Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 428, 2014 г.

А. К. Абдикалыков

ОБ УНИТАРНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ПРОСТРАНСТВА $(T+H)$-МАТРИЦ

1. Комплексная квадратная матрица называется $(T+H)$-матрицей, если она представима в виде суммы тёплицевой и ганкелевой матриц. Тёплицевыми же называются матрицы, для элементов которых выполняются соотношения $t_{ij} = t_{i-1,j-1}$, $i, j = 2, 3, \ldots, n$; ганкелевыми – те, для элементов которых соблюдаются условия $h_{ij} = h_{i-1,j+1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Ганкелевой, например, будет так называемая перъединичная матрица P_n, все ненулевые элементы которой равны единице и находятся на побочной диагонали. Кроме того, ганкелевыми матрицами являются матричные единицы E_{11} и E_{nn}, в то время как E_{1n} и E_{n1} – тёплицевы матрицы. Здесь матричная единица E_{ij} – это матрица, все элементы которой равны нулю, кроме одного, находящегося на позиции (i, j) и равного единице.

Множество всех $(T+H)$-матриц порядка n есть линейное подпространство, обозначаемое в дальнейшем через TH_n. Символами T_n и H_n будут обозначаться множества всех тёплицевых и всех ганкелевых матриц порядка n соответственно.

Рассмотрим следующую задачу: какие унитарные матрицы отображают TH_n в себя посредством подобия? Будем писать $U \in \mathrm{UAut}(TH_n)$, если унитарная матрица U обладает таким свойством. Другими словами, если $U \in \mathrm{UAut}(TH_n)$, то $\forall A \in TH_n$ справедливо включение $U^*AU \in TH_n$. Похожим образом определяются множества $\mathrm{UAut}(T_n)$ и $\mathrm{UAut}(H_n)$.

Аналогичные задачи относительно пространств тёплицевых и ганкелевых матриц были ранее исследованы в [1] и [2]. Напомним результаты этих исследований.

Теорема 1. *Всякая матрица* $W \in \mathrm{UAut}(T_n)$ *имеет одну из следующих двух форм:* а) $W = \sigma \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1})$, *где оба числа* σ *и* ε *по модулю равны единице;* б) $W = \sigma P_n \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1})$, *где* $|\sigma| = |\varepsilon| = 1$.

Ключевые слова: унитарное подобие, $(T+H)$-матрицы, центросимметричные матрицы, трехдиагональные матрицы.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 3$ – нечётное число. Тогда множество $\mathrm{UAut}(H_n)$ есть группа, изоморфная прямому произведению унитарной группы $\mathbb{U}_1$ и четверной группы Клейна. При этом образующими элементами последней являются диагональная матрица $D_n = \mathrm{diag}(1, -1, 1, -1, \ldots, 1)$ и матрица P_n.*

Кроме того, в пока ещё не опубликованной статье Х. Д. Икрамова показано, что утверждение теоремы 2 с точностью до небольшого изменения формулировки остаётся верным и для чётных n, начиная с $n = 4$.

Структура группы $\mathrm{UAut}(TH_n)$ остаётся пока открытой проблемой. Однако известно [3], что при $n \geqslant 3$ все матрицы из этой группы центросимметричны или косоцентросимметричны. Напомним, что квадратная матрица A порядка n называется центросимметричной (косоцентросимметричной), если $A = PAP$ (соответственно $A = -PAP$).

Основным результатом данной статьи является следующее утверждение, которое будет доказано в разделе 2.

Теорема 3. *При $n \geqslant 4$ унитарная матрица U, для которой $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 + \ldots + |u_{1,n-1}|^2 > 0$, тогда и только тогда принадлежит множеству $\mathrm{UAut}(TH_n)$, когда существуют нижнетреугольная вещественная тёплицева матрица R и числа $\alpha \in \mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{R}$ такие, что $U^*RU = S + \widetilde{E}$, где $\widetilde{E} = \alpha E_{11} + \overline{\alpha} E_{nn} + pE_{1n} + qE_{n1}$, а S – трёхдиагональная тёплицева матрица с нулём на главной диагонали и единицей на двух диагоналях, соседних с ней.*

2. Пусть U – произвольная матрица из $\mathrm{UAut}(TH_n)$, $n > 3$, причём среди элементов $u_{12}, u_{13}, \ldots, u_{1,n-1}$ не все нулевые.

