Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 427, 2014 г.

О. Е. Самойлова

О ГРАФАХ, КОТОРЫЕ МОЖНО ИЗОБРАЗИТЬ НА ОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ НА РЕБРЕ

§1. Введение

Мы будем рассматривать графы без петель и кратных ребер и их изображения на различных поверхностях. В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G будем обозначать $V(G)$, множество его ребер – $E(G)$, их количества – $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Минимальную степень графа G будем обозначать как $\delta(G)$, а его хроматическое число, то есть минимальное количество цветов в правильной раскраске вершин, как $\chi(G)$.

Широко известный классический факт гласит, что в планарном графе на v вершинах не более чем $3v-6$ ребер. Также несложно получить аналогичную оценку на количество ребер в графе, изображенном без пересечений ребер на поверхности рода g. В нашей работе будет рассматриваться похожая, но куда более интересная задача. А что если разрешить каждому ребру графа пересекать не более чем k других? Что тогда можно сказать об общем количестве ребер? Для произвольного графа G, изображенного с такими ограничениями на плоскости, при $k \leqslant 4$ в работе [1] Янош Пах и Геза Тот доказали оценку $e(G) \leqslant (k+3)(v-2)$. Мы же будем рассматривать графы, изображенные на торе и других поверхностях, и получим оценку для них. Также будет получена верхняя оценка на хроматическое число таких графов.

Определение 1. *Назовем граф g-сферическим, если его можно изобразить на ориентируемой поверхности рода g так, чтобы его ребра не пересекались во внутренних точках. 1-сферические графы также будем называть торическими.*

0-сферические графы широко известны как планарные. Как и всегда при изображении графов считаем, что вершины изображаются

Ключевые слова: хроматическое число, плоские графы, графы на поверхностях.

точками, ребра – гладкими кривыми без самопересечений, не проходящими через вершины, отличные от концов ребра. Никакая точка пересечения ребер не принадлежит более чем двум рёбрам.

Пусть G – g-сферический граф. Его изображение без пересечений ребер на перверхности рода g делит ее на части, которые мы будем называть *гранями.* Количество граней будем обозначать $f(G)$. Рассмотрим ребро e графа G. Если по разные стороны от e находитятся разные грани, то мы будем называть его *граничным* ребром этих двух граней. Если же по разные стороны от ребра e находится одна и та же грань, назовем его *внутренним* ребром этой грани. *Граничными вершинами* грани D будем называть концы внутренних и граничных ребер этой грани. *Граница* грани D – граф $B(D)$, вершины которого – граничные вершины грани D, а ребра – все граничные и внутренние ребра грани D. Размер границы грани D определим как сумму количества граничных ребер и удвоенного количества внутренних и обозначим $b(D)$.

Триангуляцией $T(G)$ графа G назовем граф, который получен из G добавлением некоторых ребер так, что все его грани – треугольники, то есть гомеоморфны диску и их граница содержит по 3 вершины и 3 ребра. Кратные ребра при этом допускаются, но они не могут лежать в одной грани. Граф $T(D)$ – триангуляция грани D, если он может быть получен сужением какой-либо триангуляции графа на множество вершин $B(D)$. Известно, что любую грань можно триангулировать и количество полученных треугольников не зависит от триангуляции. Будем обозначать это количество $t(D)$ и называть размером триангуляции. Для графов, изображенных на плоскости или на сфере известна следующая лемма о связи размера границы грани и размера триангуляции.

Лемма 1. *Пусть D – грань плоского графа. Если ее граница $B(D)$ связна, то $t(D) = b(D) - 2$, иначе $t(D) \geqslant b(D)$.*

Также в работе мы будем часто пользоваться теоремой Эйлера.

Теорема. *Пусть на поверхности с эйлеровой характеристикой χ изображен связный граф G так, что его ребра не пересекаются во внутренних точках, а каждая из его граней гомеоморфна диску. Тогда*

$$v(G) - e(G) + f(G) = \chi.$$

Теорема также будет верна, если допустить в графе топологически различные грани, но вместо их количества учитывать сумму их эйлеровых характеристик.

Наконец, пришло время определить основной класс графов, который будет рассматриваться в работе.

