Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Р. Р. Ахунов, С. П. Куксенко, Т. Р. Газизов

МНОГОКРАТНОЕ РЕШЕНИЕ СЛАУ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ С ПЕРЕФОРМИРОВАНИЕМ МАТРИЦЫ ПРЕДОБУСЛОВЛИВАНИЯ

§1. Введение

В некоторых задачах, например, в задаче вычисления емкостных матриц полосковых структур в диапазоне параметров требуется решать системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида $Ax = b$ с квадратной и плотной матрицей A порядка N. Такие задачи очень затратны по времени. Но в некоторых частных случаях эти затраты могут быть снижены. Так, при изменении значения диэлектрической проницаемости диэлектриков происходят изменения элементов матрицы только в нижней части ее главной диагонали. При этом возможно использование подхода, основанного на блочном LU-разложении [1, 2]. В общем же случае при изменении размеров структуры происходит изменение элементов, расположенных в различных местах матрицы. Поэтому нельзя использовать упомянутый подход, но можно использовать итерационные методы. В работе [3] показана возможность существенного ускорения многократного решения СЛАУ при использовании метода BiCGStab [4] с предобусловливанием. При этом матрица предобусловливания M формировалась из матрицы первой СЛАУ с помощью ILU(0)-разложения. Для ускорения процесса в качестве вектора начального приближения текущей СЛАУ использовалось решение предыдущей. Также было показано, что эффективность метода снижается, если увеличивается разница между первой и текущей матрицами СЛАУ. Это ведет к росту

Ключевые слова: вычислительные затраты, системы линейных алгбраичесих уравнений, блочное LU-разложение, предобусловливание, многократное решение, матрица емкости, микрополосковые линии.

Вычисление емкости микрополосковой линии методом моментов выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No 14-19-01232) в ТУСУРе. Алгоритм для ускоренного решения СЛАУ разработан в рамках выполнения государственного задания No 8.1802.2014/К Минобрнауки России и грантов РФФИ 14-07-31267 и 14-29-09254.

числа итераций и замедляет решение итерационным методом. Чтобы избежать этого, было предложено переформировывать матрицу M для получения еще большего ускорения, когда при решении текущей СЛАУ не обеспечивается быстрая сходимость метода. Однако данный подход пока не был исследован.

Цель данной работы – исследовать многократное решение СЛАУ итерационным методом с переформированием матрицы предобусловливания.

§2. Алгоритм многократного решения СЛАУ итерационным методом с переформированием матрицы предобусловливания

Для формулировки условия переформирования матрицы предобусловливания можно воспользоваться различными критериями. В данной работе предлагается использовать переформирование, когда текущее число итераций N_{it} становится выше заданного порога N_{it}^{MAX}. Соответствующий алгоритм итерационного решения m СЛАУ с использованием переформирования матрицы M по значению порога числа итераций N_{it}^{MAX} имеет следующий вид.

1. Вычислить матрицу M из матрицы A_1 с помощью ILU(0).
2. Положить $N_{it} = 0$.
3. Для i от 1 до m,
4. если $N_{it} > N_{it}^{\mathrm{MAX}}$ и $i > 1$, то
5. вычислить матрицу M по матрице A_i с помощью ILU(0).
6. Итерационно вычислить x_i из уравнения $MA_ix_i = Mb$ с заданной точностью.
7. Увеличить i.

В данном алгоритме в качестве способа формирования матрицы предобусловливания использовано ILU(0)-разложение. Предфильтрация не использовалась, поскольку при большом числе СЛАУ алгоритм многократного решения эффективен при нулевом допуске обнуления [5]. В приведенном алгоритме на шаге 1 происходит первичное формирование матрицы предобусловливания M. Если текущее число итераций превышает порог (шаг 4), то происходит переформирование матрицы M (шаг 5) и дальнейшее её использование при решении следующей системы.

Рассмотрим влияние порога числа итераций на решение. Если порог слишком низок, то алгоритм будет вызывать много переформирований (чтобы поддерживать низкое число итераций), следовательно, общие затраты времени будут большими. При слишком высоком пороге переформирований будет мало, но при этом число итераций при решении СЛАУ будет большим, следовательно, общие затраты времени также будут большими. Из приведенных соображений следует, что, возможно, существует некоторый оптимальный порог числа итераций, при котором общие затраты времени минимальны. Для проверки этого предположения и для первого исследования предложенного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент.

