Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина

КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ПОЛУГРУПП НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Введение

По известной теореме Фробениуса неприводимая неотрицательная матрица либо примитивна (и тогда некоторая степень этой матрицы не содержит нулей), либо она перестановочно подобна матрице вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

причём в матрице

$$A^r = \begin{pmatrix} A_{11}^{(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{(r)} & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & A_{rr}^{(r)} \end{pmatrix}$$

диагональные блоки примитивны (см, например, [1, с. 60]). Число r, называемое индексом импримитивности, равно количеству собственных значений матрицы, имеющих максимальный модуль. Романовский [2, 3] обнаружил комбинаторную природу индекса импримитивности. Он доказал, выражаясь современным языком, что индекс импримитивности равен наибольшему общему делителю длин контуров графа матрицы.

В работе [4] доказано замечательное обобщение теоремы Фробениуса: всякая неприводимая полугруппа неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов либо содержит положительную матрицу, либо посредством некоторого перестановочного подобия все матрицы полугруппы преобразуются к такому блочному виду, что в каждой блочной строке и каждом блочном столбце есть ровно один ненулевой блок, причём преобразованная полугруппа содержит блочно-диагональную матрицу с положительными диагональными блоками.

Ключевые слова: форма Фробениуса, полугруппа неотрицательных матриц.

Авторы [4] поставили вопрос о комбинаторном доказательстве этой теоремы, полученной ими геометрическими методами. Такое доказательство опубликовано в [5], другое решение вопроса предложено в [6].

В настоящей работе доказываются обобщения теоремы Протасова–Войнова, связанные с отказом от неприводимости полугруппы и допущением нулевых столбцов в матрицах. Основные результаты относятся к полугруппам, которые мы назвали целыми. Как и в работе [5], в определениях и доказательствах используются лишь комбинаторные свойства неотрицательных матриц.

§1. Предварительные замечания

Обозначим через $\overline{P}_n$ мультипликативную полугруппу всех неотрицательных матриц порядка n без нулевых строк. Все изложенные в работе результаты имеют очевидные аналоги, если в качестве основного объекта выбрать матрицы без нулевых столбцов и допустить нулевые строки. Сделанный здесь выбор объясняется тем, что стохастические матрицы, составляющие важный подкласс неотрицательных матриц, обычно определяются как матрицы, в которых строчные суммы элементов равны единице.

Рассмотрим матрицу $A \in \overline{P}_n$. Индекс j назовём A-последователем индекса i, если $(A)_{ij} > 0$. Поскольку в A нет нулевых строк, то для любого индекса существуют A-последователи.

Пусть дано некоторое разбиение множества N. Оно называется устойчивым относительно матрицы A, если A-последователи индексов, лежащих в одном классе разбиения, тоже лежат в одном классе. Бинарное отношение R на множестве $N = \{1, \dots, n\}$ называется устойчивым относительно матрицы A, если последователи сохраняют отношение:

$$iRj,\ (A)_{ik} > 0,\ (A)_{jl} > 0 \Longrightarrow kRl.$$

Если отношение R – эквивалентность, то оно, очевидно, устойчиво в точности тогда, когда устойчиво разбиение множества N на классы эквивалентности R.

Положим что $A(L)$ – множество A-последователей индексов из $L \subseteq N$. Тогда свойство устойчивости разбиения множества N равносильно тому, что всякому классу L разбиения однозначно соответствует класс M, такой, что $A(L) \subseteq M$. Тем самым матрица A определяет отображение на множестве классов разбиения, или, говоря короче,

действует на разбиении как отображение. Если указанное отображение классов биективно, то будем говорить, следуя [1], что A действует на разбиении как перестановка.

Пусть задано разбиение π множества N на классы $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$. Будем говорить, что матрица A, разбитая на блоки A_{st}, согласована с разбиением π, если номера строк, в которых стоит блок A_{st}, принадлежат классу π_s, а номера столбцов – классу π_t. Ясно, что любую матрицу можно посредством перестановочного подобия (симметричной перестановки строк и столбцов) привести к форме, согласованной с разбиением. При этом, если разбиение устойчиво, то каждая блочная строка A содержит единственный ненулевой блок. А именно, блочная строка, отвечающая классу π_s, содержит ненулевой блок в столбце, отвечающем классу π_t, такому, что $A(\pi_s) \subseteq \pi_t$. Из сказанного выше следует

Предложение 1. *Для любой матрицы $A \in \overline{P}_n$ и любого разбиения π множества N следующие условия равносильны:*

1) *разбиение π устойчиво относительно матрицы A;*

2) *матрица A действует на классах разбиения π как отображение;*

3) *форма матрицы A, согласованная с π, содержит в каждой блочной строке ровно один ненулевой блок.*

Доказательство следующей леммы опустим ввиду его простоты.