Определение 2. *Пусть k – целое неотрицательное число. Назовем граф k-почти g-сферическим, если его можно изобразить на ориентируемой поверхности рода g так, чтобы каждое ребро пересекало во внутренних точках не более k других ребер. k-почти 1-сферический граф будем называть k-почти торическим. k-почти 0-сферические графы известны как k-почти планарные.*

Для k-почти g-сферических графов будет доказана оценка сверху на количество ребер, аналогичная оценке Паха и Тота для k-почти планарных графов.

Теорема 1. *При $k \leqslant 4$ в k-почти g-сферическом графе на v вершинах не более чем $(k+3)(v+2g-2)$ ребер.*

При $k=1$ и $k=2$ полученные оценки точны, серии примеров будут построены в работе.

Задачи о том, как связаны возможность изобразить граф без пересечений ребер и наименьшее количество цветов, в которое можно правильным образом покрасить его вершины, являются одними из самых старых в теории графов. Самая известная такая задача – теорема о четырех красках. Самый сильный из результатов в общей постановке задачи описан в [2]: П. Дж. Хивуд доказал, что при $g \geqslant 1$ хроматическое число g-сферического графа не превосходит $\frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}$. В работе [4] была получена верхняя оценка хроматического числа для 1-почти g-сферических графов. Мы же шагнем дальше и получим верхнюю оценку для k-почти g-сферических графов.

Теорема 2. *Пусть k, g – натуральные числа, $k \leqslant 4$. Тогда для любого k-почти g-сферического графа G выполняется*

$$\chi(G) \leqslant \frac{2k+7+\sqrt{4k^2+12k+1+16(k+3)g}}{2}.$$

Замечание. Из теоремы 2 следует, что:

– вершины 1-почти g-сферического графа можно правильным образом покрасить в $\lfloor\frac{9+\sqrt{17+64g}}{2}\rfloor$ цветов;

– вершины 2-почти g-сферического графа – в $\lfloor \frac{11+\sqrt{41+80g}}{2} \rfloor$ цветов;
– вершины 3-почти g-сферического графа – в $\lfloor \frac{13+\sqrt{73+96g}}{2} \rfloor$ цветов;
– вершины 4-почти g-сферического графа – в $\lfloor \frac{15+\sqrt{113+112g}}{2} \rfloor$ цветов.

§2. Оценка числа ребер для k-почти g-сферических графов при малых k

Сформулируем и докажем несколько технических лемм, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть на поверхности с эйлеровой характеристикой χ изображен граф G так, что никакие два его ребра не перекаются во внутренних точках, а все его грани – треугольники. Тогда $e = 3v - 3\chi$, $f = 2v - 2\chi$.*

Доказательство. Каждая грань содержит три различных ребра, каждое ребро лежит ровно в двух гранях. Следовательно, $3f = 2e$. Подставляя это в теорему Эйлера, получаем:

$$v + \frac{2}{3}e - e = \chi$$
$$\frac{1}{3}e = v - \chi$$
$$e = 3v - 3\chi$$

А в силу того, что $f = \frac{2e}{3}$, получаем $f = 2v - 2\chi$. □

Лемма 3. *Пусть D – грань графа, изображенного без пересечений ребер, гомеоморфная сфере с g ручками с k вырезанными дисками. Тогда $t(D) = b(D) + 2(k + 2g - 2)$.*

Доказательство. Зафиксируем триангуляцию грани D. Теперь раздвоим все внутренние ребра границы D так, чтобы каждая компонента связности $B(D)$ превратилась в простой цикл. Ясно, что сумма длин полученных циклов равна $b(D)$. Рассмотрим граф, вершинами которого являются вершины этих циклов, а ребрами – ребра циклов и ребра триангуляции грани. В полученном графе $t(D) + k$ граней, из которых $t(D)$ имеют по 3 ребра в границе, а остальные суммарно $b(D)$ ребер. Значит, $2e = 3t(D) + b(D)$. Все грани этого графа – диски, их объединение – сфера с g ручками. Эйлерова характеристика сферы с

g ручками равна $2 - 2g$. Применяя теорему Эйлера, получаем:

$$b(D) + t(D) + k - \frac{3t(D) + b(D)}{2} = 2 - 2g;$$
$$2b(D) + 2t(D) + 2k - 3t(D) - b(D) = 4 - 4g;$$
$$t(D) = b(D) + 2(k + 2g - 2). \qquad \square$$

