны.

Определение 2.7. *Цикл* – замкнутая цепь.

Определение 2.8. *Обхватом* графа Γ называют длину цикла наименьшей длины, содержащегося в данном графе.

Определение 2.9. *Связный граф* – это граф, в котором для любой пары вершин существует соединяющая их цепь.

Определение 2.10. *Расстоянием* $d(u, v)$ между двумя различными вершинами u и v называется длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Если такой цепи не существует, то говорят, что $d(u, v) = \infty$; считается, что $d(u, u) = 0$ для любой вершины u.

Определение 2.11. *Диаметр* $\mathrm{diam}\left(\Gamma\right)$ графа Γ – это максимум расстояний между вершинами для всех пар вершин.

Введем некоторые обозначения, которые понадобятся в дальнейшем.

Обозначение 2.12. Под $\mathbb{F}$ будем понимать произвольное поле, если не будет оговорено иное.
$M_{m,n}\left(\mathbb{F}\right)$ – пространство матриц размера $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$,

$M_n(\mathbb{F}) = M_{n,n}(\mathbb{F})$ – кольцо (или алгебра) $n \times n$ матриц над $\mathbb{F}$,
$GL_n(\mathbb{F})$ – группа невырожденных матриц из $M_n(\mathbb{F})$;
NT_n – подалгебра нильтреугольных матриц в $M_n(\mathbb{F})$;
$D_n(\mathbb{F})$ – подалгебра диагональных матриц в $T_n(\mathbb{F})$;
$\Omega_n(\mathbb{F})$ – подмножество вырожденных матриц в $M_n(\mathbb{F})$;
$C(S)$ – централизатор множества $S \subseteq M_n(\mathbb{F})$, т.е. множество всех матриц, коммутирующих со всеми элементами из S;
E_{ij} – матричная единица, то есть матрица, у которой на (i, j)-ом месте стоит единица, а на остальных – нули; в случае сложных индексов будем писать $E_{i,j}$;
если A – матрица, то A^t обозначает транспонированную матрицу к A;
$0_{n\times m}$, 0_n – нулевые матрицы размеров $n \times m$ и $n \times n$, соответственно;
I_r – единичная матрица размера $r \times r$;
J_r – $r \times r$ жорданова клетка с собственным числом 0;
когда размер матрицы ясен из контекста, индексы n, m, r могут опускаться;
$\mathcal{L}_A$ и $\mathcal{R}_A$ – левое и правое действия оператора A на пространствах $\mathbb{F}^n = M_{n,1}(\mathbb{F})$ и $M_{1,n}(\mathbb{F})$, соответственно.

Теперь перейдем к основному объекту наших исследований.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей.

Определение 2.13. Два элемента $r_1 \in R$ и $r_2 \in R$ называются *ортогональными*, если $r_1 r_2 = r_2 r_1 = 0$.

Через $O_R(X)$, где X – подмножество R, обозначим множество элементов из R ортогональных каждому элементу из X.

Замечание 2.14. Нулевой элемент кольца $0 \in R$ ортогонален любому элементу кольца. Наоборот, если элемент $r \in R$ не является делителем нуля хотя бы с одной стороны, то не существует такого ненулевого элемента $x \in R$, что $xr = rx = 0$, а значит, не существует ненулевых ортогональных элементов r кольца R. Поэтому, изучая граф ортогональности, мы будем заранее исключать из множества вершин 0 и элементы, не являющиеся делителями нуля хотя бы с одной из сторон.

Определение 2.15. С каждым кольцом R можно связать *граф ортогональности* $O(R)$, множеством вершин которого являются все ненулевые двусторонние делители нуля кольца R, и две вершины соединены ребром, если соответствующие им элементы кольца ортогональны.

Замечание 2.16. Определение 2.15 не запрещает петли. При этом в нашем графе по определению исключены кратные рёбра.

Лемма 2.17. *Множество вершин $O(R)$ пусто тогда и только тогда, когда R является кольцом без делителей нуля.*

Доказательство. Очевидно, что если кольцо R не содержит делителей нуля, то множество $O(R)$ пусто.

Пусть кольцо R содержит делители нуля, т.е. в R найдутся элементы $a, b \neq 0$ такие, что $ab = 0$. Если $ba = 0$, то $a, b \in O(R)$. Если $ba \neq 0$, то $(ba)^2 = b(ab)a = 0$, поэтому $ba \in O(R)$. $\square$

§3. Графы ортогональности коммутативных колец

Начнем с некоторых теоретико-кольцевых понятий и обозначений, которые будут использованы в данном разделе (см., например, [14]).

Пусть R – коммутативное кольцо с 1.

Аннулятором подмножества X кольца R называется идеал

$$\operatorname{Ann}_R(X) = \{r \in R \,|\, rx = 0 \ \forall x \in X\}.$$

В рассматриваемом случае коммутативного кольца, $\operatorname{Ann}_R(X) = O_R(X)$.

Кольцо R называется *артиновым*, если оно не содержит бесконечных убывающих цепей идеалов (это равносильно тому, что любое непустое множество идеалов в кольце R содержит минимальный элемент). Например, все конечномерные алгебры над полем артиновы.

Идеал I кольца R называется *максимальным* (*простым*), если R/I – поле (кольцо без делителей нуля).

Радикалом Джекобсона (*нильрадикалом*) кольца R называется пересечение всех максимальных (простых) идеалов кольца R. Известно (см. [14, следствие 8.2 и предложение 8.4]), что нильрадикал кольца совпадает с множеством нильпотентных элементов и что радикал Джекобсона артинова кольца R совпадает с нильрадикалом и сам является нильпотентным идеалом. Далее $J(R)$ обозначает радикал Джекобсона кольца R, R^*– группу обратимых элементов кольца R.

Кольцо R называется *локальным*, если $R/J(R)$ – поле.

Кольцо R называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевых нильпотентных элементов.

Для коммутативных колец исследуемый граф ортогональности совпадает с графом делителей нуля (здесь граф делителей нуля понимается в смысле определения из работы [13]), поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1 ([13, Теорема 2.3]). *Пусть R – коммутативное кольцо с 1. Тогда граф $O(R)$ является связным и* $\operatorname{diam} O(R) \leqslant 3$.

В работе [28] найден диаметр графа делителей нуля произвольного коммутативного кольца.

Теорема 3.2 ([28, теорема 2.6]). *Пусть R – коммутативное кольцо с 1.*

1) $\operatorname{diam}(O(R)) = 0$ *тогда и только тогда, когда R изоморфно $\mathbb{Z}_4$ или $\mathbb{Z}_2[t]/(t^2)$ (отметим, что в обоих случаях R является нередуцированным кольцом).*

2) $\operatorname{diam}(O(R)) = 1$ *тогда и только тогда, когда произведение любых двух различных делителей нуля равно 0 и R содержит по крайней мере 2 ненулевых делителя нуля.*

3) $\operatorname{diam}(O(R)) = 2$ *тогда и только тогда, когда либо* (а) *R – редуцированное кольцо, содержащее ровно два минимальных простых идеала и хотя бы 3 ненулевых делителя нуля, либо* (б) *множество делителей нуля кольца R является идеалом с ненулевым квадратом и любые два различных делителя нуля имеют ненулевой аннулятор.*

4) $\operatorname{diam}(O(R)) = 3$ *тогда и только тогда, когда в R найдутся делители нуля $a \neq b$ такие, что $\operatorname{Ann}_R(\{a, b\}) = 0$, причем либо* (а) *$R$ – редуцированное кольцо, содержащее больше двух минимальных простых идеалов, либо* (б) *R – нередуцированное кольцо.*

В случае артиновых колец условия из работы [28] упрощаются и принимают следующий вид.

Теорема 3.3. *Пусть R – коммутативное артиново кольцо с 1, не являющееся полем.*

1) $\operatorname{diam} O(R) = 0$ *тогда и только тогда, когда R – локальное кольцо и $|J(R)| = 2$ (в этом случае R изоморфно $\mathbb{Z}_4$ или $\mathbb{Z}_2[t]/(t^2)$).*

2) $\operatorname{diam} O(R) = 1$ *тогда и только тогда, когда либо R – локальное кольцо с $J(R)^2 = 0$ и $|J(R)| > 2$, либо $R \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.*

3) $\operatorname{diam} O(R) = 2$ *тогда и только тогда, когда либо R – локальное кольцо с $J(R)^2 \neq 0$, либо R изоморфно прямой сумме двух полей, хотя бы одно из которых содержит более двух элементов.*

4) $\operatorname{diam} O(R) = 3$ *тогда и только тогда, когда либо $R \cong R_1 \oplus R_2$, где R_1 и R_2 – локальные кольца и $J(R_i) \neq 0$ для некоторого $i = 1, 2$, либо R раскладывается в прямую сумму более двух локальных колец.*

Для полноты изложения приведем доказательство теоремы 3.3, не опирающееся на теорему 3.2.