Тогда для любого $p = 1, \ldots, n$ справедливо включение $U^*(E_{1p} + E_{2,p-1} + \ldots + E_{p1})U \in TH_n$, так как $E_{1p} + E_{2,p-1} + \ldots + E_{p1}$ – ганкелева матрица.

В частности, $U^*E_{11}U \in TH_n$; следовательно, эта матрица подчиняется правилу ромба. Под правилом ромба понимается набор локальных условий (см. [4]), с помощью которых проверяется принадлежность матрицы множеству TH_n. Если $A \in TH_n$, то эти условия таковы:

$$a_{i,k-1} + a_{i,k+1} = a_{i-1,k} + a_{i+1,k}, \qquad i, k = 2, 3, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Применяя равенства (1) к матрице $U^*E_{11}U$, получаем

$$\overline{u}_{1i} u_{1,k-1} + \overline{u}_{1i} u_{1,k+1} = \overline{u}_{1,i-1} u_{1k} + \overline{u}_{1,i+1} u_{1k}, \qquad i, k = 2, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Зафиксируем произвольное k. Пусть $u_{1k} \neq 0$, тогда при всех $u_{1i} \neq 0$ равенства (2) можно поделить на $\overline{u}_{1i}u_{1,k}$. В частности, это возможно и при $i = k$. Получаем

$$\frac{u_{1,k-1}+u_{1,k+1}}{u_{1k}} = \overline{\left(\frac{u_{1,i-1}+u_{1,i+1}}{u_{1i}}\right)}, \quad i,k=2,\ldots,n-1: \quad u_{1i}\neq 0, u_{1k}\neq 0. \tag{3}$$

Рассмотрим сначала случай $i = k$. Тогда (3) даёт

$$\frac{u_{1,k-1}+u_{1,k+1}}{u_{1k}} \in \mathbb{R}, \qquad k = 2,\ldots,n-1: \quad u_{1k}\neq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{u_{1,k-1}+u_{1,k+1}}{u_{1k}} = \frac{u_{1,i-1}+u_{1,i+1}}{u_{1i}}, \quad i,k = 2,\ldots,n-1: u_{1i}\neq 0, u_{1k}\neq 0.$$

Слева в последнем равенстве зависимость только от k, справа – только от i, и поэтому обе части равны какой-то константе. Обозначим её r_1. В таком случае $r_1 \in \mathbb{R}$ и верно следующее равенство:

$$u_{1,k-1} + u_{1,k+1} = r_1 u_{1k}, \qquad k = 2,\ldots,n-1: \quad u_{1k}\neq 0. \tag{4}$$

Пусть теперь $u_{1k} = 0$. Тогда из (2) следует, что $(u_{1,k-1}+u_{1,k+1})\overline{u}_{1i} = 0$ для всех $i = 2,\ldots,n-1$, но по нашему предположению можно подобрать такое i, что $u_{1i} \neq 0$. Поэтому $u_{1,k-1}+u_{1,k+1} = 0 = r_1u_{1k}$. Таким образом, равенство (4) оказывается верным и в случае $u_{1k} = 0$. Аналогичным способом можно показать, что существуют такие $r_2, r_3 \in \mathbb{R}$, что

$$u_{2,k-1} + u_{2,k+1} = r_1u_{2k} + r_2u_{1k}, \tag{5}$$
$$u_{3,k-1} + u_{3,k+1} = r_1u_{3k} + r_2u_{2k} + r_3u_{1k}. \tag{6}$$

Для этого надо рассматривать матрицы $U^*(E_{12} + E_{21})U$ и $U^*(E_{13} + E_{22} + E_{31})U$. Однако, оказывается, что верна общая формула

$$u_{j,k-1} + u_{j,k+1} = r_1u_{jk} + r_2u_{j-1,k} + \ldots + r_ju_{1k} = \sum_{t=1}^{j} r_tu_{j+1-t,k}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad k = 2,\ldots,n-1. \tag{7}$$