Теперь можем приступить к доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы 1. Будем рассматривать k-почти g-сферический граф G как его изображение на сфере с g ручками с минимальным количеством пересечений ребер. Зафиксируем максимальный по количеству ребер остовный g-сферический подграф M графа G. Все ребра из множества $F = E(G) \setminus E(M)$ пересекают ребра графа M. Пусть $f \in F$. Назовем *полуребром* часть ребра f от вершины до первого пересечения с ребром графа M. Тогда у любого ребра из F ровно два различных полуребра. *Полуребрами грани* D назовем полуребра, выходящие вовнутрь грани D из ее вершин. Их количество будем обозначать $h(D)$. Теперь докажем о получившейся конструкции следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть D – грань графа M и $t(D) \geqslant 1$. Тогда*

$$h(D) \leqslant (k + 1) \cdot t(D) - 1.$$

Доказательство. *Случай* 1. Грань D гомеоморфна диску.

В этом случае воспользуемся леммой, доказаной Пахом и Тотом в работе [1].

Лемма 5. *Пусть $k \leqslant 4$, а D – грань графа M, гомеоморфная диску, с границей $B(D)$ и $b(D) \geqslant 3$. Тогда*

$$h(D) \leqslant (k + 1)(b(D) - 2) - 1.$$

По лемме 1 выполняется $t(D) = b(D) - 2$. Подстановка равенства в оценку Паха и Тота доказывает лемму в этом случае:

$$h(D) \leqslant (k + 1)(b(D) - 2) - 1 = (k + 1) \cdot t(D) - 1.$$

Случай 2. Грань D не гомеоморфна диску. Докажем, что в таком случае $b(D) \leqslant t(D)$. Рассмотрим компоненты связности границы $B(D)$. Раздвоив внутренние ребра, можем считать, что каждая из них – цикл. “Вклеим” внутрь каждого такого цикла диск. Получится ориентируемое двумерное многообразие. По теореме о классификации ориентируемых двумерных многообразий в пространстве, полученная поверхность может быть лишь сферой с несколькими ручками (возможно, с нулем ручек). Значит, наша грань D гомеоморфна сфере с некоторым количеством ручек, из которой вырезано несколько дисков. При этом, случай, когда грань D – диск, уже рассмотрен отдельно. А в остальных случаях оценка $b(D) \leqslant t(D)$ напрямую следует из леммы 3, так как сумма удвоенного количества количества ручек и количества вырезанных дисков хотя бы 2.

В силу определения k-почти g-сферического графа, каждое ребро границы содержит не более чем k концов полуребер грани D. Получаем

$$h(D) \leqslant k \cdot b(D) \leqslant k \cdot t(D) \leqslant (k+1) \cdot t(D) - 1. \qquad \square$$

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_n$ – все грани графа M. Триангулируем граф M, тогда в полученной триангуляции T всего $3v - 6 + 6g$ ребер и $2v - 4 + 4g$ граней (см. лемму 2). Значит, $\sum\limits_{i=1}^{n} t(D_i) = 2v - 4 + 4g$. При этом, в каждой грани проведено не менее чем $t(D_i) - 1$ новых ребер. Получаем

$$e(M) \leqslant 3v - 6 + 6g - \sum_{i=1}^{n} (t(D_i) - 1) = 3v - 6 + 6g - (2v - 4 + 4g - n) = v + 2g - 2 + n.$$

Каждое ребро из $e(G) \setminus e(M)$ содержит ровно два полуребра, поэтому

$$\begin{aligned} e(G) &= e(M) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h(D_i) \\ &\leqslant v + 2g - 2 + n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((k+1)t(D_i) - 1) \\ &\leqslant v + 2g - 2 + n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((k+2)t(D_i) - 2) \\ &= v + 2g - 2 + n + (k+2)(v + 2g - 2) - n = (k+3)(v + 2g - 2). \qquad \square \end{aligned}$$

Отметим, что при $k = 1$ и $k = 2$ оценка на количество ребер точная: можно привести бесконечные серии примеров, в которых достигается равенство.

Для начала построим серии примеров для k-почти торических графов. При $k = 1$ изобразим на торе прямоугольную сетку $m \times n$ (см.