Доказательство. Согласно [14, теорема 8.7] R однозначно раскладывается в конечную прямую сумму локальных колец:

$$R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n.$$

1. Пусть $n = 1$, т.е. R – локальное кольцо. В локальном кольце элементы из $R \setminus J(R)$ обратимы, а как было отмечено выше, элементы $J(R)$ нильпотентны, поэтому множество вершин графа $O(R)$ есть $J(R) \setminus \{0\}$ (их существование гарантировано условием теоремы). С другой стороны, согласно [14, следствие 8.2, предложение 8.4] можно выбрать наименьшее число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $J(R)^m = 0$.

1.1. Предположим, что $J(R)^2 = 0$. Это означает, что $xy = yx = 0$ для любых $x, y \in J(R)$, откуда $\operatorname{diam} O(R) \leqslant 1$.

Тогда если $|J(R)| > 2$, то в $O(R)$ более одной вершины, поэтому $\operatorname{diam} O(R) = 1$.

Если $|J(R)| = 2$, то в $O(R)$ есть единственная вершина и $\operatorname{diam} O(R) = 0$. Заметим, что $J(R)/J(R)^2$ является векторным пространством над полем $R/J(R)$, поэтому условие $|J(R)| = 2$ влечет, что поле $R/J(R)$ состоит из двух элементов, т.е. изоморфно $\mathbb{Z}_2$. Следовательно, $|R| = 4$, R – локальное кольцо и не является полем, поэтому в этом случае R изоморфно $\mathbb{Z}_4$, если $1 + 1 \neq 0$ в R, либо $\mathbb{Z}_2[t]/(t^2)$, если $1 + 1 = 0$.

1.2. Предположим, что $m \geqslant 3$, т.е. $J(R)^2 \neq 0$.

Покажем, что существует хотя бы одна пара различных элементов $x, y \in J(R)$ таких, что $xy \neq 0$. Действительно, предположим противное: для любых различных $a, b \in J(R)$ имеет место равенство $ab = 0$. Тогда в $J(R)$ найдется элемент c такой, что $c^2 \neq 0$, соответственно найдется степень $s \geqslant 2$ такая, что $c^s \neq 0$ и $c^{s+1} = 0$, откуда $c + c^s \neq c$, $c + c^s \in J(R)$ и $c(c + c^s) = c^2 \neq 0$, противоречие. Таким образом, существует пара x, y, удовлетворяющая неравенству $d(x, y) \geqslant 2$.

С другой стороны, существует ненулевой элемент $d \in J(R)^{m-1}$, поэтому для любых различных $u, v \in J(R)$ выполнены равенства $ud = 0 = vd$, т.е. существует путь $u - d - v$ и $d(u, v) \leqslant 2$. Следовательно, $\operatorname{diam} O(R) = 2$.

2. Пусть $n = 2$, т.е. R раскладывается в сумму двух локальных колец R_1 и R_2.

2.1. Если $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, то вершинами $O(R)$ являются только элементы $a = (0, 1)$ и $b = (1, 0)$, $d(a, b) = 1$, поэтому $\operatorname{diam}(O(R)) = 1$.

2.2. Пусть R_1 и R_2 являются полями и $|R| > 4$. Вершинами $O(R)$ являются элементы $(a, 0)$, $a \in R_1^*$, и $(0, b)$, $b \in R_2^*$. При этом

$d((a,0),(0,b)) = 1$, и для различных $a_1, a_2 \in R_1^*$ существует путь $(a_1,0)-(0,1)-(a_2,0)$ длины 2 (соответственно, для различных $b_1, b_2 \in R_2^*$ существует путь $(0,b_1)-(1,0)-(0,b_2)$), а пути меньшей длины между такими элементами не существует. Так как $|R_1| > 2$ или $|R_2| > 2$, такая пара элементов существует, поэтому $\operatorname{diam}(O(R)) = 2$.

2.3. $J(R_i) \neq 0$ для некоторого $i = 1, 2$. Не ограничивая общности, будем считать, что $J(R_1) \neq 0$. Возьмем элемент $a \in J(R_1) \setminus \{0\}$ и вершины $(a,1)$ и $(1,0)$ в $O(R)$. Тогда $(a,1) \cdot (1,0) = (a,0) \neq 0$, поэтому $d((a,1),(1,0)) \geqslant 2$. С другой стороны,

$$O_R((a,1)) = \{(b,0), b \in O_{R_1}(a)\} \neq \{(0,0)\},$$
$$O_R((1,0)) = \{(0,c), c \in R_2\},$$
$$O_R((a,1)) \cap O_R((1,0)) = \{(0,0)\},$$

но существует путь

$$(a,1)-(b,0)-(0,1)-(1,0),$$

поэтому $d((a,1),(1,0)) = 3$. Значит, по теореме 3.1, $\operatorname{diam} O(R) = 3$.

3. Пусть R раскладывается в сумму $n > 2$ локальных колец $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Тогда для вершин $A = (0,1,1,\ldots,1)$ и $B = (1,0,1,\ldots,1)$ в $O(R)$ имеем

$$AB = (0,0,1,\ldots,1) \neq 0,$$
$$O_R(A) = \{(b,0,\ldots,0), b \in R_1\},$$
$$O_R(B) = \{(0,c,0,\ldots,0), c \in R_2\},$$
$$O_R(A) \cap O_R(B) = 0,$$

но существует путь

$$A-(1,0,\ldots,0)-(0,1,0,\ldots,0)-B,$$

поэтому $d(A,B) = 3$. Значит, по теореме 3.1, $\operatorname{diam} O(R) = 3$. □

Следствие 3.4. *Пусть $n \geqslant 2$, $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $D_n(\mathbb{F})$ обозначает подалгебру диагональных матриц в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда*

1) $\operatorname{diam}(O(D_2(\mathbb{Z}_2))) = 1$ *и* $\operatorname{diam}(O(D_2(\mathbb{F}))) = 2$ *при* $|\mathbb{F}| > 2$*;*

2) $\operatorname{diam}(O(D_n(\mathbb{F}))) = 3$ *при* $n \geqslant 3$.

Доказательство. $D_n(F)$ раскладывается в прямую сумму n экземпляров поля $\mathbb{F}$, $J(\mathbb{F}) = 0$.

□

Следствие 3.5. *Пусть $n \geqslant 2$, $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $A \in M_n(\mathbb{F})$ – нескалярная матрица. Предположим, что $\mu_A(t)$ (минимальный многочлен матрицы A) разлагается в поле $\mathbb{F}$ на линейные множители. Тогда для подалгебры $\mathcal{A} = \mathbb{F}[A] \subset M_n(\mathbb{F})$, порожденной матрицей A, имеем:*

1) $\operatorname{diam}(O(\mathcal{A})) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_2$, $\deg \mu_A(t)= 2$ *и* $\mu_A(t)$ *имеет единственный корень;*

2) $\operatorname{diam}(O(\mathcal{A})) = 1$ *тогда и только тогда, когда либо* $|\mathbb{F}| > 2$, $\deg \mu_A(t) = 2$ *и* $\mu_A(t)$ *имеет единственный корень, либо* $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ *и* $\mu_A(t) = t^2 - t$*;*

3) $\operatorname{diam}(O(\mathcal{A})) = 2$ *тогда и только тогда, когда либо* $|\mathbb{F}| > 2$, $\deg \mu_A(t) = 2$ *и* $\mu_A(t)$ *имеет* 2 *различных корня, либо* $\deg \mu_A(t) > 2$ *и* $\mu_A(t)$ *имеет единственный корень;*

4) $\operatorname{diam}(O(\mathcal{A})) = 3$ *тогда и только тогда, когда либо* $\deg \mu_A(t) > 2$ *и* $\mu_A(t)$ *имеет* 2 *различных корня, либо* $\mu_A(t)$ *имеет более двух корней.*

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{A} \cong \mathbb{F}[t]/(\mu_A(t))$. Рассмотрим разложение $\mu_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$ на простые множители, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогда разложение $\mathcal{A}$ в прямую сумму локальных колец имеет вид $\mathcal{A} \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{k} \mathbb{F}[t]/\left((t-\lambda_i)^{m_i}\right)$, и утверждение следует из теоремы 3.3. $\square$

§4. Граф ортогональности матричной алгебры $O(M_n(\mathbb{F}))$

Так как делители нуля в кольце матриц над полем – это в точности все необратимые матрицы, то вершины графа $O(M_n(\mathbb{F}))$ соответствуют матрицам из множества $\Omega_n(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$.

Лемма 4.1. *Граф ортогональности $O(M_n(\mathbb{F}))$ при $n = 1$ не существует. При $n = 2$ граф $O(M_n(\mathbb{F}))$ несвязен и является объединением своих связных подграфов, заданных следующими множествами вершин:*

1. *множество*
$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \neq b \in \mathbb{F} \right\};$$

2. *множество*
$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\};$$

3. *множество*

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\};$$

4. *для каждого* $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ *множество*

$$V_{4,\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} c & c\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq c \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & -d/\alpha \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq d \in \mathbb{F} \right\};$$

5. *для каждого* $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ *множество*

$$V_{5,\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c\alpha \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq c \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ -d/\alpha & 0 \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq d \in \mathbb{F} \right\};$$

6. *для каждых* $0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *множество*

$$V_{6,\alpha,\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha a & a \\ -\alpha\beta a & \beta a \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} -\beta b & b \\ -\alpha\beta b & \alpha b \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq b \in \mathbb{F} \right\}.$$

Диаметр компоненты связности, отвечающей каждому из множеств вершин V_1, $V_{4,\alpha}$, $V_{5,\alpha}$, *равняется* 1, *если* $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, *и* 2, *если* $|\mathbb{F}| > 2$.