Лемма 1. *Пусть на конечном множестве X задано многозначное отображение ψ со следующим свойством: для любых $x, y \in X$ множества $\psi(x)$ и $\psi(y)$ непусты и не пересекаются. Тогда множества $\psi(x)$ для всех x одноэлементны и попарно различны, то есть отображение ψ однозначно и является перестановкой на X.*

В дальнейшем под рядом матрицы будем подразумевать её строку или столбец, в случае блочной матрицы – блочную строку или столбец. Количество блочных строк или столбцов будем называть блочным порядком блочной матрицы.

Предложение 2. *Для любой матрицы $A \in \overline{P}_n$ и любого разбиения π множества N следующие утверждения равносильны:*

1) *если индексы i и j лежат в разных классах разбиения π, то A-последователи индексов i и j также лежат в разных классах;*

2) *матрица A действует на разбиении π как перестановка;*

3) *если форма матрицы A согласована с π, то в каждом её блочном ряду содержится ровно один ненулевой блок.*

Доказательство. Докажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). Обозначим через $\psi_A(L)$ множество классов, в которых лежат A-последователи элементов из класса L. Поскольку матрица A не содержит нулевых строк, то множество $\psi_A(L)$ непусто для любого класса L. Предположим, что для различных классов L и M множества $\psi(L)$ и $\psi(M)$ содержат общий класс. Следовательно, некоторые индексы $i \in L$ и $j \in M$ имеют A-последователей в одном классе. Но это противоречит условию 1). Таким образом, многозначное отображение ψ_A, заданное на множестве классов разбиения π, удовлетворяет условию леммы 3; следовательно, оно является перестановкой классов. Остальные импликации предложения 2 очевидны. □

Символом $\mathbb{P}_n$ обозначим полугруппу всех неотрицательных матриц порядка n без нулевых рядов.

Предложение 3. *Если матрица $A \in \mathbb{P}_n$ действует на разбиении π как отображение, то это отображение является перестановкой.*

Доказательство. Согласно предложению 1, в π-форме матрицы A каждая блочная строка содержит единственный ненулевой блок. В этой π-форме не может быть нулевых блочных столбцов, поскольку в A нет нулевых столбцов. Следовательно, каждый блочный ряд содержит ровно один ненулевой блок. Отсюда, по предложению 2, следует доказываемое утверждение. □

§2. Каноническое разбиение. Совместимость и сильная совместимость

Разбиение π множества N назовём устойчивым относительно полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$, если оно устойчиво относительно любой матрицы $A \in \mathcal{P}$. В этом случае все матрицы $\mathcal{P}$ действуют на π как отображения. В частности, если $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$, то, в силу предложения 3, матрицы действуют как перестановки. Если на множестве N задано разбиение π, то посредством одного перестановочного подобия все матрицы $\mathcal{P}$ можно преобразовать к форме, согласованной с π. Если это преобразование выполнено, то будем говорить, что полугруппа $\mathcal{P}$ находится в форме, согласованной с разбиением π.

Индексом импримитивности полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ называется максимальное число $r(\mathcal{P})$ индексов, любые два из которых несовместимы; если любые два индекса совместимы, то $r(\mathcal{P}) = 1$. Характеристика $r(\mathcal{P})$ введена в [4], наше определение сформулировано в слегка отличных терминах.

Напомним, что полугруппа $\mathcal{P}$ называется неприводимой, если для неё не существует собственных инвариантных подмножеств $L \subseteq N$, то есть таких, что $A(L) \subseteq L$ для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$. Равносильное определение состоит в следующем: полугруппа неприводима, если для любых индексов i и j существует $A \in \mathcal{P}$ такая, что $(A)_{ij} > 0$. С последним определением хорошо согласуется понятие неприводимой неотрицательной матрицы: матрица неприводима, если неприводима полугруппа, порождённая этой матрицей.

Приведём основные результаты [4] (в форме, удобной для последующего изложения и несколько отличной от оригинальной).

Теорема 1. *Для неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ существует каноническое разбиение множества N на $r = r(\mathcal{P})$ классов со следующими свойствами.*

1. *Если $r = 1$ (каноническое разбиение состоит из единственного класса), то полугруппа содержит положительную матрицу.*

2. *Матрицы полугруппы действуют на классах канонического разбиения как перестановки.*

3. *Устойчивых (нетривиальных) подразбиений канонического разбиения не существует. Разбиение на r классов, на котором матрицы полугруппы действуют как перестановки, единственно.*

4. *Если $r \geqslant 2$ и полугруппа находится в форме, согласованной с каноническим разбиением, то матрицы полугруппы содержат в каждом блочном ряду ровно один ненулевой блок, причём в полугруппе существует блочно-диагональная матрица, все диагональные блоки которой положительны.*

Замечание 1. Утверждение 3 теоремы 1 можно несколько усилить, а именно: каноническое разбиение является подразбиением любого устойчивого разбиения. Чтобы увидеть это, рассмотрим множество Θ разбиений множества N, устойчивых относительно полугруппы $\mathcal{P}$. Это множество непусто, поскольку содержит тривиальное разбиение, содержащее единственный класс. Введём на Θ отношение порядка, при котором $\beta \leqslant \gamma$, если β – подразбиение γ. Утверждение 3 означает, что

каноническое разбиение является минимальным элементом Θ. На самом деле это разбиение является единственным минимальным, то есть наименьшим, элементом Θ. Действительно, нетрудно проверить, что пересечение устойчивых разбиений устойчиво. Следовательно, упорядоченное множество Θ является нижней полурешёткой и, как всякая конечная нижняя полурешётка, содержит наименьший элемент – такое разбиение δ, что $\delta \leqslant \gamma$ для любого $\gamma \in \Theta$. Каноническое разбиение и является этим наименьшим элементом.