§3. Вычислительный эксперимент

Использовался персональный компьютер (без распараллеливания, т.е. работало одно ядро процессора) с параметрами: платформа – AMD FX(tm)-8320 Eight-Core Processor; частота процессора – 3.50 ГГц; объем ОЗУ – 16 Гбайт; число ядер – 8; операционная система – Windows 7x64.

Исследовалась структура из одного проводника на диэлектрической подложке над идеально проводящей плоскостью (рис. 1) в системе TALGAT [6] по математическим моделям на основе метода моментов [7]. Вычислялись 100 емкостных матриц, полученных путем изменения высоты проводника (t) в диапазоне 6–106 мкм (на 1767%). (Именно это изменение показало наиболее сильное влияние на рост числа итераций по данным работы [3].) Число сегментов на границах структуры не менялось, чтобы сохранить один и тот же порядок (1600) матриц СЛАУ. В качестве итерационного метода использовался метод BiCGStab. Итерации продолжались, пока относительная норма вектора невязки была больше 10^{-8}. В качестве начального приближения использовалось решение предыдущей системы (для первой системы использовался единичный вектор) [3].

Были проведены вычисления с различными значениями порога переформирования. На рис. 2 приведены изменения числа итераций при минимальном (N_{it}^{MAX}=2) и максимальном (N_{it}^{MAX}=13) значениях порога.

Из рис. 2 видно, что значение порога сильно влияет на процесс многократного решения. Так, при минимальном значении порога число переформирований велико (12 – по числу минимумов на нижнем

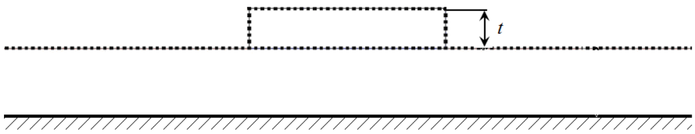

Рис. 1. Вид поперечного сечения исследуемой структуры в системе TALGAT.

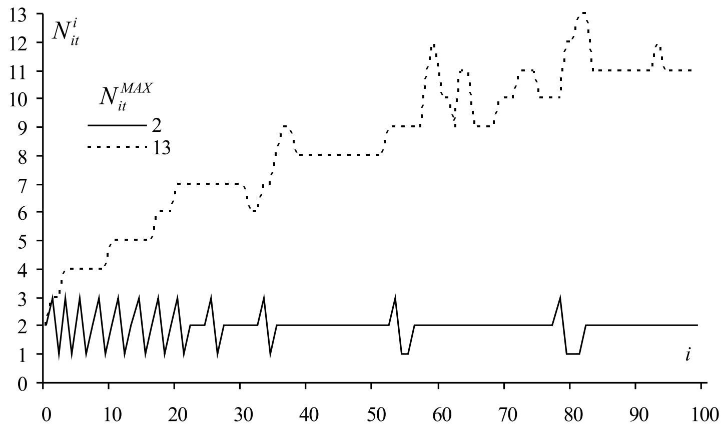

Рис. 2. Зависимости числа итераций при решении i-й СЛАУ от i при $N_{it}^{\mathrm{MAX}} = 2$ и $N_{it}^{\mathrm{MAX}} = 13$.

графике), а при максимальном оно равно нулю. График для N_{it}^{MAX}=2 показателен частотой переформирований: она максимальна в начале решения, но уменьшается с ростом i, тем самым, отражая способность каждой вновь сформированной матрицы предобусловливания обеспечить решение с изменяющимися матрицами СЛАУ не более чем за 2 итерации. Для более детального анализа в табл. 1 приведены характеристики решения для каждого значения N_{it}^{MAX}.

Проанализируем данные табл. 1. При минимальном значении порога происходит много переформирований. Они увеличивают общее время решения, поскольку время одного переформирования значительно (около 3500 мс). Среднее число требуемых итераций на одно решение

Таблица 1. Характеристики многократного решения СЛАУ с переформированием матрицы предобусловливания по порогу числа итераций при различных его значениях

Значение порога переформирования матрицы M (N_{it}^{MAX})	Число переформирований матрицы M	Сумма итераций решения всех СЛАУ	Время решения всех СЛАУ, мс	Ускорение относительно алгоритма без переформирования матрицы M
2	12	196	53673	0.77
3	5	249	30701	1.35
4	2	307	24039	1.72
5	2	415	29504	1.40
6	1	416	26040	1.59
7	1	387	24571	1.68
8	1	389	24978	1.66
9	1	487	28903	1.43
10	1	487	29018	1.43
11	1	496	29303	1.41
12	1	666	37122	1.11
13	0	825	41364	1.00