Множества вершин $V_{6,\alpha,\beta}$ *с условием* $\alpha \neq \beta$ *определены над такими полями, что* $|\mathbb{F}| > 2$, *и соответствующие им компоненты связности имеют диаметр* 2.

Диаметр компоненты связности, отвечающей каждому из множеств вершин V_2, V_3 *и* $V_{6,\alpha,\alpha}$, *равняется* 0, *если* $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, *и* 1, *если* $|\mathbb{F}| > 2$.

Доказательство. Первое утверждение при $n = 1$ очевидно, так как в поле $\mathbb{F}$ нет делителей нуля.

Пусть теперь $n = 2$.

1. Сначала заметим, что любая пара перечисленных в лемме множеств не пересекается. Действительно, множества V_1, V_2, V_3 состоят из матриц ровно с 3 нулевыми элементами, множества $V_{4,\alpha}, V_{5,\alpha}$ – из матриц ровно с 2 нулевыми элементами, множества $V_{6,\alpha,\beta}$ – из матриц, в которых нет нулевых элементов. Исходя из количества нулей в матрице и их расположения, можно видеть, что

1.1. $V_1, V_2, V_3, V_{4,\alpha_1}, V_{5,\alpha_2}$ и $V_{6,\alpha,\beta}$ попарно не пересекаются при любых фиксированных α_1, α_2, $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

1.2. V_{4,α_1} и V_{4,α_2} попарно не пересекаются для всех $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

1.3. V_{5,α_1} и V_{5,α_2} попарно не пересекаются для всех $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

1.4. V_{6,α_1,β_1} и V_{6,α_2,β_2} попарно не пересекаются для всех

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \ \in \mathbb{F} \setminus \{0\},$$

кроме случая $\alpha_1 = \alpha_2$ и, одновременно, $\beta_1 = \beta_2$.

Для наглядности напишем подробно доказательство последнего пункта. Пусть, без ограничения общности,

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 a_1 & a_1 \\ -\alpha_1\beta_1 a_1 & \beta_1 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 a_2 & a_2 \\ -\alpha_2\beta_2 a_2 & \beta_2 a_2 \end{pmatrix}, \quad 0 \neq a_1, a_2 \in \mathbb{F}.$$

Тогда $a_1 = a_2$, откуда $\beta_1 = \beta_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2$.

2. Покажем, что все вершины графа $O(M_2(\mathbb{F}))$ попадают в одно из перечисленных выше множеств.

Для начала убедимся, что каждая компонента связности графа $O(M_2(\mathbb{F}))$ соответствует графу ортогональности алгебры $\mathbb{F}[A]$, порожденной некоторой матрицей A ранга 1. Действительно, нециклическими матрицами порядка 2 являются скалярные матрицы и только они. Отсюда любая матрица $A \in O(M_2(\mathbb{F}))$ ранга 1 является циклической, и, значит, ее централизатор $C(A) = \mathbb{F}[A]$ в силу [9, лемма 1], см. также [19, теорема 2.8]. Поскольку все вершины, находящиеся на расстоянии 1 от A, лежат в $C(A)$ и при этом тоже являются циклическими матрицами, получаем, что каждая компонента связности графа $O(M_2(\mathbb{F}))$ лежит в $\mathbb{F}[A] = \langle I, A\rangle$. Обратное включение очевидно. Поэтому каждая компонента связности графа $O(M_2(\mathbb{F}))$ соответствует графу ортогональности $O(\mathbb{F}[A])$ алгебры $\mathbb{F}[A]$, порожденной некоторой матрицей A ранга 1.

Разделим матрицы A ранга 1 на группы в зависимости от количества нулевых элементов в матрице и найдем $O(\mathbb{F}[A])$.

Компоненты 1–3 отвечают случаю, когда в матрице A ровно 3 нулевых элемента.

2.1. Ненулевой элемент стоит на диагонали. Тогда $\mathbb{F}[A] = D_2(\mathbb{F})$. Поэтому $O(\mathbb{F}[A])$ соответствует V_1.

2.2. $A = \lambda E_{21}$, $\mu_A(t) = t^2$. Тогда $A^2 = 0$ и матрицы $I + \xi A$ обратимы при всех $\xi \in \mathbb{F}$, поэтому вершинами $O(\mathbb{F}[A])$ являются матрицы γA, $\gamma \neq 0$, что соответствует V_2.

2.3. $A = \lambda E_{12}$, $\mu_A(t) = t^2$. Тогда аналогично подпункту 2.2 вершинами $O(\mathbb{F}[A])$ являются матрицы γA, $\gamma \neq 0$, что соответствует V_3.

Компоненты групп 4–5 отвечают случаю, когда в матрице A ровно 2 нулевых элемента.

2.4. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $0 \neq a, b \in \mathbb{F}$. Тогда $A^2 = aA$, $\mu_A(t) = t^2 - at$ и если $\lambda, \xi \neq 0$, то $\lambda I + \xi A$ необратима только при $\lambda = -\xi a$. Поэтому вершинами $O(\mathbb{F}[A])$ являются матрицы γA и δB, $\gamma, \delta \neq 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, что соответствует $V_{4,\alpha}$, где $\alpha = b/a$.

2.5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, $0 \neq a, b \in \mathbb{F}$. Тогда $A^2 = bA$, $\mu_A(t) = t^2 - bt$ и если $\lambda, \xi \neq 0$, то матрица $\lambda I + \xi A$ необратима только при $\lambda = -\xi b$. Поэтому вершинами $O(\mathbb{F}[A])$ являются матрицы γA и δB, $\gamma, \delta \neq 0$, $B = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, что соответствует $V_{5,\alpha}$, где $\alpha = b/a$.

Компоненты группы 6 отвечают случаю, когда в матрице A нет нулевых элементов.

2.6. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \beta a & \beta b \end{pmatrix}$, $0 \neq a, b, \beta \in \mathbb{F}$. Тогда $A^2 = (a + \beta b)A$, $\mu_A = t^2 - (a + \beta b)t$ и если $\lambda, \xi \neq 0$, то матрица $\lambda I + \xi A$ необратима только при $\lambda = -\xi(a + \beta b)$. Поэтому вершинами $O(\mathbb{F}[A])$ являются матрицы γA и δB, $\gamma, \delta \neq 0$, $B = \begin{pmatrix} -\beta b & b \\ \beta a & -a \end{pmatrix}$, что соответствует $V_{6,\alpha,\beta}$, где $\alpha = -a/b$.

Утверждения про диаметры компонент связности вытекают из следствия 3.5. □

Перейдем к случаю $n \geqslant 3$. Сперва докажем, что граф $O(M_n(\mathbb{F}))$ связен, и оценим сверху его диаметр.

Лемма 4.2. *Для любой вырожденной матрицы $A \in M_n(\mathbb{F}) \backslash \{0\}$ существует такая матрица $R \in M_n(\mathbb{F})$ ранга 1, что расстояние $d(A, R) \leqslant 1$ в графе ортогональности $O(M_n(\mathbb{F}))$.*

Доказательство. По определению вырожденности матриц A и A^t существуют ненулевые векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ такие, что $A\bar{x} = 0$ и $A^t\bar{y} = 0$. Тогда $R = \bar{x}\bar{y}^t$ – это искомая матрица ранга 1; действительно, $AR = (A\bar{x})\,\bar{y}^t = 0 = \bar{x}\left(A^t\bar{y}\right)^t = RA$. □

Лемма 4.3. *При $n \geqslant 3$ расстояние между любыми двумя матрицами в графе ортогональности $O(M_n(\mathbb{F}))$ не больше 4.*

Доказательство. Пусть A и B – произвольные матрицы из $O(M_n(\mathbb{F}))$. По лемме 4.2 существуют матрицы ранга один, находящиеся на расстоянии 1 от матриц A и B, соответственно. Обозначим их $R_1 = \bar{x}\bar{f}^t$

и $R_3 = \bar{y}\bar{g}^t$, где $AR_1 = R_1A = 0$ и $BR_3 = R_3B = 0$. Так как $n \geqslant 3$, существуют ненулевой вектор $\bar{z} \in \mathbb{F}^n$, удовлетворяющий условиям $\bar{f}^t\bar{z} = 0 = \bar{g}^t\bar{z}$, и ненулевой вектор $\bar{h} \in \mathbb{F}^n$, удовлетворяющий условиям $\bar{h}^t\bar{x} = 0 = \bar{h}^t\bar{y}$. Тогда матрица $R_2 = \bar{z}\bar{h}^t$ отлична от нуля и удовлетворяет условиям $R_1R_2 = R_2R_1 = R_3R_2 = R_2R_3 = 0$. Таким образом, мы получаем искомый путь $A = R_0 - R_1 - R_2 - R_3 - R_4 = B$ длины 4. $\square$

Для того, чтобы доказать, что диаметр нашего графа равен 4, осталось предъявить путь длины 4. Покажем, что искомым является путь между J и J^t.