Замечание 2. Пункты 1 и 4 можно дополнить: при $r = 1$ множество положительных матриц образует идеал полугруппы, а при $r \geqslant 2$ каноническая форма полугруппы содержит идеал, составленный из матриц, в которых все ненулевые блоки положительны. Доказательство основано на том, что произведение прямоугольных неотрицательных матриц без нулевых рядов положительно, если один из сомножителей положителен. Отсюда немедленно следует, что при $r = 1$ положительные матрицы образуют идеал. Для случая $r \geqslant 2$ доказано существование блочно-диагональной матрицы с положительными диагональными блоками. Следовательно, множество матриц, ненулевые блоки которых положительны, непусто. Теперь рассмотрим произведение $C = AB$ матриц из $\mathcal{P}$. Всякий ненулевой блок C_{uv} равен произведению некоторых блоков A_{ut} и B_{tv}, не имеющих, заметим, нулевых рядов. Значит, если в A или B все ненулевые блоки положительны, то C обладает тем же свойством. Это доказывает, что матрицы с положительными ненулевыми блоками образуют идеал $\mathcal{P}$.

Каноническое разбиение описано в [5] с помощью понятия совместимости индексов. Напомним, что индексы i и j совместимы матрицей A, если $(A)_{ik} > 0$ и $(A)_{jk} > 0$ для некоторого индекса k. Полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ определяет на множестве N следующие бинарные отношения:

- индексы i и j совместимы полугруппой $\mathcal{P}$ (или просто – совместимы), если они совместимы некоторой матрицей $A \in \mathcal{P}$;
- индексы i и j сильно совместимы полугруппой $\mathcal{P}$ (или сильно совместимы), если они совместимы и, более того, их A-последователи совместимы при любой матрице $A \in \mathcal{P}$.

В [5] доказано, что для неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ отношения совместимости и сильной совместимости совпадают и являются

отношениями эквивалентности. При этом разбиение на классы совместимости совпадает с каноническим разбиением множества N, определённым в [4] алгоритмически.

В общем случае для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ бинарное отношение совместимости на множестве N рефлексивно и симметрично, но не всегда транзитивно. Например, для полугруппы неотрицательных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

индексы 1 и 3, и также индексы 3 и 2 совместимы, однако индексы 1 и 2 несовместимы. При этом надо заметить, что условия теоремы 1 не являются необходимыми для того, чтобы совместимость была транзитивной. Нетрудно привести примеры приводимых полугрупп с матрицами, содержащими нулевые столбцы, для которых совместимость транзитивна.

Для исследования комбинаторной структуры полугрупп с нетранзитивной совместимостью подходящим инструментом является, как мы увидим дальше, отношение сильной совместимости.

Следующие две леммы верны для любых $A, B \in \overline{P}_n$.

Лемма 2. *Если индексы i и j A-совместимы, то они AB-совместимы.*

Действительно,

$$(A)_{ik} > 0,\ (A)_{jk} > 0,\ (B)_{kl} > 0 \quad \Rightarrow \quad (AB)_{il} > 0,\ (AB)_{jl} > 0.$$

Лемма 3. *Если A-последователи индексов i и j B-совместимы, то индексы i и j AB-совместимы.*

В самом деле,

$$(A)_{ik} > 0,\ (A)_{jl} > 0,\ (B)_{km} > 0,\ (B)_{lm} > 0 \Rightarrow (AB)_{im} > 0,\ (AB)_{jm} > 0.$$

Предложение 4. *Если для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ отношение совместимости транзитивно и, тем самым, является отношением эквивалентности, то*

1) *матрицы полугруппы действуют на классах совместимости как перестановки,*

2) *отношение совместимости совпадает с отношением сильной совместимости.*

Доказательство. 1) Из леммы 3 следует, что если индексы i и j не совместимы полугруппой $\mathcal{P}$, то A-последователи этих индексов несовместимы при любой матрице $A \in \mathcal{P}$. Тем самым для разбиения на классы совместимости выполнено условие 1 предложения 2. Согласно этому предложению, матрица A действует на классах совместимости как перестановка.

