Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Р. Р. Ахунов, С. П. Куксенко, Т. Р. Газизов

УСКОРЕНИЕ МНОГОКРАТНОГО РЕШЕНИЯ СЛАУ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ЕМКОСТИ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЕЕ РАЗМЕРОВ

Существуют затратные по времени задачи, в которых необходимо многократное решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида $Ax = b$ с квадратной и плотной матрицей A размера $N \times N$, например, для вычисления емкостных матриц полосковых структур в диапазоне изменения их параметров. При этом, если изменяется только часть элементов матрицы СЛАУ и их положение в ней известно, то многократное решение подобных СЛАУ можно ускорить. Так, в работах [1, 2] рассмотрен алгоритм, использующий блочное LU-разложение, для вычисления емкостных матриц, полученных из одной и той же структуры при изменении значения диэлектрической проницаемости диэлектриков. Данный алгоритм основан на том, что при этом изменяются только элементы, стоящие на главной диагонали нижней правой подматрицы (с индексами элементов матрицы СЛАУ больше N_c), соответствующие подынтервалам диэлектрик-диэлектрик (рис. 1). В упомянутых работах была показана возможность существенного снижения временных затрат. Однако часто необходимо моделирование также и при изменении размеров структуры, что приводит к изменению элементов матрицы, расположенных в произвольных местах [3]. В данном случае этот усовершенствованный алгоритм неприменим. Поэтому была рассмотрена возможность многократного решения СЛАУ итерационным методом и был предложен алгоритм

Ключевые слова: многократное решение, система линейных алгебраических уравнений, итерационный метод, предобусловливание, начальное приближение, матрица емкостей, микрополосковая линия, изменение размеров.

Вычисление емкости микрополосковой линии методом моментов выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-01232) в ТУСУРе. Алгоритмы для ускоренного решения СЛАУ разработаны в рамках выполнения государственного задания № 8.1802.2014/К Минобрнауки России. и гранта РФФИ 14-07-31267.

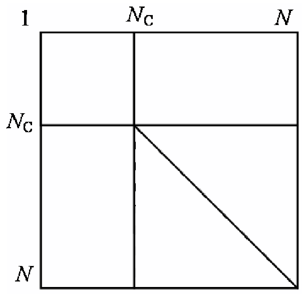

Рис. 1. Структура матрицы СЛАУ при вычислении емкостной матрицы.

многократного итерационного решения СЛАУ с частично изменяющейся матрицей [4]. В этом алгоритме матрица предобусловливателя M формируется из первой СЛАУ с помощью ILU(0)-разложения. Далее эта матрица, без её пересчета, используется при решении последующих СЛАУ, уменьшая тем самым общее время решения с приемлемой точностью. В [4] было предположено, что аналогичный алгоритм применим и при изменении размеров анализируемой структуры. В качестве первого шага в этом направлении было исследовано уменьшение нормы невязки 10-кратного решения систем линейных уравнений, полученных при малом изменении нескольких параметров структуры [5].

Цель данной работы – исследовать возможность многократного решения СЛАУ итерационным методом при вычислении ёмкости микрополосковой линии в широком диапазоне изменения её размеров.

Для ускорения итерационного процесса в данной работе рассматривались два способа. Первый – это использование в качестве вектора начального приближения x^0 вектора решения предыдущей СЛАУ, т.е. $x_i^0 = x_{i-1}$ (для первой СЛАУ использовался единичный вектор). Второй способ – это использование матрицы предобусловливания M, полученной при решении первой СЛАУ, т.е. $M_i = M_0$. В вычислительных экспериментах в исходном варианте 1 ускорение не использовано. В вариантах 2, 3 указанные способы использованы отдельно, а в варианте 4 – совместно.

Для оценки изменений в матрицах СЛАУ использовались нормы матриц изменений $\|\Delta A_i\|_1$ и $\|\Delta A_i\|_\infty$, где ΔA_i – матрица изменений

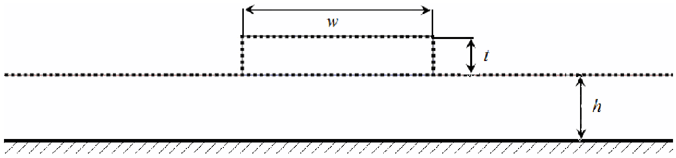

Рис. 2. Вид поперечного сечения исследуемой структуры в системе TALGAT и изменяемые размеры.