Лемма 4.4. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле и $n \geqslant 3$. Тогда $d(J, J^t) = 4$ в графе $O(M_n(\mathbb{F}))$.*

Доказательство. 1. Убедимся, что $d(J, J^t) > 3$. Пусть $0 \neq A \in O_{M_n(\mathbb{F})}(J)$. Это означает, что $JA = AJ = 0$. Из равенства $JA = 0$ следует, что строки матрицы A с номерами $2, \ldots, n$ нулевые, так как умножение слева на J смещает строки матрицы A на одну позицию вверх, а из равенства $AJ = 0$ получаем, что столбцы матрицы A с номерами $1, \ldots, n-1$ нулевые, так как умножение справа на J смещает столбцы матрицы A на одну позицию вправо. Значит, остаётся единственная ненулевая позиция в 1-ой строке, n-ом столбце. Следовательно, $O_{M_n(\mathbb{F})}(J) = \{\alpha E_{1n} \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$. Аналогично получаем, что $O_{M_n(\mathbb{F})}(J^t) = \{\alpha E_{n1} \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$. Учитывая то, что $E_{1n}E_{n1} \neq 0$, получаем, что $d(J, J^t) \geqslant 4$.

2. Предъявим путь длины 4. Действительно, непосредственная проверка показывает, что $J - E_{1n} - E_{22} - E_{n1} - J^t$ – путь в $O(M_n(\mathbb{F}))$.

Следовательно, $d(J, J^t) = 4$. $\square$

В заключение сформулируем обобщающую структурную теорему.

Теорема 4.5. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле. Тогда*

1. *Граф ортогональности $O(M_n(\mathbb{F}))$ при $n \geqslant 3$ связен.*
2. *Диаметр графа $O(M_n(\mathbb{F}))$ равен четырём.*
3. *Обхват графа $O(M_n(\mathbb{F}))$ равен трём.*

Доказательство. Первые два утверждения следуют из лемм 4.3 и 4.4. Найдем обхват рассматриваемого графа. Заметим, что замкнутый путь $E_{11} - E_{22} - E_{33} - E_{11}$ является циклом длины 3 в графе $O(M_n(\mathbb{F}))$. Значит, обхват нашего графа не превосходит трех. Так как в нашем графе нет кратных рёбер, то обхват графа $O(M_n(\mathbb{F}))$ равняется 3. $\square$

§5. Приложения к другим матричным множествам

Определение 5.1. Для множества $X \subset R$ в графе ортогональности $O\,(R)$ кольца R рассмотрим подграф $O\,(X)$, соответствующий данному множеству X, с множеством вершин $\mathrm{V}\,(O\,(R)) \cap X$ и множеством ребер $S \subseteq \mathrm{E}\,(O\,(R))$, где S – это в точности те рёбра, оба конца которых принадлежат множеству X.

5.1. Подмножество триангулизуемых матриц.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле. Если $\mathcal{T}_n$ – множество триангулизуемых матриц в $M_n(\mathbb{F})$, то $O(\mathcal{T}_2) = O(M_2(\mathbb{F}))$ и $\operatorname{diam} O(\mathcal{T}_n) = 4$ для всех $n \geqslant 3$.*

Доказательство. 1. Если $C \in O(\mathcal{T}_2)$, то $C \in O(M_2(\mathbb{F}))$. Обратно, если $C \in O(M_2(\mathbb{F}))$, то C – ненулевая вырожденная матрица порядка 2, откуда $\operatorname{rank} C = 1$. Но любая матрица ранга 1 триангулизуема над произвольным полем (поскольку собственные значения данной матрицы лежат в $\mathbb{F}$, то и матрицу перехода к жорданову базису можно выбрать над $\mathbb{F}$, см., например, [22, следствие 1 из теоремы 6.7.3]), значит, $C \in O(\mathcal{T}_2)$.

2. Рассмотрим случай $n \geqslant 3$. Если $\mathbb{F}$ – алгебраически замкнутое поле, то над $\mathbb{F}$ все матрицы из $M_n(\mathbb{F})$ триангулизуемы, поэтому $O(\mathcal{T}_n) = O(M_n(\mathbb{F}))$, и утверждение теоремы следует из теоремы 4.5.

Пусть теперь поле $\mathbb{F}$ алгебраически незамкнуто. Если A и B – вырожденные ненулевые матрицы из $\mathcal{T}_n$, то по лемме 4.3 существует путь между ними в графе $O(M_n(\mathbb{F}))$ длины не больше, чем 4, в котором по построению все промежуточные вершины – матрицы ранга 1. Так как любая матрица ранга 1 триангулизуема, этот путь является также путем в графе $O(\mathcal{T}_n)$. Тогда лемма 4.4 завершает доказательство. □

5.2. Подмножество диагонализуемых матриц.

Лемма 5.3. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле. Если $\mathcal{D}_2$ – множество диагонализуемых матриц в $M_2(\mathbb{F})$, то граф $O(\mathcal{D}_2)$ несвязен и является объединением своих связных подграфов, заданных следующими множествами вершин:*

1. множество

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Bigm| 0 \neq b \in \mathbb{F} \right\};$$

2. для каждого $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ множество

$$V_{4,\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} c & c\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq c \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & -d/\alpha \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq d \in \mathbb{F} \right\};$$

3. для каждого $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ множество

$$V_{5,\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c\alpha \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq c \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ -d/\alpha & 0 \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq d \in \mathbb{F} \right\};$$

4. для каждых $\alpha \neq \beta \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$ множество

$$V_{6,\alpha,\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha a & a \\ -\alpha\beta a & \beta a \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} -\beta b & b \\ -\alpha\beta b & \alpha b \end{pmatrix} \Big| \, 0 \neq b \in \mathbb{F} \right\}.$$

Диаметр компоненты связности, отвечающей каждому из множеств вершин V_1, $V_{4,\alpha}$ и $V_{5,\alpha}$, равняется 1, если $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, и 2, если $|\mathbb{F}| > 2$. Множества вершин $V_{6,\alpha,\beta}$ с условием $\alpha \neq \beta$ определены над такими полями, что $|\mathbb{F}| > 2$, и соответствующие им компоненты связности имеют диаметр 2.

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы 4.1, поскольку граф $O(\mathcal{D}_2(\mathbb{F}))$ является подграфом графа $O(M_2(\mathbb{F}))$, причем для всех $\alpha \neq \beta \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$ множества вершин $V_1, V_{4,\alpha}, V_{5,\alpha}, V_{6,\alpha,\beta}$ содержатся в $\mathcal{D}_2(\mathbb{F})$, в то время как $V_2, V_3, V_{6,\alpha,\alpha}$ не содержат диагонализуемых матриц. □

Нам потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 5.4. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле, $n \geqslant 3$, $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ – вырожденные диагонализуемые матрицы рангов r и s, соответственно. Пусть $A = P \operatorname{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0) P^{-1}$, $B = Q \operatorname{Diag}(\beta_1, \ldots, \beta_s, 0, \ldots, 0) Q^{-1}$, где матрицы $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$. Тогда для матрицы $C = P(Q^{-1} E_{nn} Q) P^{-1}$ и ее разбиения на блоки $C = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, где $Y \in M_{r,n-r}(\mathbb{F})$, блоки X и T не могут быть нильпотентными одновременно.*

Доказательство. Так как $\operatorname{rank} C = 1$, то $\operatorname{rank} X \leqslant 1$ и $\operatorname{rank} T \leqslant 1$. Предположим, что и X, и T нильпотентны. Тогда $X^2 = 0$ и $T^2 = 0$. Из идемпотентности C следует, что $XY + YT = Y$. Значит, $XY = Y(I - T)$, и поскольку матрица $I - T$ обратима, то

$$Y = XY(I-T)^{-1} = X(XY(I-T)^{-1})(I-T)^{-1} = X^2 Y (I-T)^{-2} = 0,$$

так как $X^2 = 0$. Аналогично получаем, что $Z = 0$. Следовательно, $C^2 = 0$, противоречие. Таким образом, хотя бы одна из матриц X и T не может быть нильпотентной. $\square$

Теорема 5.5. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– поле. Если* $\mathcal{D}_3$ *– множество диагонализуемых матриц в* $M_3(\mathbb{F})$, *то* $\operatorname{diam} O(\mathcal{D}_3) = 5$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вырожденные ненулевые матрицы A и $B \in \mathcal{D}_3$. Оценим расстояние между ними.

1. Существуют матрицы $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$, такие что $A_1 = PAP^{-1} = A_2 \bigoplus 0_{3-r}$ и $B_1 = QBQ^{-1} = B_2 \bigoplus 0_{3-s}$, где $A_2 = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in M_r(\mathbb{F})$ и $B_2 = \operatorname{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_s) \in M_s(\mathbb{F})$ – диагональные матрицы с диагональными элементами $\alpha_i \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, r$, и $\beta_j \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $j = 1, \dots, s$, соответственно, для некоторых $1 \leqslant r, s < 3$.