Доказательство проведём методом математической индукции. Базис индукции уже имеется. Предположим теперь, что (7) верно для $j = 1,\ldots,p-1$. Рассмотрим матрицу $X = U^*(E_{1p} + E_{2,p-1} + \ldots + E_{p1})U \in$

TH_n. Нетрудно видеть, что $x_{ik} = \sum\limits_{s=1}^{p} \overline{u}_{si} u_{p+1-s,k}$. Снова применяем правило ромба:

$$\sum_{s=1}^{p} (\overline{u}_{s,i-1} + \overline{u}_{s,i+1}) u_{p+1-s,k} = \sum_{s=1}^{p} \overline{u}_{si} (u_{p+1-s,k-1} + u_{p+1-s,k+1}).$$

От левой суммы отделим слагаемое, соответствующее $s = p$, от правой – слагаемое, соответствующее $s = 1$, а в оставшихся суммах применим верное по нашему предположению равенство (7):

$$\begin{aligned}(\overline{u}_{p,i-1} + \overline{u}_{p,i+1}) u_{1k} + \sum_{s=1}^{p-1} \left(\sum_{t=1}^{s} r_t \overline{u}_{s+1-t,i} \right) u_{p+1-s,k}& \\ = \overline{u}_{1i} (u_{p,k-1} + u_{p,k+1}) + \sum_{s=2}^{p} \overline{u}_{si} \left(\sum_{t=1}^{p+1-s} r_t u_{p+2-s-t,k} \right)&.\end{aligned} \tag{8}$$

Обозначим полученные двойные суммы через σ_1 и σ_2 и выделим в каждой из них коэффициент при r_t:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sum_{s=1}^{p-1} \left(\sum_{t=1}^{s} r_t \overline{u}_{s+1-t,i} \right) u_{p+1-s,k} = \sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=t}^{p-1} \overline{u}_{s+1-t,i} u_{p+1-s,k} \right) \\ &= \sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=1}^{p-t} \overline{u}_{si} u_{p+2-s-t,k} \right), \\ \sigma_2 &= \sum_{s=2}^{p} \overline{u}_{si} \left(\sum_{t=1}^{p+1-s} r_t u_{p+2-s-t,k} \right) = \sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=2}^{p+1-t} \overline{u}_{si} u_{p+2-s-t,k} \right).\end{aligned}$$

Видно, что σ_1 и σ_2 отличаются лишь индексами во внутренних суммах. Подставим полученные значения обратно в (8):

$$\begin{aligned}(\overline{u}_{p,i-1} + \overline{u}_{p,i+1}) u_{1k} + \sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=1}^{p-t} \overline{u}_{si} u_{p+2-s-t,k} \right)& \\ = \overline{u}_{1i} (u_{p,k-1} + u_{p,k+1}) + \sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=2}^{p+1-t} \overline{u}_{si} u_{p+2-s-t,k} \right)&.\end{aligned}$$

Вычтем из обеих частей величину $\sum\limits_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum\limits_{s=2}^{p-t} \overline{u}_{si} u_{p+2-s-t,k}\right)$. Тогда от каждой из внутренних сумм останется лишь одно слагаемое:

$$(\overline{u}_{p,i-1} + \overline{u}_{p,i+1}) u_{1k} + \sum_{t=1}^{p-1} r_t \overline{u}_{1i} u_{p+1-t,k}$$
$$= \overline{u}_{1i}(u_{p,k-1} + u_{p,k+1}) + \sum_{t=1}^{p-1} r_t \overline{u}_{p+1-t,i} u_{1k}.$$

Пусть $u_{1k} \neq 0$. Тогда при всех $u_{1i} \neq 0$ в последнем равенстве можно поменять суммы местами, а затем поделить это равенство на $\overline{u}_{1i} u_{1,k}$.

$$\overline{\left(\frac{u_{p,i-1} + u_{p,i+1}}{u_{1i}} - \sum_{t=1}^{p-1} \frac{r_t u_{p+1-t,i}}{u_{1i}}\right)} = \frac{u_{p,k-1} + u_{p,k+1}}{u_{1k}} - \sum_{t=1}^{p-1} \frac{r_t u_{p+1-t,k}}{u_{1k}},$$
$$i, k = 2, \ldots, n-1 : \quad u_{1i} \neq 0, \ u_{1k} \neq 0.$$