2) Из п. 1) и предложения 1 вытекает, что транзитивное отношение совместимости устойчиво: если индексы i и j лежат в одном классе совместимости, то при любой матрице $A \in \mathcal{P}$ их A-последователи тоже лежат в одном классе. Тем самым выполнено условие сильной совместимости. □

Из предложения 4 следует, что транзитивная совместимость, когда она имеет место для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$, является частным случаем рефлексивной сильной совместимости. Другими словами, если для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ совместимость является эквивалентностью, то и сильная совместимость является эквивалентностью, причём эти эквивалентности совпадают. Обратное утверждение в общем случае неверно: сильная совместимость может быть эквивалентностью и тогда, когда совместимость таковой не является.

Будем иногда для краткости обозначать отношение сильной совместимости символом S.

Предложение 5. *Для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ отношение сильной совместимости симметрично и транзитивно.*

Доказательство. Симметричность прямо следует из определения сильной совместимости. Докажем транзитивность. Пусть iSj, jSk и дано, что l, m, h – B-последователи индексов i, j, k соответственно. Требуется доказать, что l и h совместимы. В силу iSj, для некоторой $A \in \mathcal{P}$ и некоторого p имеем $(A)_{lp} > 0$, $(A)_{mp} > 0$, и пусть $(A)_{hq} > 0$. Индексы p и q, как BA-последователи сильно совместимых индексов j и k, совместимы некоторой матрицей C. Тогда индексы l и h AC-совместимы, что и завершает доказательство. □

Отношение сильной совместимости не всегда рефлексивно. Например, в представленной выше полугруппе матриц третьего порядка выберем матрицу A с положительными a, b. Тогда индекс 3 имеет несовместимые A-последователи – индексы 1 и 2. Хотя отношение сильной

совместимости не всегда рефлексивно, но оно, так сказать, частично рефлексивно.

Назовём индекс i целым или рефлексивным, если A-последователи индекса i совместимы при любой матрице $A \in \mathcal{P}$, то есть, если iSi.

Предложение 6. *Для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ существуют целые (рефлексивные) индексы.*

Доказательство. Предположим противное: все индексы нерефлексивны. Тогда существуют несовместимые индексы. Пусть

$$i_1, i_2, \ldots, i_m \tag{1}$$

– максимальный набор попарно несовместимых индексов. Для некоторой матрицы $A \in \mathcal{P}$ у нерефлексивного индекса i_1 существуют несовместимые A-последователи j_0 и j_1. Пусть $j_2, \ldots, j_m$ – A-последователи индексов $i_2, \ldots, i_m$. Индексы

$$j_0, j_1, j_2, \ldots, j_m \tag{2}$$

должны быть попарно несовместимы. Действительно, если, например, индексы j_1 и j_2 совместимы некоторой матрицей $B \in \mathcal{P}$, то индексы i_1 и i_2 AB-совместимы, чего не может быть, поскольку в (1) нет совместимых индексов. Выходит, что индексы (2) попарно несовместимы, но это противоречит условию максимальности (1). □

Предложения 5 и 6 доказаны в [5] для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ (леммы 5 и 6 соответственно), их обоснование в случае $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ остаётся без изменения.

Предложение 7. *Для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ множество целых индексов инвариантно.*

Доказательство. Пусть i – целый индекс и $A_{ij} > 0$. Индекс j тоже целый, поскольку его B-последователи при любой $B \in \mathcal{P}$ совместимы как AB-последователи целого индекса i. □

Предложение 8. *Для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ отношение сильной совместимости устойчиво.*

Доказательство. Пусть iSj и $(A)_{ik} > 0, (A)_{jl} > 0$ для $A \in \mathcal{P}$. Любые B-последователи индексов k и l при $B \in \mathcal{P}$ совместимы как AB-последователи сильно совместимых индексов i и j. Поэтому kSl, что доказывает устойчивость S. □

Теорема 2. *В любой полугруппе $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ существуют матрицы, совмещающие все пары сильно совместимых индексов. Множество таких матриц является идеалом полугруппы.*

Доказательство. Предположим, что матрица $A \in \mathcal{P}$ не совмещает сильно совместимые индексы i, j. Возьмем элементы $(A)_{ip} > 0$, $(A)_{jq} > 0$. Индексы p и q совместимы некоторой матрицей $B \in \mathcal{P}$. Тогда по лемме 2 матрица AB совмещает пару i, j. Кроме того, по лемме 1 матрица AB совмещает все пары, совместимые матрицей A. Таким образом, AB совмещает больше пар, чем A. Если и эта матрица совмещает не все сильно совместимые пары, то найдётся такая матрица C, что ABC совмещает больше пар индексов, чем AB. Продолжая этот процесс, получим матрицу, совмещающую все пары сильно совместимых индексов. □

Назовём матрицы с вышеописанным свойством сильно совмещающими. Из леммы 2 немедленно следует, что сильно совмещающие матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ образуют правый идеал, а то, что они образуют левый идеал, легко следует из леммы 3.