2. Заметим, что B ортогональна $Q^{-1}E_{33}Q$. Положим

$$C = P(Q^{-1}E_{33}Q)P^{-1}.$$

Пусть имеется следующее разбиение матрицы C на блоки:

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix},$$

где $Y \in M_{r,3-r}(\mathbb{F})$. Из леммы 5.4 получаем, что хотя бы одна из матриц X и T не является нильпотентной.

3. Покажем, что в графе $O(\mathcal{D}_3)$ между вершинами A и B существует путь длины не больше, чем 5.

3.1. Сперва предположим, что $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 1$. Тогда

$$\dim(\operatorname{Ker} \mathcal{L}_A \ \cap \operatorname{Ker} \mathcal{L}_B) \geqslant 1.$$

Поэтому существует матрица $T_1 \in GL_3(\mathbb{F})$, такая что $A_1' = T_1AT_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{r_1} \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}$ и $B_1' = T_1BT_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{r_2} \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$, где $S_1, S_2 \in M_2(\mathbb{F})$. Так как $\operatorname{rank} A = 1$, то $\operatorname{rank} S_1 \leqslant 1$. Если $\operatorname{rank} S_1 = 0$, то $(A_1')^2 = 0$, что противоречит диагонализуемости A. Значит, $\operatorname{rank} S_1 = 1$. Заметим, что S_1 не может быть нильпотентной, так как это опять противоречило бы диагонализуемости A. Следовательно, существует матрица $C_3 \in GL_2(\mathbb{F})$, такая что $C_3S_1C_3^{-1} = \gamma E_{22}$. Найдем матрицы $0 \neq c_1 \in GL_1(\mathbb{F})$ и $0 \neq \bar{c_2} \in M_{1,2}(\mathbb{F})$ такие, что $c_1R_1 = -\bar{c_2}S_1$. Тогда для матрицы

$C_A = \begin{pmatrix} c_1 & \bar{c_2} \\ 0 & C_3 \end{pmatrix}$ имеем:

$$A_1'' = C_A A_1' C_A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (c_1\bar{r_1} + \bar{c_2}S_1)C_3^{-1} \\ 0 & C_3 S_1 C_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

$$B_1'' = C_A B_1' C_A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (c_1\bar{r_2} + \bar{c_2}S_2)C_3^{-1} \\ 0 & C_3 S_2 C_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{r} \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Так как B диагонализуемая и $\operatorname{rank} B = 1$, то, как и в случае с S_1, получаем, что $\operatorname{rank} S = 1$, и S не может быть нильпотентной. Следовательно, существует матрица $U_1 \in GL_2(\mathbb{F})$, такая что $U_1 S U_1^{-1} = \xi E_{22}$. Обозначим $G = I_1 \oplus U_1$. Тогда $G A_1'' G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_1 \gamma E_{22} U_1^{-1} \end{pmatrix}$ и $G B_1'' G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{r} U_1^{-1} \\ 0 & \xi E_{22} \end{pmatrix}$. Но второй столбец матрицы $G B_1'' G^{-1}$ нулевой, потому что её ранг равен 1. Значит, $E_{11} \in O_{M_3(\mathbb{F})}(G A_1'' G^{-1})$ и $E_{22} \in O_{M_3(\mathbb{F})}(G B_1'' G^{-1})$, откуда получаем, что

$$\begin{aligned}
&G^{-1}E_{11}G \in O_{M_3(\mathbb{F})}(A_1'') \text{ и } G^{-1}E_{22}G \in O_{M_3(\mathbb{F})}(B_1''),\\
&C_A^{-1}(G^{-1}E_{11}G)C_A \in O_{M_3(\mathbb{F})}(A_1') \text{ и } C_A^{-1}(G^{-1}E_{22}G)C_A \in O_{M_3(\mathbb{F})}(B_1'),\\
&T_1^{-1}(C_A^{-1}(G^{-1}E_{11}G)C_A)T_1 \in O_{M_3(\mathbb{F})}(A) \text{ и}\\
&\quad T_1^{-1}(C_A^{-1}(G^{-1}E_{11}G)C_A)T_1 \in O_{M_3(\mathbb{F})}(B).
\end{aligned}$$

Осталось заметить, что $E_{11} \in O_{M_3(\mathbb{F})}(E_{22})$. Итак, получили путь

$$A - T_1^{-1}(C_A^{-1}(G^{-1}E_{11}G)C_A)T_1 - T_1^{-1}(C_A^{-1}(G^{-1}E_{11}G)C_A)T_1 - B.$$

3.2. Рассмотрим теперь случай, когда одна из матриц имеет ранг 2. Без ограничения общности считаем, что $\operatorname{rank} A = 2$. Заметим, что A ортогональна $P^{-1}E_{33}P$. Кроме того, для введенной в пункте 2 матрицы C имеем

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & \bar{y} \\ \bar{z} & t \end{pmatrix},$$

где $Y = \bar{y} \in M_{2,1}(\mathbb{F}),\ Z = \bar{z} \in M_{1,2}(\mathbb{F}),\ T = t \in M_1(\mathbb{F})$.

3.2.1. Если X не является нильпотентной, то, поскольку $\operatorname{rank} X = 1$, существует матрица $U \in GL_2(\mathbb{F})$, такая что $UXU^{-1} = \lambda E_{22}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Обозначим $V = U \oplus I_1$. Тогда $V^{-1}E_{33}V = E_{33}$ и

$C' = VCV^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda E_{22} & U\bar{y} \\ \bar{z}U^{-1} & t \end{pmatrix}$. Поскольку $\operatorname{rank} C = 1$, то первая строка матрицы $U\bar{y}$ и первый столбец матрицы $\bar{z}U^{-1}$ нулевые. Значит, $E_{11} \in O_{M_3(\mathbb{F})}(C')$, откуда получаем, что $V^{-1}E_{11}V \in O_{M_3(\mathbb{F})}(C)$, а из этого следует, что $P^{-1}(V^{-1}E_{11}V)P \in O_{M_3(\mathbb{F})}(Q^{-1}E_{33}Q)$. Осталось заметить, что $E_{11} \in O_{M_3(\mathbb{F})}(E_{33})$. Итак, получили путь

$$A - W - P^{-1}(V^{-1}E_{11}V)P - Q^{-1}E_{33}Q - B,$$

где $W = P^{-1}E_{33}P = P^{-1}(V^{-1}E_{33}V)P$.

3.2.2. Если X нильпотентна, то, так как $\operatorname{rank} X \leqslant 1$, существует $U' \in GL_2(\mathbb{F})$, такая что $U'X(U')^{-1} = \mu E_{12}$ для некоторого $\mu \in \mathbb{F}$. Обозначим $V' = U' \oplus I_1$. Тогда

$$(V')^{-1}E_{33}V' = E_{33} \;\text{ и }\; C'' = V'C(V')^{-1} = \begin{pmatrix} \mu E_{12} & U'\bar{y} \\ \bar{z}(U')^{-1} & t \end{pmatrix}.$$

3.2.2.1. Если $\mu = 0$, то, поскольку $\operatorname{rank} C'' = 1$, максимум одна из матриц $\bar{y}$ и $\bar{z}$ ненулевая. Без ограничения общности предположим, что $\bar{y} = 0$. Если взять $S \in M_2(\mathbb{F})$ – ненулевую диагонализуемую матрицу, такую что $\bar{z}(U')^{-1}S = 0$, то $S' \in O_{M_3(\mathbb{F})}(C'')$, где $S' = S \oplus 0_1$, откуда получаем, что $(V')^{-1}S'V' \in O_{M_3(\mathbb{F})}(C)$, а из этого следует, что $P^{-1}((V')^{-1}S'V')P \in O_{M_3(\mathbb{F})}(Q^{-1}E_{33}Q)$. Осталось заметить, что $E_{33} \in O_{M_3(\mathbb{F})}(S')$. Итак, получили путь

$$A - W_1 - P^{-1}((V')^{-1}S'V')P - Q^{-1}E_{33}Q - B,$$

где $W_1 = P^{-1}E_{33}P = P^{-1}((V')^{-1}E_{33}V')P$.

3.2.2.2. Если $\mu \neq 0$, то, так как $\operatorname{rank} C'' = 1$, вторая строка и первый столбец этой матрицы нулевые. Без ограничения общности считаем, что $\mu = 1$. Пусть $C'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & z' & t' \end{pmatrix}$. Так как X нильпотентна, то из пункта 2 мы получаем, что T не может быть нильпотентной, значит, $t' \neq 0$. Кроме того, из того, что $\operatorname{rank} C'' = 1$, следует, что $z', y' \neq 0$ и $t' = z'y'$. Следовательно, $C'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & z' & z'y' \end{pmatrix}$. Матрицы ортогональные C'' имеют вид $A' = \begin{pmatrix} -za_3 & a_2 & a_3 \\ yza_9 & -ya_8 & -ya_9 \\ -za_9 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$, где $a_i \in \mathbb{F}$, $i = 2, 3, 8, 9$. Если взять A'', такую что $a_3 = -1/z'$ и $a_i = 0$, $i \neq 3$, то

$A'' \in O_{M_3(\mathbb{F})}(C'')$, откуда получаем, что $(V')^{-1}A''V' \in O_{M_3(\mathbb{F})}(C)$, а из этого следует, что $P^{-1}((V')^{-1}A''V')P \in O_{M_3(\mathbb{F})}(Q^{-1}E_{33}Q)$. Осталось заметить, что $E_{33} \in O_{M_3(\mathbb{F})}(E_{22})$ и $E_{22} \in O_{M_3(\mathbb{F})}(A'')$. Следовательно, получили путь

$$A - P^{-1}((V')^{-1}E_{33}V')P - P^{-1}((V')^{-1}E_{22}V')P \\ - P^{-1}((V')^{-1}A''V')P - Q^{-1}E_{33}Q - B.$$

Итак, мы показали, что во всех случаях $\operatorname{diam} O(\mathcal{D}_3) \leqslant 5$.