очень мало (около 2), поскольку ограничено порогом. Поэтому вклад итераций в общее время решения мал, а основная часть времени расходуется на переформирования. Примечательно, что они избыточны, поскольку увеличивают время решения относительно алгоритма без переформирований (ускорение 0.77). При максимальном значении порога переформирований нет (ускорение 1.00), и общие затраты времени определяются затратами на итерации. Но эти затраты значительны, несмотря на малое время (около 50 мс) одной итерации, поскольку среднее число итераций увеличивается в 4 раза. Из анализа данных для промежуточных значений порога видно, что существуют его оптимумы: глобальный (4), при котором достигается максимальное ускорение (1.72), и локальный (7) с несколько меньшим ускорением (1.68). Такие ускорения представляются существенными, если учесть, что они получены лишь за счет переформирований матрицы предобусловливания (дополнительно к ускорениям за счет первого предобусловливания, а также использования решения предыдущей СЛАУ в качестве начального приближения для последующей, детально оцененным в [3]).

§4. Заключение

Представлен алгоритм многократного решения СЛАУ итерационным методом BiCGStab с переформированием матрицы предобусловливания при увеличении числа итераций выше заданного порога. Алгоритм апробирован на вычислении емкостных матриц микрополосковой линии при изменениях её толщины, значительно изменяющих элементы матриц СЛАУ. Показано, как эти изменения отражаются на частоте переформирований в ходе многократного решения. Выявлен многоэкстремальный характер зависимости общего времени решения от порога. Получено существенное ускорение (1.72) по сравнению с решением без переформирований, показывающее перспективность предложенного алгоритма.

Литература

1. С. П. Куксенко, Т. Р. Газизов, *Совершенствование алгоритма вычисления методом моментов ёмкостных матриц структуры проводников и диэлектриков в диапазоне значений диэлектрической проницаемости.* — Электромагн. волны и электрон. системы **10** (2012), 13–21.
2. Р. С. Суровцев, С. П. Куксенко, Т. Р. Газизов, *Ускорение многократного решения СЛАУ с частично изменяющейся матрицей.* — Докл. Томского гос. унив. систем управл. и радиоэлектр. **2** (24), часть 1 (2011), 141–144.
3. Р. Р. Ахунов, С. П. Куксенко, Т. Р. Газизов, *Ускорение многократного решения СЛАУ итерационным методом при вычислении ёмкости микрополосковой линии в широком диапазоне изменения её размеров.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 32–41.
4. H. Van der Vorst, *Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for solution of nonsymmetric linear systems.* — SIAM J. Sci. Stat. Comput. **13** (1992), 631–644.
5. Р. Р. Ахунов, С. П. Куксенко, В. К. Салов, Т. Р. Газизов, *Многократное решение СЛАУ с частично изменяющейся матрицей итерационным методом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 16–25.
6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No. 2013619615. TALGAT 2012. Авторы: Т. Р. Газизов, А. О. Мелкозеров, Т. Т. Газизов, С. П. Куксенко, А. М. Заболоцкий, Р. И. Аширбакиев, Ев. В. Лежнин, В. К. Салов, Ег. В. Лежнин, П. Е. Орлов, И. Ф. Калимулин, Р. С. Суровцев, М.

Е. Комнатнов, Р. Р. Газизов, Р. Р. Ахунов, Заявка No. 2013617773. Дата поступления 29 августа 2013 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11 октября 2013 г.

7. T. R. Gazizov, *Analytic expressions for Mom calculation of capacitance matrix of two dimensional system of conductors and dielectrics having arbitrary oriented boundaries.* — Proc. 2001 IEEE EMC Symposium (Montreal, Canada, August 13–17), **1** (2001), pp. 151–155.

Akhunov R. R., Kuksenko S. P., Gazizov T. R. Multiple solution of systems of linear algebraic equations by an iterative method with recomputed preconditioner.

An algorithm for multiple solution of systems of linear algebraic equations by preconditioned BiCGStab method is proposed. When the number of iterations for solving a current system becomes too large, the preconditioner is recomputed. Results of numerical experiments on computing the capacitance matrices of a microstrip line in a wide range of its sizes, demonstrating the possibility of a considerable reduction of the total solution time, are presented.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники,
кафедра телевидения и управления,
пр. Ленина, 40, г. Томск 634050, Россия
E-mail: arr@pop3.ru
E-mail: ksergp@sibmail.com
E-mail: talgat@tu.tusur.ru

Поступило 2 октября 2014 г.