($\Delta A_i = A_i - A_1$). Расчет норм выполнялся по формулам:

$$\|\Delta A_i\|_1 = \max_k \sum_j |a_{kj}|, \quad \|\Delta A_i\|_\infty = \max_j \sum_k |a_{kj}|.$$

Использовался персональный компьютер (без распараллеливания, т.е. работало одно ядро процессора) с параметрами: платформа – AMD FX(tm)-8320 Eight-Core Processor; частота процессора – 3.50 ГГц; объем ОЗУ – 16 Гбайт; число ядер – 8; операционная система – Windows 7x64.

Исследовалась структура из одного проводника на диэлектрической подложке над идеально проводящей плоскостью (рис. 2), полученная в системе TALGAT [6]. Целью эксперимента являлась оценка временных затрат, необходимых для вычисления 100 емкостных матриц, полученных путем изменения одного из размеров структуры: высоты диэлектрика h (в диапазоне 12–112 мкм или на 933%); ширины проводника w (в диапазоне 18–118 мкм или на 656%); высоты проводника t (в диапазоне 6–106 мкм или на 1767%). Количество сегментов на каждом отрезке структуры не менялось, что обеспечивало постоянство порядка (1600) матриц СЛАУ, нужное для корректного сравнения. В качестве итерационного метода был выбран метод BiCGStab [7], который использовался в работах [4, 8] и хорошо зарекомендовал себя. Итерации продолжались, пока относительная норма вектора невязки была больше 10^{-8}. Для проведения сравнения использовался метод исключения Гаусса.

На рис. 3 приведено изменение количества итераций (N_{it}) с ростом количества решаемых СЛАУ (i) для каждого из вариантов.

Анализ полученных данных позволяет сделать несколько выводов. В варианте 1 количество итераций велико и в среднем постоянно, поскольку не используются способы ускорения решения. В варианте 2,

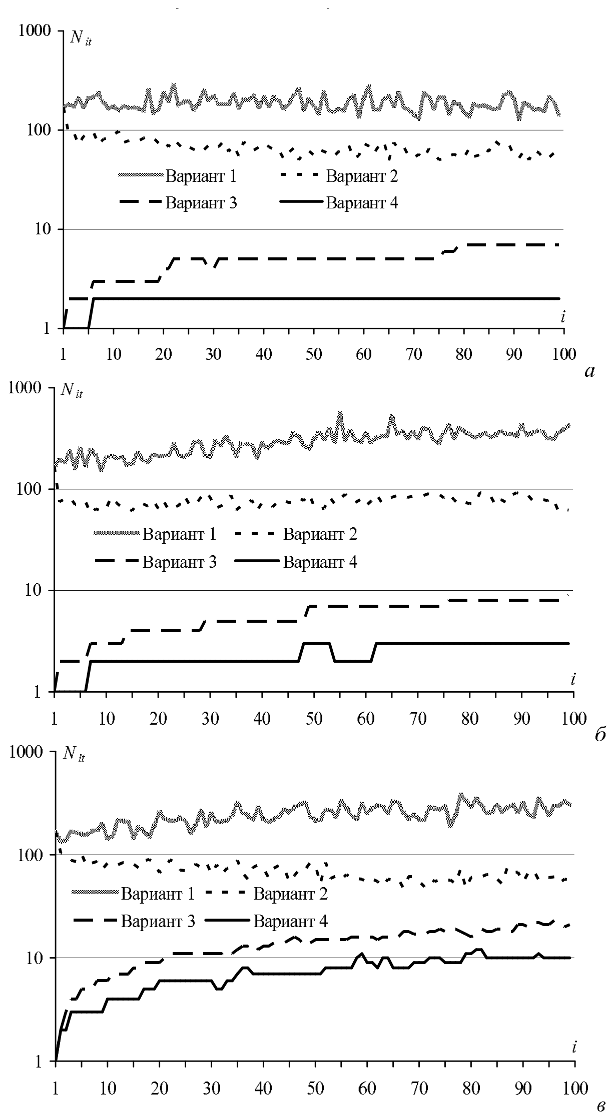

Рис. 3. Количество итераций при решении i-й СЛАУ методом BiCGStab в зависимости от i для вариантов 1–4 при изменении: а – h; б – w; в – t.