4. Теперь покажем, что $\operatorname{diam} O(\mathcal{D}_3) = 5$. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Нетрудно убедиться, что

$$O_{M_3(\mathbb{F})}(A) = \left\{ \alpha E_{33} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{F} \right\},$$
$$O_{M_3(\mathbb{F})}(B) = \left\{ \alpha L \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{F} \right\},$$
$$O_{M_3(\mathbb{F})}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & -b_1 \\ b_4 & b_5 & -b_4 \\ -b_4 & -b_5 & b_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, b_i \in \mathbb{F},\ i = 1,2,4,5 \right\},$$

где $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$. Ясно, что $E_{33} \notin O_{M_3(\mathbb{F})}(B) \cup O_{M_3(\mathbb{F})}(L)$. Кроме того, ненулевые элементы из $O_{M_3(\mathbb{F})}(L)$, которые ортогональны E_{33}, – это в точности bE_{12}, $0 \neq b \in \mathbb{F}$. Но такие матрицы не являются диагонализуемыми. Значит, $d(A,B) \geqslant 5$. Последовательность

$$A - E_{33} - E_{22} - K - L - B,$$

где $K = E_{11} - E_{13}$, показывает, что расстояние 5 реализуется. □

Теорема 5.6. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле. Если $\mathcal{D}_n$ – множество диагонализуемых матриц в $M_n(\mathbb{F})$, то $\operatorname{diam} O(\mathcal{D}_n) = 4$ для всех $n \geqslant 4$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные вырожденные ненулевые матрицы A и $B \in \mathcal{D}_n$. Оценим расстояние между ними.

1. Существуют матрицы $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$, такие что $A_1 = PAP^{-1} = A_2 \bigoplus 0_{n-r}$ и $B_1 = QBQ^{-1} = B_2 \bigoplus 0_{n-s}$, где $A_2 = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in$

$M_r(\mathbb{F})$ и $B_2 = \mathrm{Diag}\,(\beta_1, \ldots, \beta_s) \in M_s(\mathbb{F})$ – диагональные матрицы с диагональными элементами $\alpha_i \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, r$, и $\beta_j \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $j = 1, \ldots, s$, соответственно, для некоторых $1 \leqslant r, s < n$.

2. Заметим, что B ортогональна $Q^{-1}E_{nn}Q$. Положим

$$C = P(Q^{-1}E_{nn}Q)P^{-1}.$$

Пусть имеется следующее разбиение матрицы C на блоки:

$$C = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix},$$

где $Y \in M_{r,n-r}(\mathbb{F})$. Из леммы 5.4 получаем, что хотя бы одна из матриц X и T не является нильпотентной.

3. Покажем, что в графе $O(\mathcal{D}_n)$ между вершинами A и B существует путь длины не больше, чем 4.

Без ограничения общности можно считать, что матрица X не является нильпотентной.

3.1. Предположим, что $r \geqslant 2$. Так как $\mathrm{rank}\, X = 1$, то существует матрица $U \in GL_r(\mathbb{F})$, такая что $UXU^{-1} = \lambda E_{rr}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Пусть $V = U \oplus I_r$. Заметим, что $V^{-1}E_{nn}V = E_{nn}$. Тогда $C' = VCV^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda E_{rr} & UY \\ ZU^{-1} & T \end{pmatrix}$. Поскольку $\mathrm{rank}\, C' = 1$, первая строка матрицы UY и первый столбец матрицы ZU^{-1} нулевые. Тогда $C' = V(P(Q^{-1}E_{nn}Q)P^{-1})V^{-1}$ ортогональна E_{11}, откуда $P^{-1}(V^{-1}E_{11}V)P$ ортогональна $Q^{-1}E_{nn}Q$, а значит, в графе $O(\mathcal{D}_n)$ существует путь

$$A - W - P^{-1}(V^{-1}E_{11}V)P - Q^{-1}E_{nn}Q - B,$$

где $W = P^{-1}E_{nn}P = P^{-1}(V^{-1}E_{nn}V)P$.

3.2. Пусть теперь $r = 1$. Тогда $C = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & \bar{y} \\ \bar{z} & T \end{pmatrix}$, где $X = x \in M_1(\mathbb{F})$, $Y = \bar{y} \in M_{1,n-1}(\mathbb{F})$, $Z = \bar{z} \in M_{n-1,1}(\mathbb{F})$.

3.2.1. Если T ненильпотентна, то, так как $n - 1 \geqslant 2$ и $\mathrm{rank} T = 1$, существует матрица $U_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{F})$, такая что $U_1TU_1^{-1} = \lambda E_{n-1,n-1}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Пусть $V_1 = I_1 \oplus U_1$. Тогда $C_1 = V_1CV_1^{-1}$ $= \begin{pmatrix} x & \bar{y}U_1^{-1} \\ U_1\bar{z} & \lambda E_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$. Заметим, что $V_1A_1V_1^{-1} = A_1$. Поскольку rank $C_1 =$ 1, то предпоследняя строка и предпоследний столбец матрицы C_1 нулевые. Следовательно,

$$E_{n-1,n-1} \in O_{M_n(\mathbb{F})}(V_1CV_1^{-1}) \text{ и } E_{n-1,n-1} \in O_{M_n(\mathbb{F})}(V_1A_1V_1^{-1})$$

откуда получаем, что

$$\begin{aligned}&V_1^{-1}E_{n-1,n-1}V_1 \in O_{M_n(\mathbb{F})}(C) \text{ и } V_1^{-1}E_{n-1,n-1}V_1 \in O_{M_n(\mathbb{F})}(A_1),\\&P^{-1}(V_1^{-1}E_{n-1,n-1}V_1)P \in O_{M_n(\mathbb{F})}(Q^{-1}E_{nn}Q)\\&\quad \text{и } P^{-1}(V_1^{-1}E_{n-1,n-1}V_1)P \in O_{M_n(\mathbb{F})}(A).\end{aligned}$$

Тогда в графе $O(\mathcal{D}_n)$ существует путь

$$A - P^{-1}(V_1^{-1}E_{n-1,n-1}V_1)P - Q^{-1}E_{nn}Q - B.$$

3.2.2. Если T нильпотентна, то, так как $\operatorname{rank} T \leqslant 1$, существует матрица $U' \in GL_{n-1}(\mathbb{F})$ такая, что $U'T(U')^{-1} = \mu E_{1,n-1}$ для некоторого $\mu \in \mathbb{F}$. Обозначим $V' = I_1 \oplus U'$. Заметим, что $V'A_1(V')^{-1} = A_1$. Тогда рассмотрим $C'' = V'C(V')^{-1} = \begin{pmatrix} x & \bar{y}(U')^{-1} \\ U'\bar{z} & \mu E_{1,n-1}\end{pmatrix}$.

Если $\mu = 0$, то, поскольку $\operatorname{rank} C'' = 1$, хотя бы один из векторов $\bar{y}$ и $\bar{z}$ равняется нулю. Без ограничения общности предположим, что $\bar{y}=0$. Если взять $S \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ – ненулевую диагонализуемую матрицу, такую что $SU'\bar{z} = 0$, то получим путь

$$A - P^{-1}((V')^{-1}S'V')P - Q^{-1}E_{nn}Q - B,$$

где $S' = 0_1 \oplus S$.

Если $\mu \neq 0$, то, так как $\operatorname{rank} C'' = 1$, нетрудно заметить, что третья строка и третий столбец этой матрицы нулевые. Следовательно, получили путь

$$A - P^{-1}((V')^{-1}E_{33}V')P - Q^{-1}E_{nn}Q - B.$$

Итак, мы показали, что $\operatorname{diam} O(\mathcal{D}_n) \leqslant 4$.

4. Теперь покажем, что $\operatorname{diam} O(\mathcal{D}_n) = 4$. Пусть $A = I_{n-1} \bigoplus 0_1$, $B = A + E_{1n}$. Нетрудно заметить, что

$$O_{M_n(\mathbb{F})}(A) = \left\{\alpha E_{nn} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{F}\right\}, \quad O_{M_n(\mathbb{F})}(B) = \left\{\alpha M \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{F}\right\},$$

где $M = (E_{1n} - E_{nn}) \in \mathcal{D}_n$. Ясно, что $E_{nn} \notin O_{M_n(\mathbb{F})}(B)$, значит, $d(A,B) \geqslant 4$. Последовательность

$$A - E_{nn} - E_{22} - M - B$$

показывает, что расстояние 4 реализуется.