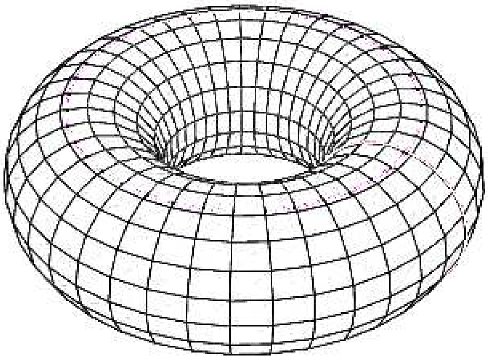

Рис. 1. Прямоугольная сетка на торе.

рисунок 1), чтобы избежать кратных ребер возмем $m, n \geqslant 3$. Получился торический граф, в котором mn вершин, все грани которого четырехугольники и их количество тоже mn. Ребер в этом графе $2mn$. Теперь внутри каждой грани проведем обе диагонали. Таким образом, добавилось по 2 ребра на каждой грани и граф стал 1-почти торическим. В получившемся графе mn вершин и $4mn$ ребер, то есть $e = 4v = (k+3)v$.

При $k = 2$ начнем с построения торического графа, все грани которого – пятиугольники. На рис. 2 изображен такой граф на развертке тора. Вершины, попавшие на линию разреза, изображены повторно и отмечены одинаковыми номерами.

В приведенном примере всего 18 вершин. Можно добавлять в эту конструкцию по 6 вершин, пририсовывая еще один такой же столбец, что соотвествует вклеиванию в тор цилиндра с соответствущим образом проведенными ребрами. Таким образом, получаем торические графы с $v = 6n$ вершинами, в которых все грани пятиугольники. Тогда в них выполняется соотношение $2e = 5f$ и из теоремы Эйлера следует, что в них $4n$ граней и $10n$ ребер. Теперь добавим в граф все диагонали всех граней. У каждой грани 5 диагоналей, значит, у получившегося графа $30n$ ребер. Таким образом, выполняется $e = 5v = (k+3)v$.

Аналогичный способ построения экстремальных примеров для 1- и 2-почти планарных графов описан в работе [1].

Теперь покажем, как имея экстремальный пример графа на поверхности рода g, построить пример на поверхности рода $g+1$. Будем, опять же, рассматривать g-сферические графы, все грани которых четырех- и пятиугольники соответственно. Изобразим такой граф на поверхности рода g, выберем 2 любых несмежных грани D_1 и D_2, вырежем из них окружности и вклеим цилиндр с основаниями в этих окружностях.

При $k=1$ на образовавшейся ручке построим нестягиваемый цикл из 4 вершин и соединим парами его вершины без пересечений с граничными вершинами D_1 и с граничными вершинами D_2. Все получившиеся новые грани тоже являются четырехугольниками. Теперь, как и ранее, проведем по 2 диагонали на каждой грани. Докажем, что для всех полученных таким образом графов G выполняется соотношение $e(G) = 4(v(G) - \chi)$, где χ – эйлерова характеристика рассматриваемой поверхности. Действительно, для g-сферического графа H, у которого все грани – четырехугольники, выполняется соотношение $2e(H) = 4f(H)$. Из теоремы Эйлера получаем $v(H) - 2f(H) + f(H) = \chi$, то есть $v(H) = f(H) + \chi$. После добавления диагоналей граней в граф добавляется $2f(H)$ ребер, а количество вершин не изменяется, всего ребер становится $e(G) = e(H) + 2f(H) = 4f(H) = 4(v(G) - \chi)$, что и требовалось доказать.

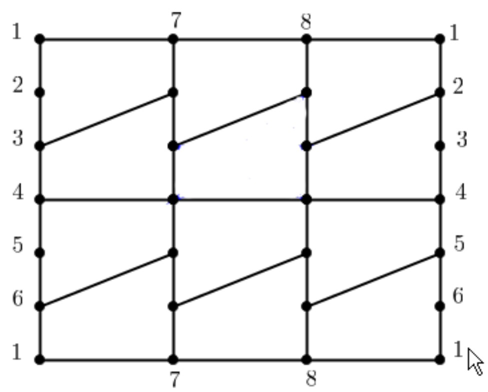

Рис. 2. Торический граф из пятиугольников.