Руководствуясь теми же соображениями, что и выше, заключаем, что существует такое $r_p \in \mathbb{R}$, что

$$\frac{u_{p,k-1} + u_{p,k+1}}{u_{1k}} - \sum_{t=1}^{p-1} \frac{r_t u_{p+1-t,k}}{u_{1k}} = r_p, \qquad k = 2, \ldots, n-1 : \quad u_{1k} \neq 0.$$

Это соотношение эквивалентно (7) при $j = p$. Пусть теперь $u_{1k} = 0$. Тогда

$$\sum_{t=1}^{p-1} r_t \overline{u}_{1i} u_{p+1-t,k} = \overline{u}_{1i}(u_{p,k-1} + u_{p,k+1}), \quad i = 2, \ldots, n-1.$$

Снова подбираем такое i, что $u_{1i} \neq 0$, и делим данное равенство на $\overline{u}_{1i}$. Это даёт

$$u_{p,k-1} + u_{p,k+1} = \sum_{t=1}^{p-1} r_t u_{p+1-t,k} = \sum_{t=1}^{p-1} r_t u_{p+1-t,k} + r_p u_{1k} = \sum_{t=1}^{p} r_t u_{p+1-t,k}.$$

Таким образом, (7) верно и в этом случае.

Ясно, что равенства (7) суть необходимые условия для включения $U \in \mathrm{UAut}(TH_n)$. Однако можно показать, что эти же равенства являются достаточными условиями. Понятно, что $U \in \mathrm{UAut}(TH_n)$ тогда и только тогда, когда $U^* X U \in TH_n$ для всех матриц X, относящихся к хотя бы одному из следующих четырёх классов:

1) $X = E_{1p} + E_{2,p-1} + \ldots + E_{p1}$, $p = 1, \ldots, n$;

2) $X = E_{np} + E_{n-1,p+1} + \ldots + E_{pn}$, $p = 1, \ldots, n$;
3) $X = E_{1p} + E_{2,p+1} + \ldots + E_{n-p+1,n}$, $p = 1, \ldots, n$;
4) $X = E_{np} + E_{n-1,p-1} + \ldots + E_{n-p+1,1}$, $p = 1, \ldots, n$.

Это верно, так как любую $(T + H)$-матрицу можно представить в виде линейной комбинации указанных матриц, причём первые два матричные множества соответствуют ганкелевым компонентам $(T+H)$-матриц, а два последних множества – их тёплицевым компонентам. (Кроме того, стоит отметить, что данная система избыточна, то есть не является базисом TH_n, так как $\dim TH_n = 4n - 4$, в то время как в четырёх выписанных классах содержится $4n$ матриц.) Нетрудно видеть, что для матрицы X первого класса матрица PX попадает в четвёртый класс, матрица XP – в третий, а матрица PXP – во второй. При этом выполнение (7) соответствует включению $U^*XU \in TH_n$ для всех матриц X из первого класса. Ввиду центросимметричности матрицы U (или её косоцентросимметричности) имеем $U^*(AP)U = \pm U^*AU \cdot P$, $U^*(PA)U = \pm P \cdot U^*AU$. Следовательно, (7) является необходимым и достаточным условием для включения $U \in \mathrm{UAut}(TH_n)$, поскольку умножение на перъединичную матрицу слева или справа не выводит матрицу из множества TH_n.

Запись (7) можно упростить. Пусть S – трёхдиагональная тёплицева матрица с нулём на главной диагонали и единицами на двух соседних диагоналях, а R – (вещественная) нижнетреугольная тёплицева матрица с первым столбцом $(r_1, r_2, \ldots, r_n)^T$. Для таких R и S левая часть соотношения (7) равна элементу матрицы US, стоящему в позиции (j, k), а правая – элементу матрицы RU в той же позиции. Таким образом, это соотношение допускает следующую эквивалентную формулировку.

Унитарная матрица U, для которой $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 + \ldots + |u_{1,n-1}|^2 > 0$, тогда и только тогда принадлежит множеству $\mathrm{UAut}(TH_n)$, когда существует такая нижнетреугольная вещественная тёплицева матрица R, что матрицы RU и US совпадают всюду, кроме, быть может, первого и последнего столбцов. Другими словами, $\{RU\}_{jk} = \{US\}_{jk}$ для $j = 1, \ldots, n$ и $k = 2, \ldots, n-1$.