$\square$

5.3. Подмножество нильпотентных матриц.

Лемма 5.7. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– поле. Если* $\mathcal{N}_2$ *– множество нильпотентных матриц в* $M_2(\mathbb{F})$*, то граф* $O(\mathcal{N}_2(\mathbb{F}))$ *несвязен и является объединением своих связных подграфов, заданных следующими множествами вершин:*

1. *множество*

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \middle| \, 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\};$$

2. *множество*

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\};$$

3. *для каждого* $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ *множество*

$$V_{6,\alpha,\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha a & a \\ -\alpha^2 a & \alpha a \end{pmatrix} \middle| \, 0 \neq a \in \mathbb{F} \right\}.$$

Диаметр компоненты связности, отвечающей каждому из множеств вершин V_2*,* V_3 *и* $V_{6,\alpha,\alpha}$*, равняется* 0*, если* $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$*, и* 1*, если* $|\mathbb{F}| > 2$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 4.1, поскольку граф $O(\mathcal{N}_2(\mathbb{F}))$ является подграфом графа $O(M_2(\mathbb{F}))$, причем для всех $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ множества вершин $V_2, V_3, V_{6,\alpha,\alpha}$ содержатся в $\mathcal{N}_2(\mathbb{F})$, в то время как множества $V_1, V_{4,\alpha}, V_{5,\alpha}$ и $V_{6,\alpha,\beta}$, $\beta \in \mathbb{F} \backslash \{0, \alpha\}$, не содержат нильпотентных матриц. □

Отметим, что доказательства основных утверждений этого раздела следуют схеме доказательств аналогичных утверждений про граф коммутативности, в частности, лемма 5.8 аналогична ([9, лемма 4]), теорема 5.9 аналогична ([9, теорема 8]), теорема 5.11 аналогична ([9, теорема 9]). Однако, поскольку формально утверждения о графах ортогональности не следуют из утверждений о графах коммутативности, мы приведем в этой статье полные доказательства полученных результатов.

Лемма 5.8. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– поле и* $n \geqslant 2$*. Предположим, что* A*,* $B \in M_n(\mathbb{F})$ *таковы, что* $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_A \cap \operatorname{Ker} \mathcal{L}_B \neq \{0\}$ *и* $\operatorname{Ker} \mathcal{R}_A \cap \operatorname{Ker} \mathcal{R}_B \neq \{0\}$*. Тогда* $O_{M_n(\mathbb{F})}(\{A, B\})$ *содержит хотя бы одну матрицу ранга* 1.

Доказательство. Из условий следует, что существуют ненулевые элементы $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathbb{F}^n$ такие, что $A\bar{x} = B\bar{x} = 0$ и $\bar{y}^t A = \bar{y}^t B = 0$. Если положить $M = \bar{x}\bar{y}^t$, то получим $AM = MA = 0$ и $BM = MB = 0$. Так как $\bar{x}$ и $\bar{y}$ ненулевые, то $\operatorname{rank} M = 1$.

□

Теорема 5.9. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле, $n > 2$. Если $\mathcal{N}_n$ – множество нильпотентных матриц в $M_n(\mathbb{F})$, то $\operatorname{diam} O(\mathcal{N}_3) = 5$, и $\operatorname{diam} O(\mathcal{N}_n) = 4$ для всех $n \geqslant 4$.*

Доказательство. Предположим, что A и B – две ненулевые матрицы в $\mathcal{N}_n$. Существуют матрицы P, $Q \in GL_n(\mathbb{F})$, такие что PAP^{-1} и QBQ^{-1} – верхнетреугольные матрицы с нулевыми диагональными элементами (см., например, [22, следствие 1 из теоремы 6.7.3]). Очевидно, что $E_{1n}(PAP^{-1}) = (PAP^{-1})E_{1n} = 0$ и $E_{1n}(QBQ^{-1}) = (QBQ^{-1})E_{1n} = 0$. Следовательно, если мы положим $A' = P^{-1}E_{1n}P$ и $B' = Q^{-1}E_{1n}Q$, то $AA' = A'A = 0$ и $BB' = B'B = 0$. Кроме того, $\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} B' = 1$ влечет $\dim(\operatorname{Ker} \mathcal{L}_{A'} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{L}_{B'}) \geqslant n-2$. По условию $n \geqslant 3$, следовательно, существует матрица $T \in GL_n(\mathbb{F})$, такая что первый столбец каждой из матриц $TA'T^{-1}$ и $TB'T^{-1}$ является нулевым. Тогда имеем $(TA'T^{-1})\bar{e} = (TB'T^{-1})\bar{e} = 0$, где $\bar{e} = (1\ 0\ \ldots\ 0)^t \in \mathbb{F}^n$.

1. Сперва рассмотрим случай $n \geqslant 4$. Так как

$$\dim(\operatorname{Ker} \mathcal{R}_{A'} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{R}_{B'}) \geqslant 2,$$

найдется элемент $\bar{x} \in \mathbb{F}^n$, такой что его первая компонента равна 0 и $\bar{x}^t(TA'T^{-1}) = \bar{x}^t(TB'T^{-1}) = 0$. Положим $S = \bar{e}\bar{x}^t$. Тогда $(TA'T^{-1})S = S(TA'T^{-1}) = 0$ и $(TB'T^{-1})S = S(TB'T^{-1}) = 0$. Заметим, что S – ненулевая нильпотентная матрица; итак,

$$A - A' - T^{-1}ST - B' - B$$

– путь в $O(\mathcal{N}_n)$, т.е. $\operatorname{diam} O(\mathcal{N}_n) \leqslant 4$.

Теперь покажем, что $\operatorname{diam} O(\mathcal{N}_n) = 4$. По лемме 4.4, $d(J, J^t) \geqslant 4$ в графе $O(M_n(\mathbb{F}))$. Следовательно, $d(J, J^t) \geqslant 4$ и в графе $O(\mathcal{N}_n)$. Последовательность

$$J - E_{1n} - E_{23} - E_{n1} - J^t$$

показывает, что расстояние 4 реализуется.

2. Пусть теперь $n = 3$. Так как

$$\dim \operatorname{Ker} TA'T^{-1} = \dim \operatorname{Ker} TB'T^{-1} = 2,$$

то аналогично предыдущему случаю находим такие элементы $\bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{F}^3$ с нулевой первой компонентой, что $\bar{y}^t(TA'T^{-1}) = 0$ и $\bar{z}^t(TB'T^{-1}) = 0$. Положим $M = \bar{e}\bar{y}^t$ и $N = \bar{e}\bar{z}^t$. Имеем $(TA'T^{-1})M = M(TA'T^{-1}) = 0$ и $(TB'T^{-1})N = N(TB'T^{-1}) = 0$. Непосредственная проверка показывает, что M и N – матрицы, в которых существуют ненулевые элементы, и они расположены на позициях с индексами (1,2) и (1,3). Тогда M и N – ненулевые нильпотентные матрицы, кроме того, $MN = NM = 0$. Следовательно,

$$A - A' - T^{-1}MT - T^{-1}NT - B' - B$$

– путь в $O(\mathcal{N}_3)$, т.е. $\operatorname{diam} O(\mathcal{N}_3) \leqslant 5$.

Теперь покажем, что $\operatorname{diam} O(\mathcal{N}_3) = 5$. Для этого вычислим расстояние между матрицами J и J^t. Из доказательства леммы 4.4 видно, что

$$O_{\mathcal{N}_3}(J) = \{\alpha E_{13} | \alpha \in \mathbb{F}\} \text{ и } O_{\mathcal{N}_3}(J^t) = \{\alpha E_{31} | \alpha \in \mathbb{F}\}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$O_{M_3(\mathbb{F})}(E_{13}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F} \right\},$$

$$O_{M_3(\mathbb{F})}(E_{31}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ b_3 & b_4 & 0 \end{pmatrix} \middle| b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{F} \right\},$$

откуда ясно, что

$$O_{M_3(\mathbb{F})}(\{E_{13}, E_{31}\}) = \{\beta E_{22} \,|\, \beta \in \mathbb{F}\} \text{ и } O_{\mathcal{N}_3}(\{E_{13}, E_{31}\}) = 0.$$

Из этого следует, что $d(J, J^t) \geqslant 5$ в $O(\mathcal{N}_3)$. Последовательность

$$J - E_{13} - E_{23} - E_{21} - E_{31} - J^t$$

показывает, что расстояние 5 реализуется. □

Следствие 5.10. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $n \geqslant 3$. Если NT_n – подалгебра нильтреугольных матриц в $M_n(\mathbb{F})$, то* $\operatorname{diam} O(NT_n) = 2$.

Доказательство. Нижняя оценка $\operatorname{diam} O(NT_n) \geqslant 2$ следует из некоммутативности рассматриваемой алгебры. Для доказательства верхней оценки, как и доказательстве теоремы 5.9, заметим, что для произвольной матрицы $A \in NT_n$ справедливы равенства $AE_{1n} = E_{1n}A = 0$.