использующем в качестве начального приближения вектор решения предыдущей СЛАУ, наблюдается небольшое и постепенное уменьшение количества итераций и, следовательно, уменьшение времени решения СЛАУ. В варианте 3 используется матрица предобусловливания, сформированная из матрицы первой СЛАУ. При решении первой СЛАУ количество итераций равно 1, а при решении последующих СЛАУ оно растет из-за накопления изменений в матрице. В варианте 4 количество итераций минимально, что, соответственно, приводит к снижению общего времени решения всех СЛАУ и доказывает эффективность совместного использования способов ускорения. Также следует отметить, что при изменении разных размеров число итераций для решения СЛАУ разное. При изменении h и w количество итераций меньше, чем при изменении t. Это может быть связано с гораздо большими изменениями в матрице СЛАУ. Для их оценки вычислены отношения норм матриц $\|\Delta A_i\|_1/\|\Delta A_1\|_1$, $\|\Delta A_i\|_\infty/\|\Delta A_1\|_\infty$ в зависимости от количества решаемых СЛАУ. Результаты приведены на рис. 4. Видно, что для t изменения больше, чем для h и w.

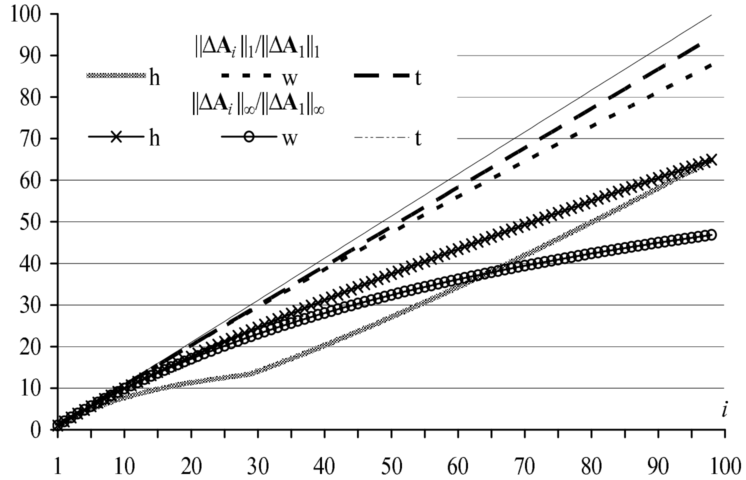

Рис. 4. Зависимости отношений норм матриц от количества СЛАУ, полученных при изменении h, w, t.

Для $i = 100$ визуальные изменения элементов матрицы в сравнении с элементами матрицы при $i = 1$ показаны на рис. 5. Как видно, изменение каждого размера имеет свою специфику.

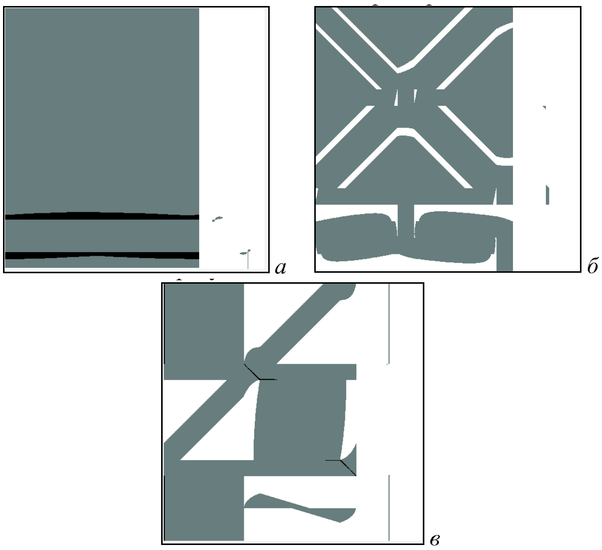

Рис. 5. Визуальное представление (портреты матриц) измененных элементов матрицы (если максимально измененный элемент принять за 100%, то: черный цвет – элементы матрицы, изменившиеся на 90–100%; серый цвет – на 10–90%; белый цвет – 0–10%) при изменении размеров: а – h; б – w; в – t.

Отношение времени для решения i-й СЛАУ методом Гаусса (T_{GE}) к времени её решения методом BiCGStab ($T_{BiCGStab}$) в зависимости от i для вариантов 1–4 приведено на рис. 6.

В проведенных тестах вариант 4 показал максимальное ускорение. При небольших изменениях (в пределах 100%) размеров можно получить довольно большое ускорение (10–30 раз). Снижение ускорения к концу многократного решения СЛАУ связано с ростом количества итераций (см. рис. 3) из-за значительного изменения (до 1767%) размеров.