При $k = 2$ на образовавшейся ручке построим нестягиваемый цикл из 10 вершин и соединим без пересечений четные его вершины с граничными вершинами грани D_1, а нечетные – с вершинами грани D_2. Назовем получившийся граф H. Граница любой вновь образовавшейся грани – цикл из пяти вершин: 3 подряд идущие вершины нового цикла и 2 смежные вершины грани D_1 или D_2. Проведем в H все диагонали граней и докажем, что в получившемся 2-почти g-сферическом графе G выполняется $e(G) = 5(v(G) - \chi)$. Аналогично случаю $k = 1$ получаем, что верны следующие соотношения:

$$2e(H) = 5f(H);$$

$$v(H) = \frac{3f(H)}{2} + \chi;$$

$$e(G) = 5f(H) + \frac{5f(H)}{2} = \frac{15f(H)}{2} = 5(v(G) - \chi),$$

что доказывает экстремальность построенных примеров.

§3. Верхняя оценка на хроматическое число для k-почти g-сферических графов

Доказательство теоремы 2. Докажем, что в любом k-почти g-сферическом графе найдется вершина степени не более чем

$$\delta_{max} = \frac{2k + 7 + \sqrt{4k^2 + 12k + 1 + 16(k+3)g}}{2} - 1.$$

Любая вершина в графе G имеет степень не больше, чем $v(G) - 1$. Кроме того, по теореме 1 выполняется

$$e(G) \leqslant (k+3)(v(G) - 2 + 2g).$$

Поэтому обязательно найдется вершина степени не более чем

$$\frac{2(k+3)(v(G) - 2 + 2g)}{v(G)},$$

иначе суммарная степень вершин будет больше удвоенного количества ребер. Значит,

$$\delta(G) \leqslant min\left(v(G) - 1, \frac{2(k+3)(v(G) - 2 + 2g)}{v(G)}\right).$$

Первая из этих двух функций от $v(G)$ строго возрастает, а вторая – нестрого убывает при $g \geqslant 1$. Поэтому максимум этого выражения достигается при таком v_0, что значения этих функций равны, то есть

$$v_0 - 1 = \frac{2(k+3)(v_0 - 2 + 2g)}{v_0}.$$

Решая квадратное уравнение, получаем

$$v_0 = \frac{2k + 7 + \sqrt{4k^2 + 12k + 1 + 16(k+3)g}}{2},$$

а максимум выражения равен $v_0 - 1 = \delta_{max}$.

Теперь докажем индукцией по количеству вершин, что вершины любого k-почти g-сферического графа можно правильным образом покрасить в $\lfloor \delta_{max} \rfloor + 1$ цвет. Очевидно, одну вершину можно покрасить. Поскрасим граф на v вершинах, при условии, что все меньшие графы уже покрашены. Найдем вершину степени не больше, чем $\lfloor \delta_{max} \rfloor$ и выкинем её. Получившийся граф тоже k-почти g-сферический, поэтому его вершины можно правильно покрасить в $\lfloor \delta_{max} \rfloor + 1$ цвет. Теперь добавим выкинутую вершину. Так как с ней смежно не более чем $\lfloor \delta_{max} \rfloor$ вершин, обязательно найдется цвет, не занятый соседями, в который мы ее и покрасим. $\square$

Литература

1. J. Pach, G. Toth., *Graphs drawn with few crossing per edge.* — Combinatorica **17**, No. 3 (1997), 427–439.
2. P. J. Heawood, *Map colour theorem.* — Quart. J. Math. **24** (1890), 332–338.
3. Д. В. Карпов, *Верхняя оценка количества ребер в двудольном почти планарном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **406** (2012), 12–30.
4. Г. В. Ненашев, *Оценка хроматического числа почти планарного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **406** (2012), 95–106.

Samoilova O. E. On graphs which can be drawn on an orientable surface with small number of intersections on an edge.

Let k and g be nonnegative integers. We call a graph k*-nearly* g*-spherical*, if it can be drawn on an orientable surface of genus g such that each edge intersects at most k other edges in inner points. It is proved that for $k \leqslant 4$ the number of edges of a k-nearly g-spherical graph on v vertices does not exceed $(k+3)(v+2g-2)$. It is also proved that the chromatic number of a k-nearly g-spherical graph does not exceed $\frac{2k+7+\sqrt{4k^2+12k+1+16(k+3)g}}{2}$.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: geraolga91@gmail.com

Поступило 5 ноября 2014 г.