Полученное утверждение можно улучшить. Все столбцы матрицы $RU - US$, кроме первого и последнего, нулевые; следовательно, то же самое можно сказать про матрицу $\widetilde{E} = U^*(RU - US) = U^*RU - S$. Однако $\widetilde{E} \in TH_n$, так как R и S тёплицевы, а следовательно, являются и $(T + H)$-матрицами. Снова воспользовавшись правилом ромба, получаем, что $\widetilde{E} = \alpha_{11}E_{11} + \alpha_{1n}E_{1n} + \alpha_{n1}E_{n1} + \alpha_{nn}E_{nn}$ для каких-то комплексных α_{11}, α_{1n}, α_{n1}, α_{nn}. Тем самым, в матрице $\widetilde{E}$ ненулевыми могут быть только угловые элементы. Например, $\{\widetilde{E}\}_{21} = \{\widetilde{E}\}_{12} + \{\widetilde{E}\}_{32} - \{\widetilde{E}\}_{23} = 0$.

Итак, $U^*RU = S + \widetilde{E}$. Поэтому

$$(S + \widetilde{E})^* = S + \widetilde{E}^* = (U^*RU)^* = U^*R^TU,$$

откуда выводим

$$U^*(R + R^T)U = 2S + \widetilde{E} + \widetilde{E}^* \quad \text{и} \quad U^*(R - R^T)U = \widetilde{E} - \widetilde{E}^*.$$

Заметим, что матрица $R + R^T$ центросимметрична; значит, центросимметрична и матрица $2S + \widetilde{E} + \widetilde{E}^*$. Это верно, так как матрицы U и U^* одновременно центросимметричны или косоцентросимметричны. Те же соображения применимы и к матрице $R - R^T$: она косоцентросимметрична; значит, косоцентросимметрична и матрица $\widetilde{E} - \widetilde{E}^*$. Получаем следующие равенства:

$$\alpha_{11} + \overline{\alpha}_{11} = \alpha_{nn} + \overline{\alpha}_{nn}, \qquad \alpha_{1n} + \overline{\alpha}_{n1} = \alpha_{n1} + \overline{\alpha}_{1n},$$

$$\alpha_{11} - \overline{\alpha}_{11} = -(\alpha_{nn} - \overline{\alpha}_{nn}), \qquad \alpha_{1n} - \overline{\alpha}_{n1} = -(\alpha_{n1} - \overline{\alpha}_{1n}).$$

Решения данной системы имеют вид $\alpha_{11} = \alpha$, $\alpha_{nn} = \overline{\alpha}$, $\alpha_{1n} = p$, $\alpha_{n1} = q$, где $p, q \in \mathbb{R}$. Следовательно, теорема 3 доказана.

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность Икрамову Х. Д. за постановку задачи и внимание к данной работе.

Литература

1. Х. Д. Икрамов, *Унитарные автоморфизмы пространства тёплицевых матриц.* — Докл. Акад. Наук **456** (2014), No. 4, 389–391.
2. Х. Д. Икрамов, *Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц.* — Матем. заметки **96** (2014), No. 5, 687–696
3. А. К. Абдикалыков, *Центросимметричность унитарных матриц, сохраняющих множество $(T+H)$-матриц путём подобия.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **55** (2015).
4. Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, А. К. Абдикалыков, *О локальных условиях, характеризующих пространство $(T+H)$-матриц.* — Докл. Акад. Наук **457** (2014), No. 1, 17–18.

Abdikalykov A. K. Unitary automorphisms of the space of $(T + H)$-matrices.

Let TH_n be the space of $(T+H)$-matrices of order n. The paper considers the following question: Which unitary matrices U satisfy the condition $\forall A \in TH_n \to U^*AU \in TH_n$? A criterion for verifying whether a given matrix U has this property is proposed.

Казахстанский филиал
Московского государственного университета,
ул. Мунайтпасова, 7,
010010 Астана, Казахстан
E-mail: adiko2008@gmail.com

Поступило 7 октября 2014 г.