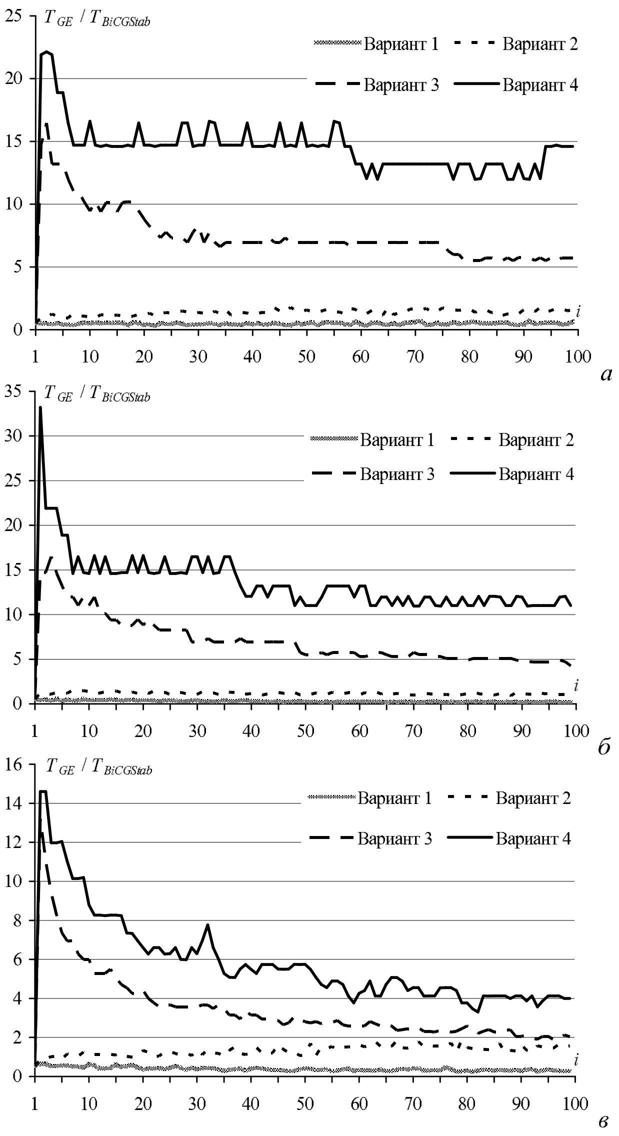

Рис. 6. Отношение времени решения i-й СЛАУ методом Гаусса к времени её решения методом BiCGStab в зависимости от i для вариантов 1–4 при изменении: а – h; б – w; в – t.

Таблица 1. Ускорение решения 100 СЛАУ

Изменяемый параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
h	0.48	1.32	6.49	11.77
w	0.31	1.15	5.87	10.98
t	0.37	1.28	2.87	4.92

Отношения общего времени решения методом Гаусса к времени решения итерационным методом для 100 СЛАУ приведены в табл. 1.

Из таблицы 1 видно, что лучшие результаты показал вариант 4 с совместным использованием двух способов ускорения. Вариант 1 показал замедление решения, поскольку в нем не использованы способы ускорения. Для варианта 4 при изменении t ускорение меньше, чем при изменении h и w. Это объясняется ростом количества итераций из-за накопления изменений элементов в матрице. При этом применяемые способы ускорения недостаточно эффективны.

В заключение отметим следующее. Использование предыдущего решения в качестве начального приближения решения текущей СЛАУ (вариант 2) значительно ускоряет решение по сравнению с исходным вариантом 1, но незначительно по сравнению с методом исключения Гаусса. Однако это ускорение увеличивается с ростом i. Использование предобусловливания первой матрицы СЛАУ (вариант 3) дает гораздо большее ускорение, чем вариант 2, особенно при малых i. Однако с ростом i это ускорение в несколько раз снижается, вплоть до значений близких к варианту 2. Использование предыдущего решения в качестве начального приближения решения текущей СЛАУ совместно с предобусловливанием (вариант 4) дает полезный системный эффект: оно увеличивает ускорение примерно в 2 раза и несколько замедляет уменьшение ускорения с ростом i. Кроме того, нельзя не отметить также тот факт, что ускорение решения (как i-й СЛАУ, так и i СЛАУ) сильно зависит не только от i, но также и от шага изменения параметра и самого параметра. Более точное выявление этой зависимости возможно лишь для конкретной задачи, поскольку сильно зависит от её специфики. В данной работе рассмотрены изменения различных параметров и показано, что среди них могут быть такие, которые требуют дальнейшего усовершенствования вычислений.