Это означает, что любые две вершины B, C в графе $O(NT_n)$ можно соединить путем $B - E_{1n} - C$ длины 2. Следовательно, $\operatorname{diam} O(NT_n) = 2$. □

Про матрицы специального вида иногда можно еще до вычислений сказать, что расстояние между ними меньше, чем диаметр графа.

Теорема 5.11. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– поле и* $n \geqslant 3$. *Если* M, $N \in M_n(\mathbb{F})$ *– две ненулевые матрицы, такие что* $M^2 = N^2 = 0$, *то* $d(M,N) \leqslant 3$ *в* $O(M_n(\mathbb{F}))$.

Доказательство. Ясно, что $\dim \operatorname{Ker} M$ и $\dim \operatorname{Ker} N$ больше или равны $n/2$. Если $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_M \cap \operatorname{Ker} \mathcal{L}_N \neq \{0\}$ и $\operatorname{Ker} \mathcal{R}_M \cap \operatorname{Ker} \mathcal{R}_N \neq \{0\}$, то по лемме 5.8 получаем, что $d(M,N) \leqslant 2$.

Теперь без ограничения общности предположим, что

$$\operatorname{Ker} \mathcal{L}_M \cap \operatorname{Ker} \mathcal{L}_N = \{0\}$$

(если $\operatorname{Ker} \mathcal{R}_M \cap \operatorname{Ker} \mathcal{R}_N = \{0\}$, будем использовать M^t и N^t вместо M и N). Тогда получаем, что $n = 2r$ для некоторого целого $r \geqslant 2$, и $\dim \operatorname{Ker} M = \dim \operatorname{Ker} N = r$. Если W_1 и W_2 – два базиса для $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_M$ и $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_N$ соответственно, то $W_1 \cup W_2$ – базис для $\mathbb{F}^n$. Так как $M^2 = N^2 = 0$, используя базис $W_1 \cup W_2$, мы находим матрицу $P \in GL_n(\mathbb{F})$, такую что $PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & M_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $PNP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N_1 & 0 \end{pmatrix}$ для некоторых матриц $M_1, N_1 \in GL_r(\mathbb{F})$. Несложно заметить, что матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ ортогональные PMP^{-1} и матрицы $B \in M_n(\mathbb{F})$ ортогональные PNP^{-1} имеют вид $A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & 0 \end{pmatrix}$ соответственно, где $A_1, B_1 \in M_r(\mathbb{F})$. Из этого следует, что $d(M,N) \geqslant 3$. Если взять A и B, такие что $A_1 B_1 = B_1 A_1 = 0$, то получим путь $M - P^{-1}AP - P^{-1}BP - N$. Значит, $d(M,N) = 3$. □

§6. Открытые вопросы и проблемы

В данной работе мы пытались исследовать связи между различными алгебраическими структурами и их графами, поэтому ключевыми являются следующие вопросы.

Вопрос 6.1. Какие общие свойства сохраняют алгебраические структуры, имеющие изоморфные графы делителей нуля?

Вопрос 6.2. Какие общие свойства сохраняют алгебраические структуры, имеющие изоморфные графы коммутирований?

Вопрос 6.3. Какие общие свойства сохраняют алгебраические структуры, имеющие изоморфные графы ортогональности?

Вопрос 6.4. При каких условиях из изоморфности графов (делителей нуля, коммутирований, ортогональности) следует изоморфизм данных структур?

Вопрос 6.5. Как связана структура графа со структурой данного объекта? Что можно сказать об этом объекте по структуре его графа?

Вопрос 6.6. Можно ли классифицировать алгебраические структуры по их графам?

Литература

1. A. Abdollahi, *Commuting graphs of full matrix rings over finite fields.* — Linear Algebra Appl. **428** (2008), 2947–2954.
2. A. Abdollahi, S. Akbari, H. R. Maimani, *Non-commuting graph of a group.* — J. Algebra **298**, No. 2 (2006), 468–492.
3. S. Akbari, H. Bidkhori, A. Mohammadian, *Commuting graphs of matrix algebras.* — Commun. Algebra **36** (2008), 4020–4031.
4. S. Akbari, M. Ghandehari, M. Hadian, A. Mohammadian, *On commuting graphs of semisimple rings.* — Linear Algebra Appl. **390** (2004), 345–355.
5. S. Akbari, H. R. Maimani, S. Yassemi, *When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph.* — J. Algebra **270** (2003), 169–180.
6. S. Akbari, A. Mohammadian, *On the zero-divisor graph of a commutative ring.* — J. Algebra **274** (2004), 847–855.
7. S. Akbari, A. Mohammadian, *Zero-divisor graphs of non-commutative rings.* — J. Algebra **296** (2006), 462–479.
8. S. Akbari, A. Mohammadian, *On zero-divisor graphs of finite rings.* — J. Algebra **314** (2007), 168–184.
9. S. Akbari, A. Mohammadian, H. Radjavi, P. Raja, *On the diameters of commuting graphs.* — Linear Algebra Appl. **418** (2006), 161–176.
10. S. Akbari, P. Raja, *Commuting graphs of some subsets in simple rings.* — Linear Algebra Appl. **416** (2006), 1038–1047.
11. D. F. Anderson, A. Frazier, A. Lauve, P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring,* II. — Lect. Notes Pure Appl. Math., **220**, Marcel Dekker, New York (2001), pp. 61–72.
12. D. F. Anderson, R. Levy, J. Shapiro, *Zero-divisor graphs, von Neumann regular rings, and Boolean algebras.* — J. Pure Appl. Algebra **180**, No. 3 (2003), 221–241.
13. D. F. Anderson, P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring.* — J. Algebra **217** (1999), 434–447.
14. М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру.* Мир, М., 1972.

15. J. K. Baksalary, J. Hauke, *A further algebraic version of Cochran's theorem and matrix partial orderings.* — Linear Algebra Appl. **127** (1990), 157–169.
16. I. Beck, *Coloring of Commutative Rings.* — J. Algebra **116** (1988), 208–226.
17. G. Dolinar, B. Kuzma, P. Oblak, *On maximal distances in a commuting graph.* — Electron. J. Linear Algebra **23** (2012), 243–256.
18. G. Dolinar, A. E. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak, *Commuting graphs and extremal centralizers.* — Ars Math. Contemp. **7**, No. 2 (2014), 453–459.
19. G. Dolinar, A. E. Guterman, B. Kuzma, P. Oblak, *Extremal matrix centralizers.* — Linear Algebra Appl. **438**, No. 7 (2013), 2904–2910.
20. D. Dolzan, P. Oblak, *Commuting graph of matrices over semirings.* — Linear Algebra Appl. **435** (2011), 1657–1665.
21. Ф. Харари, *Теория графов.* Мир, М., 1973.
22. I. N. Herstein, *Topics in Algebra.*, 2-nd edition. Wiley, 1975.
23. M. Giudici, A. Pope, *The diameters of commuting graphs of linear groups and matrix rings over the integers modulo m.* — Australasian J. Combinatorics **48** (2010), 221–230.
24. L. C. Grove, *Algebra*, AP, New-York, 1980.
25. А. Э. Гутерман, М. А. Ефимов, *Монотонные отображения матриц индекса* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **405** (2012), 67–96.
26. A. Iranmanesh, A. Jafarzadeh, *On the commuting graph associated with the symmetric and alternating groups.* — J. Alg. Appl. **7** (2008), 129–146.
27. D. C. Kleinecke, *On operator commutators.* — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 535–536.
28. T. G. Lucas, *The diameter of a zero divisor graph.* — J. Algebra **301** (2006), 174–193.
29. A. R. Moghaddamfar, *About noncommuting graphs.* — J. Sib. Math. **47**, No. 5 (2006), 911–914.
30. A. Mohammadian, *On commuting graphs of finite matrix rings.* — Commun. Algebra **38** (2010), 988–994.
31. P. G. Ovchinnikov, *Automorphisms of the poset of skew projections.* — J. Funct. Analysis **115** (1993), 184–189.
32. Ф. В. Широков, *Доказательство гипотезы Капланского.* — Усп. матем. наук **11**, вып. 4 (70) (1956), 167–168.
33. Д. А. Супруненко, Р. А. Тышкевич, *Перестановочные матрицы.* Наука и Техника, Минск, 1966.
34. P. Šemrl, *Order-preserving maps on the poset of idempotent matrices.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), 481–490.
35. O. Taussky, *Commutativity of finite matrices.* — Amer. Math. Monthly **64** (1957), 239–255.
36. J. H. M. Wedderburn, *Lectures on Matrices.* Amer. Math. Society Colloquium Publications, vol. XVII, 1934.

Bakhadly B. R., Guterman A. E., Markova O. V. Graphs defined by orthogonality.

The notion of graph generated by the mutual orthogonality relation for the elements of an associative ring is introduced. The main attention is paid to the commutative rings, the matrix ring over a field and its various subrings and subsets. In particular, the diameters of the orthogonality graphs of the full matrix algebra and its subsets consisting of diagonal, diagonalizable, triangularizable, and nilpotent matrices over an arbitrary field are computed.

Московский
государственный университет
им. М .В. Ломоносова,
механико-математический факультет
Москва
E-mail: alexander.guterman@gmail.com

Поступило 2 ноября 2014 г.