§3. Целые полугруппы

В силу предложений 6 и 7, для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ множество N содержит непустое инвариантное подмножество целых индексов и, возможно, некоторое количество нецелых индексов. Назовём полугруппу $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ целой, если все индексы множества N для неё целые. Другими словами, полугруппа является целой, если определяемое ею на множестве N отношение сильной совместимости рефлексивно, то есть является отношением эквивалентности.

Вначале рассмотрим простой случай целой полугруппы, когда $r(\mathcal{P}) = 1$, то есть любые два индекса совместимы. В этом случае, конечно, любые два индекса и сильно совместимы. Из теоремы 1 следует, что условие $r(\mathcal{P}) = 1$ необходимо и достаточно для существования положительной матрицы в неприводимой полугруппе $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$. Покажем,

что в этом утверждении можно отказаться от неприводимости и допустить нулевые столбцы в матрицах, если заменить положительную матрицу на стягивающую.

Напомним, что прямоугольная неотрицательная матрица A называется стягивающей (scrambling), если любые строки A имеют положительные элементы в некотором общем столбце. Однострочная матрица считается стягивающей, если строка ненулевая.

Предложение 9. *Полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ содержит стягивающие матрицы тогда и только тогда, когда $r(\mathcal{P}) = 1$. В последнем случае стягивающие матрицы образуют идеал $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Если в $\mathcal{P}$ существует стягивающая матрица, то она, очевидно, совмещает любые два индекса и этим обеспечивает равенство $r(\mathcal{P}) = 1$.

Пусть теперь $r(\mathcal{P}) = 1$. По теореме 2, в $\mathcal{P}$ существуют матрицы, совмещающие любые два сильно совместимых индекса. Эти матрицы являются стягивающими, так как в рассматриваемом случае любые два индекса сильно совместимы. Согласно теореме 2, стягивающие матрицы образуют идеал $\mathcal{P}$. □

Отметим, что предложение 9 в иной терминологии доказано для полугрупп стохастических матриц [4, предложение 3]. В отличие от приведённых выше комбинаторных соображений, доказательство в [4] основано на тонких спектральных свойствах стохастических матриц.

Обратимся к случаю $r(\mathcal{P}) \geqslant 2$. Для краткости будем говорить об S-классах или просто классах, имея ввиду классы сильной совместимости. Обозначим через $\xi(\mathcal{P})$ максимальное число индексов, любые два из которых не являются сильно совместимыми. Другими словами, $\xi(\mathcal{P})$ равно числу S-классов. Поскольку несовместимые индексы не являются сильно совместимыми, то

$$\xi(\mathcal{P}) \geqslant r(\mathcal{P}). \tag{3}$$

Из предложений 8 и 1 непосредственно следует, что матрицы полугруппы действуют на классах как отображения. По определению из §1, матрица $A \in \mathcal{P}$ отображает класс L в класс M, если $A(L) \subseteq M$. Коротко запишем это как равенство $LA = M$. Иногда удобно определять

класс его представителем: символ $[i]$ обозначает класс, содержащий индекс i. Подчеркнём, что $(A)_{ik} > 0 \Rightarrow [i]A = [k]$.

Заметим, что совместимость индексов есть свойство классов. В самом деле, пусть индексы i и j совместимы, например, матрицей A. Это значит, что для некоторого k имеем $(A)_{ik} > 0$, $(A)_{jk} > 0$, то есть $[i]A = [j]A = [k]$. Отсюда, по лемме 3, следует, что любые индексы из классов $[i]$, $[j]$ совместимы, поскольку они имеют в классе $[k]$ совместимых A-последователей. Проведённое рассуждение делает корректным следующее определение: два класса совместимы, если совместимы некоторые представители этих классов. Иначе говоря, классы L и M совместимы, если $LA = MA$ для некоторой матрицы $A \in \mathcal{P}$.

Характер отображений классов, производимых матрицами полугруппы, зависит от того, имеет ли место в (3) равенство или строгое неравенство. Следующая теорема основная в этой работе.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ – целая полугруппа с индексом импримитивности $r(\mathcal{P}) \geqslant 2$. Тогда*

при $\xi(\mathcal{P}) = r(\mathcal{P})$ все матрицы полугруппы действуют на разбиении как перестановки;

при $\xi(\mathcal{P}) > r(\mathcal{P})$ в полугруппе существуют матрицы, определяющие отображения, не являющиеся перестановками классов, однако

а) для любых двух совместимых классов существует матрица, отображающая эти классы в несовместимые классы,

б) несовместимые классы любой матрицей полугруппы отображаются в несовместимые классы.

Доказательство. В случае $\xi(\mathcal{P}) = r(\mathcal{P})$ отношения совместимости и сильной совместимости совпадают, значит, совместимость транзитивна и, согласно предложению 4, все матрицы полугруппы действуют на множестве классов как перестановки.