Оно возможно за счет лучшего выбора начального приближения или, что более вероятно, построения алгоритмов адаптивного перезапуска формирования матрицы предобусловливания или её корректировки с учетом специфики изменения элементов исходной матрицы с целью предотвращения роста числа итераций [9]. Еще одним направлением исследований может быть использование другого способа формирования матрицы предобусловливания. Однако, в любом случае, результаты, полученные в этой работе, показали перспективность использования итерационного метода с рассмотренными способами ускорения при последовательном решении большого числа СЛАУ с малыми изменениями произвольных элементов матрицы.

Литература

1. С. П. Куксенко, Т. Р. Газизов, *Совершенствование алгоритма вычисления методом моментов ёмкостных матриц структуры проводников и диэлектриков в диапазоне значений диэлектрической проницаемости.* — Электромагн. волны электр. сист. **10** (2012), 13–21.
2. Р. С. Суровцев, С. П. Куксенко, Т. Р. Газизов, *Ускорение многократного решения СЛАУ с частично изменяющейся матрицей.* Докл. Томского гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники **2** (24), часть 1 (2011), 141–144.
3. T. R. Gazizov, *Analytic expressions for Mom calculation of capacitance matrix of two-dimensional system of conductors and dielectrics having arbitrary oriented boundaries.* In: Proc. 2001 IEEE EMC Symp. (Montreal, Canada, August 13–17, 2001), Vol. 1, 2001, pp. 151–155.
4. Р. Р. Ахунов, С. П. Куксенко, В. К. Салов, Т. Р. Газизов, *Многократное решение СЛАУ с частично изменяющейся матрицей итерационным методом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 16–25.
5. V. K. Salov, T. R. Gazizov, O. A. Nikitina, *Convergence of multiple iterative solution of linear algebraic systems with a fully varying matrix using a single calculated initial preconditioner.* — Innovative Information Technologies: Materials of the International Scientific-Practical Conference (April 21–25, 2014, Prague, Czech Republic), Part 2, 2014, pp. 452–457.
6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No 2013619615. TALGAT 2012. Авторы: Газизов Т. Р., Мелкозеров А. О., Газизов Т. Т., Куксенко С. П., Заболоцкий А. М., Аширбакиев Р. И., Лежнин Ев. В., Салов В. К., Лежнин Ег. В., Орлов П. Е., Калимулин И. Ф., Суровцев Р. С., Комнатнов М. Е., Газизов Р. Р., Ахунов Р. Р. Заявка No 2013617773. Дата поступления 29 августа 2013 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11 октября 2013 г.
7. H. Van der Vorst, *Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for solution of nonsymmetric linear systems.* — SIAM J. Sci. Stat. Comput. **13** (1992), 631–644.

8. S. P. Kuksenko, T. R. Gazizov, *Dense linear system solution by preconditioned iterative methods in computational electromagnetics.* — In: 19th Int. Zurich Symp. Electromagn. Compatibility (2008), pp. 918–921.
9. Р. Р. Ахунов, С. П. Куксенко, Т. Р. Газизов, *Многократное решение СЛАУ итерационным методом с переформированием матрицы предобусловливания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 42–48.

Akhunov R. R., Kuksenko S. P., Gazizov T. R. Acceleration of multiple iterative solution of linear algebraic systems in computing the capacitance of a microstrip line in a wide range of its sizes.

Multiple solution of systems of linear algebraic equations by the BiCGStab method is considered. For the problem of computing the capacitance matrix of a microstrip line in a range of its sizes, two acceleration methods are suggested. The first one consists in using the solution of a previous system as the initial guess for the current system. The second one consists in applying to all systems a preconditioner computed for the first system. The efficiency of these acceleration methods in solving a large series of linear systems with small changes in arbitrary matrix entries is demonstrated on numerical experiments.

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники,
кафедра телевидения и управления,
пр. Ленина, 40, г. Томск 634050, Россия
E-mail: arr@pop3.ru
E-mail: ksergp@sibmail.com
E-mail: talgat@tu.tusur.ru

Поступило 28 августа 2014 г.