В случае $\xi(\mathcal{P}) > r(\mathcal{P})$ возникает новая ситуация. Если неравные классы L и M совместимы, то $LA = MA$ для некоторой матрицы $A \in \mathcal{P}$. Действие матрицы A в этом случае не является перестановкой классов. Поскольку индексы $i \in L$, $j \in M$ не являются сильно совместимыми, то существуют несовместимые индексы k и l такие, что $(B)_{ik} > 0$ и $(B)_{jl} > 0$ для некоторой матрицы $B \in \mathcal{P}$. Это означает, что классы $LB = [k]$ и $MB = [l]$ несовместимы.

Если классы L и M несовместимы, то при любой матрице $A \in \mathcal{P}$ классы LA и MA несовместимы. Действительно, если допустить, что $(LA)B = (MA)B$ при некоторой $B \in \mathcal{P}$, то окажется, что матрица AB совмещает классы L и M, а это невозможно. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Как известно, инъекция, заданная на конечном множестве, является биекцией, то есть перестановкой. Из теоремы 3 видно, что при $\xi(\mathcal{P}) > r(\mathcal{P})$ матрицы полугруппы определяют отображения классов, не являющиеся, вообще говоря, инъекциями, но действующие инъективно на любом множестве несовместимых классов. При этом отображения сохраняют свойство несовместимости классов.

Замечание 4. Индекс импримитивности $r(\mathcal{P})$ можно определить как максимальную мощность множества классов, на котором любая матрица полугрупппы $\mathcal{P}$ действует инъективно. Действительно, по определению параметра $r = r(\mathcal{P})$, существуют попарно несовместимые индексы $i_1, i_2, \ldots, i_r$, так что все матрицы полугруппы действуют как инъекции на множестве несовместимых классов $[i_1], [i_2], \ldots, [i_r]$. Однако в любом множестве индексов, содержащем $r+1$ индексов, некоторые индексы i и j совместимы. Это значит, что на соответствующем множестве классов некоторая матрица полугруппы действует не инъективно, совмещая классы $[i]$ и $[j]$.

Замечание 5. Для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ возможен лишь случай 1) теоремы 3. Действительно, для таких полугрупп из предложения 3 следует, что матрицы действуют на классах как перестановки. По предложению 2, если индексы i и j находятся в разных S-классах, то их A-последователи тоже находятся в различных классах. Таким образом, если индексы не сильно совместимы, то они и не совместимы. Это означает совпадение отношений совместимости и сильной совместимости, то есть имеет место равенство $\xi(\mathcal{P}) = r(\mathcal{P})$.

Следствие. *Пусть для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ выполнены условия теоремы 3 и $\mathcal{P}$ находится в форме, согласованной с разбиением на S-классы. Тогда все матрицы полугруппы содержат в каждой блочной строке ровно один ненулевой блок, причём существуют матрицы, в которых все ненулевые блоки являются стягивающими. Эти матрицы образуют идеал полугруппы.*

Доказательство. После приведения полугруппы к форме, согласованной с S-классами, строки, отвечающие одному классу, оказываются в одной блочной строке. В сильно совмещающей матрице любые две такие строки имеют, согласно теореме 2, положительные элементы в некотором общем столбце. Поскольку в блочной строке только один ненулевой блок, то он должен быть стягивающей матрицей. Таким образом, ненулевые блоки сильно совмещающих матриц являются стягивающими матрицами. То, что сильно совмещающие матрицы образуют идеал полугруппы, следует из теоремы 2. □

Рассмотрим некоторые типы целых полугрупп.

1. *Неприводимые и близкие к ним полугруппы.*

Предложение 10. *Для неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ отношение сильной $\mathcal{P}$-совместимости является эквивалентностью. Другими словами, любая неприводимая полугруппа $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ является целой.*

Действительно, для неприводимой полугруппы не существует собственных инвариантных подмножеств N. Следовательно, множество рефлексивных индексов, инвариантное по предложению 7, совпадает с N.

Предложение 10 отличается от аналогичной теоремы 2 из [5] тем, что здесь снято требование, чтобы столбцы матриц из $\mathcal{P}$ были ненулевыми. Кроме того, благодаря предложению 7, доказательство упростилось.

Условие неприводимости можно несколько ослабить, сохранив рефлексивность сильной совместимости. Введём для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ бинарное отношение достижимости на множестве N. Будем считать, что индекс j достижим из индекса i, если $(A)_{ij} > 0$ для некоторой матрицы $A \in \mathcal{P}$. Ясно, что отношение достижимости рефлексивно и транзитивно. Вообще говоря, оно не симметрично. Примером снова может служить описанная в §2 полугруппа матриц третьего порядка. Для этой полугруппы индекс 1 достижим из индекса 3, но обратное неверно.

Предложение 11. *Если для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ бинарное отношение достижимости симметрично, то $\mathcal{P}$ – целая полугруппа.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что всякий класс эквивалентности отношения достижимости является инвариантным множеством, причём неприводимым, то есть не содержащим собственных инвариантных подмножеств. Заметим, что для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ всякое инвариантное множество $L \subseteq N$ содержит инвариантное подмножество целых индексов. Это доказывается почти дословным повторением доказательств предложений 6 и 7. Если L неприводимо, это инвариантное подмножество обязано совпадать с L. Следовательно, в рассматриваемом случае элементы всех классов эквивалентности, то есть все элементы N, целые. Это доказывает предложение. $\square$

Теперь докажем, что утверждение теоремы 1 (включая дополнения, содержащиеся в замечаниях 1 и 2) остаётся верным, если заменить условие неприводимости полугруппы условием симметричности отношения достижимости. При этом дальнейшее смягчение условия невозможно. В приводимой ниже теореме в роли канонического разбиения выступает разбиение на классы совместимости. Напомним, что для неприводимой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ эти разбиения совпадают.

Теорема 4. *Для полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}_n$ с индексом импримитивности r следующие условия эквивалентны.*

1. *Отношение достижимости, определяемое полугруппой $\mathcal{P}$ на множестве индексов N, симметрично.*

2. *Отношение $\mathcal{P}$-совместимости на множестве N является эквивалентностью с числом классов, равным r. Если $r = 1$, то полугруппа содержит положительную матрицу. На классах совместимости матрицы полугруппы действуют как перестановки. Если $r \geqslant 2$ и полугруппа находится в форме, согласованной с классами совместимости, то матрицы полугруппы имеют в каждом блочном ряду единственный ненулевой блок. Полугруппа содержит идеал, составленный из матриц, в которых все ненулевые блоки положительны.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Обозначим число классов достижимости через $\sigma = \sigma(\mathcal{P})$. Ясно, что индексы, принадлежащие различным классам достижимости, несовместимы, поэтому $r \geqslant \sigma$. Значит, при $r = 1$ имеем $\sigma = 1$, то есть полугруппа неприводима и, согласно теореме 1, содержит положительную матрицу.

Теперь пусть $\sigma \geqslant 2$. Тогда все матрицы полугруппы некоторым перестановочным подобием преобразуются к блочно-диагональному виду

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_\sigma \end{pmatrix}, \tag{4}$$

причём множество $\mathcal{P}_s$ диагональных блоков, расположенных на s-й диагональной позиции ($s = 1, \ldots, \sigma$), образует неприводимую полугруппу матриц без нулевых рядов. Пусть Q_s – матрица перестановки, посредством которой матрицы полугруппы $\mathcal{P}_s$ преобразуются к блочной форме блочного порядка $r_s = r(\mathcal{P}_s)$ со свойствами, описанными в теореме 1. Применим к матрицам (4) преобразование подобия посредством матрицы перестановки $Q = \operatorname{diag}(Q_1, \ldots, Q_\sigma)$. Тогда матрицы полугруппы приобретут блочную форму блочного порядка $r = r_1 + \cdots + r_\sigma$; в этой форме каждый блочный ряд содержит, очевидно, единственный ненулевой блок (без нулевых рядов). Осталось доказать, что для преобразованной полугруппы выполняется утверждение об идеале. В силу теоремы 1, для $s = 1, \ldots, \sigma$ существует такая матрица $A^{(s)}$, что в её подматрице $A_s^{(s)}$, относящейся к полугруппе $\mathcal{P}_s$, все ненулевые блоки положительны. Тогда в произведении $A^{(1)} \cdots A^{(\sigma)}$ все ненулевые блоки положительны. Следовательно, множество матриц полугруппы, ненулевые блоки которых положительны, непусто. Завершается доказательство точно так же, как утверждение об идеале в замечании 2 к теореме 1.

$2 \Rightarrow 1$. При $r = 1$ полугруппа содержит положительную матрицу, следовательно, неприводима. В этом случае, любой индекс достижим из любого другого, и отношение достижимости, очевидно, симметрично.

При $r \geqslant 2$ для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$ в идеале есть матрица, положительные блоки которой расположены на тех же позициях, что и в A. Действительно, пусть B – блочно-диагональная матрица с положительными диагональными блоками. Такую матрицу можно получить возведением любой матрицы из идеала в подходящую степень. Тогда в матрице $C = AB$ положительные блоки расположены там же, где и в матрице A.

Пусть индекс j достижим из индекса i, то есть $(A)_{ij} > 0$ для некоторой $A \in \mathcal{P}$. Из доказанного выше следует, что в идеале есть такая матрица C, что $(C)_{ij} > 0$, причём элемент $(C)_{ij}$ принадлежит некоторому положительному блоку C_{uv}. Если $u = v$, то $(C)_{ji} > 0$. В противном случае выберем показатель k, при котором C^k является блочно-диагональной матрицей. Тогда блок $C_{vu}^{(k-1)}$ матрицы C^{k-1} должен быть положительным. В частности, $(C)_{ji}^{(k-1)} > 0$, значит, индекс i достижим из индекса j. Доказательство закончено. □

Утверждения относительно единственности канонического разбиения из п. 3 теоремы 1 и замечания 1 остаются верными в условиях теоремы 5 и для разбиения на классы совместимости. Их обоснование не изменяется.

2. ***Полугруппы строчно-мономиальных матриц.*** Матрица называется строчно-мономиальной (row-monomial), если она содержит в каждой строке ровно один ненулевой элемент.

Предложение 12. *Любая полугруппа строчно-мономиальных матриц является целой.*

Действительно, если матрица A мономиальна по строкам, то каждый индекс имеет ровно одного A-последователя, и потому для полугруппы строчно-мономиальных матриц все индексы целые.

Полугруппы строчно-мономиальных матриц с дополнительным условием, что ненулевые элементы равны единице, возникают в теории автоматов. Всякая матрица $A \in \mathcal{P}$ понимается в этом случае как матрица переходов автомата под действием некоторого входного слова: $(A)_{ij} = 1$, если соответствующее слово переводит автомат из состояния i в состояние j. Автомат называется синхронизируемым, если существует слово, переводящее автомат из любого состояния в одно и то же состояние. Это значит, что полугруппа $\mathcal{P}$ содержит матрицу, единственный ненулевой столбец которой состоит из единиц. Легко видеть, что строчно-мономиальная матрица является стягивающей в точности тогда, когда у неё один столбец положителен, а прочие столбцы нулевые. Таким образом, равенство $r(\mathcal{P}) = 1$ оказывается эквивалентным синхронизируемости автомата, а известный критерий

синхронизируемости (см. например, утверждение 1 из [4]) оказывается частным случаем предложения 10.

Для иллюстрации связи между параметрами $r(\mathcal{P})$ и $\xi(\mathcal{P})$ рассмотрим семейство матриц из [4, пример 2]:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В [4] показано, что полугруппа $\mathcal{P}$, порождённая этими матрицами, неприводима, имеет индекс импримитивности $r(\mathcal{P}) = 2$, но при этом не существует разбиения множества $\{1, 2, 3, 4\}$ на два или больше классов, на котором матрицы полугруппы действуют как перестановки. Однако отношение сильной совместимости является эквивалентностью, причём всякий индекс эквивалентен лишь самому себе, то есть $\xi(\mathcal{P}) = 4$. Действительно, в [4] доказано, что индексы 1 и 2, а также 3 и 4, несовместимы. Остальные четыре пары различных индексов совместимы, но каждая из них имеет несовместимых последователей. Например, индексы 2 и 3 A_1-совместимы, но их A_2-последователи – индексы 1 и 2 – несовместимы. Остальные проверки проводятся аналогично.

Полугруппа $\mathcal{P}$ строчно-мономиальных (0,1)-матриц порядка n, для которой все классы сильной совместимости одноэлементны, то есть $\xi(\mathcal{P}) = n$, представляет собой очень частный тип полугруппы неотрицательных матриц. В то же время полугруппа этого типа является гомомоморфным образом любой целой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$. Действительно, пусть $\mathcal{P}$ находится в форме, согласованной с классами сильной совместимости. Сопоставим матрице $A \in \mathcal{P}$ матрицу $\Psi(A)$, заменив в A каждый ненулевой блок единицей, а каждый нулевой блок – нулём. Нетрудно проверить, что Ψ есть гомоморфизм на полугруппу указанного типа.

Литература

1. H. Mink, *Nonnegative Matrices.* Wiley, New York etc., 1988.
2. V. Romanovsky, *Un théoréme sur les zéros des matrices non négatives.* — Bull. Soc. Math. France **61** (1933), 213–219.
3. В. И. Романовский, *Дискретные цепи Маркова.* Гостехиздат, М., 1949.
4. V. Yu. Protasov, A. S. Voynov, *Sets of nonnegative matrices without positive products.* — Linear Algebra Appl. **437** (2012), 749–765.
5. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Комбинаторные свойства неприводимых полугрупп неотрицательных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **405** (2012), 13–23.
6. V. Blondel, R. Jungers, A. Olshevsky, *On primitivity of sets of matrices.* `arXiv:1306.0729v3 [math. CO] 28 Nov.2013.`
7. И. К. Рысцов, *Представление регулярных идеалов в конечных автоматах.* — Кибернетика и систем. анализ No. 5 (2003), 48–58.

Al'pin Yu. A., Al'pina V. S. Combinatorial properties of entire semigroups of nonnegative matrices.

Generalizations of the Protasov–Voynov theorem on the structure of irreducible semigroups of nonnegative matrices free of zero rows and columns are obtained. The theorem is extended to semigroups that are allowed to be reducible and to matrices that may have zero columns. The main results concern the semigroups called entire. In the definitions and proofs, only combinatorial properties of nonnegative matrices are exploited.

Казанский федеральный университет
Кремлевская ул., 8,
420008 Казань, Россия
E-mail: `Yuri.Alpin@kpfu.ru`

Поступило 6 октября 2014 г.

Казанский национальный
исследовательский
технологический университет,
ул. К. Маркса, 68,
420015 Казань, Россия
E-mail: `alpina.valentina@yandex.ru`